2003학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시　　수 학 영 역

'나'형　　성명 |　　| 수험번호 |　|　|　|　|　|　|　|　　1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $\dfrac{\sqrt{9+\sqrt{80}}}{\sqrt{9-\sqrt{80}}}+\dfrac{\sqrt{9-\sqrt{80}}}{\sqrt{9+\sqrt{80}}}$ 을 계산하면? [2점]

① 8　② 9　③ 16　④ 18　⑤ 36

2. 집합 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 이항연산 $\oplus$와 $\otimes$을 다음과 같이 정의한다.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

방정식$(3\otimes x)\oplus 2=1$의 해는? [2점]

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

3. $|x-5|<0.1$을 만족하는 모든 x에 대하여, $|x^2-25|<p$이 성립하도록 하는 p 의 최솟값은? [3점]

① 0.01　② 0.99　③ 1　④ 1.001　⑤ 1.01

4. 자연수 n을 $n=3^m\cdot k$ (단, m은 음이 아닌 정수, k 는 3 의 배수가 아닌 자연수)로 나타냈을 때, $f(n)=m$ 이라 하자. 예를 들면, $f(36)=f(3^2\cdot 4)=2$ 이다.

ㄱ. $f(10000)=0$이다.
ㄴ. $n_1<n_2$ 이면 $f(n_1)\leq f(n_2)$ 이다.
ㄷ. $n_1<n_2$ 이면 $f(3^{n_1})<f(3^{n_2})$ 이다.

위의 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 집합 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,\ 4(x-1),\ x+2\}$에 대하여 $A\otimes B=\{ab\,|\,a\in A,\ b\in B\}$라 할 때, $A\otimes B$의 진부분집합의 개수가 7이다. 이 때, x의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, x는 실수) [4점]

① 0　② $\frac{1}{4}$　③ 1　④ $-\frac{3}{4}$　⑤ -1

6. 각 자리 숫자가 1부터 9까지인 4자리 수로 된 여행용 가방의 비밀번호를 잊어버렸다. 그런데, 비밀번호의 일의 자리 숫자는 5, 백의 자리 숫자는 2이고, 비밀번호가 9로 나누어 떨어진다는 것을 알고 있다. 이 때, 비밀번호로 가능한 것은 몇 가지인가? [3점]

	2		5

① 9 가지　② 10 가지　③ 11 가지
④ 12 가지　⑤ 13 가지

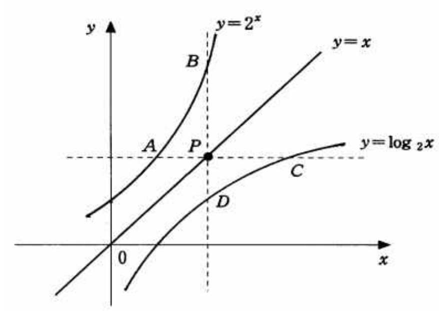
7. 두 함수 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\sqrt{2-x}$ 에 대하여

$$h_1(x)=f(x)+g(x),\ h_2(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ h_3(x)=(g\circ f)(x)$$

의 정의역을 각각 D_1, D_2, D_3 라 할 때, 정의역의 포함관계가 옳은 것은? [3점]

① $D_1\subset D_2\subset D_3$　② $D_2\subset D_1\subset D_3$
③ $D_2\subset D_3\subset D_1$　④ $D_3\subset D_1\subset D_2$
⑤ $D_3\subset D_2\subset D_1$

8. 아래 그림은 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 의 그래프이다. 점 $P(2,\ 2)$ 에서 x축과 y축에 평행한 직선을 그어 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D 라 한다. 이 때, $\triangle ADP$ 와 $\triangle BPC$ 의 면적의 비는? [3점]

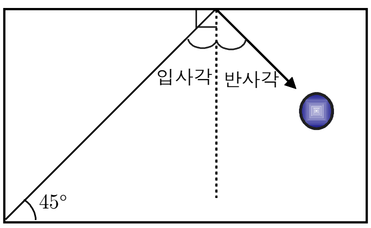


① 1 : 1　② 1 : 2　③ 1 : 3
④ 1 : 4　⑤ 2 : 3

9. 어떤 소리의 세기 I 의 세기준위 β 는 $\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$ 이고, 단위는 데시벨(dB)이다. 여기서 I_0 는 인간이 들을 수 있는 최소의 소리의 세기이다. 지하철의 소리의 세기준위가 $100\,dB$ 이고, 제트엔진의 소리의 세기준위가 $150\,dB$ 일 때, 제트엔진의 소리의 세기는 지하철의 소리의 세기의 몇 배인가? [3점]

① 1.5 배 ② 15 배 ③ 50 배 ④ 10^3 배 ⑤ 10^5 배

10. 가로, 세로의 길이가 각각 7, 5 인 직사각형 모양인 당구대의 모퉁이에서 변과 $45°$ 의 각도로 당구공을 칠 때, 처음으로 어느 모퉁이에 도달할 때까지 당구공이 움직인 거리는? (단, 당구공이 변과 부딪쳐 튕겨 나갈 때, 입사각과 반사각의 크기는 같다.) [4점]



① 25 ② $25\sqrt{2}$ ③ 35 ④ $35\sqrt{2}$ ⑤ 49

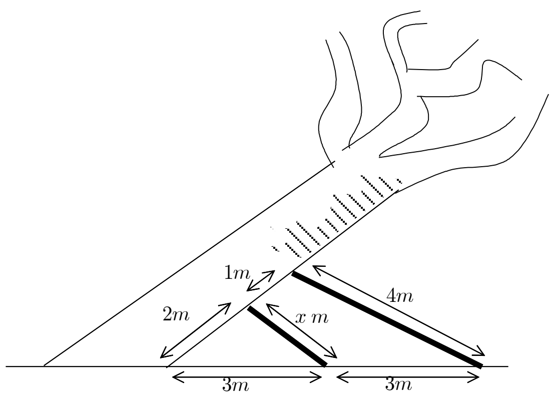
11. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, 함수 $f : N \to N$ 가 두 조건

$f(1)=1,\quad f(n)f(n+1)=5\{f(n)\}^2+5\{f(n)\}-f(n+1)$

를 만족한다. 이 때, $f(n) > 2000$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값은? [3점]

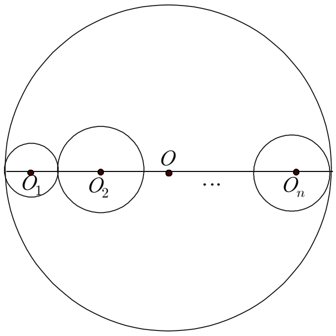
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

12. 태풍으로 인하여 가로수가 기울어져 아래 그림과 같이 두 개의 막대로 지지시켰다. 이 때, 작은 막대의 길이 x 는? [3점]



① $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{29}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{30}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{31}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

13. 원 O 의 내부에 아래 그림과 같이 n 개의 원 $O_1, O_2, \cdots,$ O_n 이 차례로 외접하고 원 O_1 과 원 O_n 은 원 O 에 내접해 있다. 원 $O, O_1, O_2, \cdots, O_n$ 의 넓이를 각각 $S, S_1, S_2, \cdots, S_n$ 이라 할 때, 다음은 $S, S_1, S_2, \cdots, S_n$ 사이의 관계식 $S=$ $\boxed{(나)}$ 을 증명하는 과정이다.



> [증 명]
> 원 $O, O_1, O_2, \cdots, O_n$ 의 반지름을
> 각각 $r, r_1, r_2, \cdots, r_n$ 이라 하면,
>
> $\sqrt{S_1} : \sqrt{S} = r_1 : \boxed{(가)}$
>
> $\sqrt{S_2} : \sqrt{S} = r_2 : \boxed{(가)}$
>
> $\vdots$
>
> $\sqrt{S_n} : \sqrt{S} = r_n : \boxed{(가)}$ 이다.
>
> 그리고, $\dfrac{\sqrt{S_1}}{r_1} = \dfrac{\sqrt{S_2}}{r_2} = \cdots = \dfrac{\sqrt{S_n}}{r_n} = k$ 라 하면,
>
> $\sqrt{S_1} = r_1 k,\ \sqrt{S_2} = r_2 k,\ \cdots,\ \sqrt{S_n} = r_n k$ 이므로
>
> $S = \boxed{(나)}$ 이다.

위의 증명에서 (나)에 알맞은 것은? [4점]

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{S_k}$　② $\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k}$　③ $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{S_k}\right\}^2$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$　⑤ $4\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$

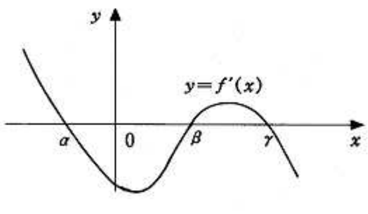
14. 영수는 피로가 누적되어 매일 $100\,mg$ 의 비타민을 섭취하도록 의사의 처방을 받았다. 그래서, 영수는 매일 비타민 $100\,mg$ 을 섭취하려고 한다. 비타민을 섭취한 후 24시간이 되면 영수의 체내에 있는 비타민의 $60\,\%$ 가 체외로 빠져나간다. 영수가 계속해서 비타민을 섭취하면, 앞으로 영수의 체내에 남게 될 비타민의 잔류량이 어떻게 되는지 <풀이>와 같이 구해본다. (단, 영수는 비타민 $100\,mg$ 을 24시간 간격으로 복용하고, 기타 생리적 작용은 배제한다.)

> a_n 을 n 일 후 비타민의 잔류량이라고 하자.
> 그러면, $a_1 = 0.4 \cdot 100 + 100 = 140$ 이고
> a_n 과 a_{n+1} 의 관계식을 구하면
>
> $a_{n+1} = \boxed{(가)} \cdot a_n + 100$ 이다.
>
> 이 식에서 일반항 a_n 을 구하면
>
> $a_n = 140 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \boxed{(나)}$ 이다.
>
> $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{(다)}$ 이므로 영수가 매일 $100mg$ 씩 비타민을 복용하면 체내에 남을 비타민의 잔류량은 $\boxed{(다)}\,mg$ 에 가까워짐을 알 수 있다.

위의 풀이에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	0.3	$140\,(0.3)^{k-1}$	$\dfrac{100}{7}$
②	0.4	$16\,(0.4)^{k-1}$	$\dfrac{500}{3}$
③	0.4	$156\,(0.4)^{k-1}$	$\dfrac{500}{3}$
④	0.6	$16\,(0.6)^{k-1}$	250
⑤	0.6	$156\,(0.6)^{k-1}$	250

15. 사차함수 $f(x)$에 대하여 $y=f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$, $f'(\gamma)=0$ 이고, $f(\alpha)=4$, $f(\beta)=-4$, $f(\gamma)=-1$, $f(0)=-3$ 일 때, 방정식 $|f(x)|-3=0$ 의 실근의 개수는? [4점]



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

16. 방정식 $4(xy+yz+zx)=3xyz$를 만족하는 자연수의 쌍 (x, y, z)의 개수는? (단, x 는 2 이하의 자연수) [4점]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 무수히 많다.

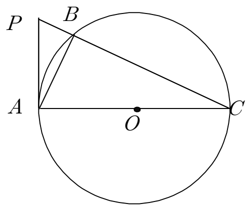
17. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $2f(x)+g(x)$ 와 $f(x)+2g(x)$ 가 모두 $x-7$ 로 나누어 떨어진다.

ㄱ. $f(x)$ 와 $g(x)$ 중 하나는 $x-7$로 나누어 떨어지고, 다른 하나는 $x-7$로 나누어 떨어지지 않는다.
ㄴ. $f(x)g(x)$ 는 $(x-7)^2$ 으로 나누어 떨어진다.
ㄷ. $g(f(x))$ 는 $x-7$ 로 나누어 떨어진다.

위의 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 아래 그림과 같이 $\triangle ABC$는 $\overline{AC}$를 지름으로 하는 반지름이 1 인 원O에 내접하고, 점A에서의 접선과 선분BC의 연장선과의 교점을 P라 한다. $\overline{AB}=0.7814$ 일 때, 아래 표를 이용하여 $\overline{AP}$의 길이에 가장 가까운 값을 구하면? (단, 점O는 원의 중심) [3점]



θ	$\cos\theta$	$\tan\theta$
23°	0.9205	0.4245
28°	0.8829	0.5317
64°	0.4384	2.0503
67°	0.3907	2.3559

① 0.7848 ② 0.7890 ③ 0.8490
④ 0.8829 ⑤ 0.9205

19. 어떤 마을에서 모든 가구가 일간지, 주간지, 월간지 중 적어도 한가지를 구독하고 있다. 일간지, 주간지, 월간지를 구독하는 가구가 각각 80가구, 50가구, 30가구이고, 세 가지 모두 구독하는 가구는 10가구이다. 다음 중 이 마을의 가구 수로 가능한 것은? [3점]

① 139　② 141　③ 143　④ 145　⑤ 147

20. 행렬 A 는 2 차 정사각행렬이고 $A^2-3A+E=O$를 만족한다.

ㄱ. 임의의 2차 정사각행렬 B, C에 대하여
　$AB=AC$ 이면 $B=C$ 이다.
ㄴ. $A-3E$ 의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$은 $x=0$, $y=0$ 이외의 다른 해를 가질 수 있다.

위의 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 2 차 단위행렬, O 는 2 차 영행렬이다.) [4점]

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

21. 실수 전체의 집합 R의 부분집합 S에 대하여 R에서 정의된 함수 $f_S(x)$ 를

$$f_S(x) = \begin{cases} 2 & (x \in S) \\ 5 & (x \notin S) \end{cases}$$

라 하자. R의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 $f_{A\cap B\cap C}(a)=2$일 때, $\{f_A(a)+f_{B^c}(a)+f_C(a)\}\cdot f_{A-B}(a)$의 값은? (단, $B^c=R-B$) [4점]

① 12　② 18　③ 24　④ 30　⑤ 45

22. 함수 $f(x)=\sqrt{9-x^2+6x}$ 일 때, 이 함수의 그래프와 직선 $x=0$, $y=0$, $x=6$ 으로 둘러싸인 영역의 면적은? [4점]

① $\frac{9\pi}{2}+9$　② $\frac{9\pi}{4}+9$　③ $3\pi+\frac{9\sqrt{3}}{2}$
④ $6\pi+\frac{9\sqrt{3}}{2}$　⑤ $6\pi+9$

23. 수열 $\{a_n\}$을 $a_0=1,\ a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}$ $(n \geqq 1)$로 정의한다. 다음은 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\boxed{(나)}$ 임을 증명한 것이다.

> [증 명]
> 수학적 귀납법을 이용하면 … (중 략) …
> $n \geqq 0$인 모든 정수에 대하여 $0 < a_n < a_{n+1}$이 성립함을 알 수 있다.
> 점화식 $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}$ $(n \geqq 1)$을 변형하면
> $a_n-\sqrt{n}=\frac{1}{a_n+\sqrt{n}}\cdot\boxed{(가)}$ $(n \geqq 1)$ 임을 알 수 있다.
> $a_n < a_{n+1}$ 과 점화식 $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}$ 을 이용하여
> $a_n-\sqrt{n}$ 의 범위를 구하면
> $0 < a_n-\sqrt{n} < 1$ 이 된다.
> 그러므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\boxed{(나)}$ 이 된다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

[4점]

① a_{n-1}, 1　② a_{n-1}, 0　③ a_n, 1
④ a_n, 0　⑤ a_n, 2

24. $R(k)$ 는 함수 $y=-x^2+10$ 과 $y=k$ $(-10 < k < 10)$ 의 그래프의 교점 중 오른쪽 점의 x 좌표이다.
이 때, $\lim_{k\to 0}\frac{R(k)-R(-k)}{k}$ 의 값은? [3점]

① ∞　② 0　③ $-\frac{1}{\sqrt{10}}$
④ $\frac{1}{\sqrt{10}}$　⑤ $\frac{2}{\sqrt{10}}$

주관식 문항 (25～30)

25. 임의의 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $f(A)=ad-bc$ 라 정의한다. 행렬 $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때, x 에 관한 이차방정식 $f(B-xE)=0$의 두 근의 곱을 구하시오. [3점]

26. 최고차 항의 계수가 양수인 5 차 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)=15$ 이고, $y=f'(x)$ 의 그래프는 $x=1$, $x=-1$ 에서 x 축과 접한다. $\lim_{x \to 0}\frac{1}{20x}\int_0^x f(t)\,dt = -1$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 이차방정식 $x^2-x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이고, 삼차방정식 $x^3-3x+5=0$ 의 세 근이 $p,\ q,\ r$ 일 때, $(p\alpha+q\beta)^2 + (p\beta-q\alpha)^2 + r^2\alpha^2 + r^2\beta^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

28. 좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ 2)$ 와 $B(3,\ 5)$ 가 있다. 점 P 가 x 축 위를 움직일 때, $|\,\overline{AP}-\overline{BP}\,|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=(2n)^\circ$ 라 하고, 한 변의 길이가 $\sin a_n$ 인 정사각형의 면적을 A_n 으로 정의한다. 이 때, $\sum_{n=1}^{45}A_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. $a_n=\int_0^n (n-x)dx$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}}{10}$ 의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. (단, n 은 자연수) [2점]

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2003년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ④

먼저 이중근호를 풀면 $\sqrt{9\pm\sqrt{80}}=\sqrt{9\pm2\sqrt{20}}=\sqrt{5}\pm2$

(준식)$=\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}+2)^2+(\sqrt{5}-2)^2=18$

2) ④

이항 연산표를 참고하면

$4\oplus2=1$ 이므로 $(3\otimes x)\oplus2=1 \Leftrightarrow 3\otimes x=4 \quad \therefore x=3$

3) ⑤

$|x-5|<0.1 \Leftrightarrow -0.1<x-5<0.1$ …… ①

또, $-0.1<x-5<0.1$ 이므로 $9.9<x+5<10.1$ …… ②

$\therefore -1.01<(x-5)(x+5)<1.01 \Leftrightarrow |x^2-25|<1.01$

4) ④

ㄱ. $10000=3^0\times10000$ 이므로 $\therefore f(10000)=0$

ㄴ. 반례) $f(3)=1$, $f(4)=0$

ㄷ. $n_1<n_2$ 이면 $f(3^{n_1})=n_1 < f(3^{n_2})=n_2$이다.

5) ①

$\otimes$	0	1
1	0	1
$4(x-1)$	0	$4(x-1)$
$x+2$	0	$x+2$

$A\otimes B=\{0,\ 1,\ 4(x-1),\ x+2\}$

집합$A\otimes B$의 진부분집합의 개수가 7이므로 원소의 개수는 3 개 이다.

i) $4(x-1)=x+2$ 일때, $x=2 \Rightarrow A\otimes B=\{0,\ 1,\ 4\}$

ii) $4(x-1)=0$ 일 때, $x=1 \Rightarrow A\otimes B=\{0,\ 1,\ 3\}$

iii) $4(x-1)=1$ 일 때, $x=\dfrac{5}{4} \Rightarrow A\otimes B=\left\{0,\ 1,\ \dfrac{13}{4}\right\}$

iv) $x+2=0$ 일 때, $x=-2 \Rightarrow A\otimes B=\{0,\ 1,\ -12\}$

v) $x+2=1$ 일 때, $x=-1 \Rightarrow A\otimes B=\{0,\ 1,\ -8\}$

$\therefore$ x 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2

6) ①

비밀번호가 9로 나누어 떨어지므로 9의 배수이다.

그러므로 각 자리수의 합이 9의 배수이면 된다.

천의 자리수의 숫자를a 십의 자리의 숫자를b 라 두자.

$a+2+b+5=9k$ (단, $a,b=1,2,3,\cdots,9,k$는 자연수)

i) $a+b=2$ 일 때, $(a,\ b)=(1,\ 1)$ $\therefore$ 1가지

ii) $a+b=11$ 일 때,

$(a,\ b)=(2,\ 9),\ (3,\ 8),\ (4,\ 7),\ (5,\ 6),\ (9,\ 2),\ (8,\ 3),\ (7,\ 4),\ (6,\ 5)$

$\therefore$ 8가지

$\therefore$ $1+8=9$ 가지

7) ②

$f(x)=\log_2x,\ g(x)=\sqrt{2-x}$ 이므로

i) $h_1(x)=f(x)+g(x)=\log_2x+\sqrt{2-x}$

$\Rightarrow x>0,\ 2-x\geqq0 \ \therefore D_1=\{x\mid 0<x\leqq2\}$

ii) $h_2(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\log_2x}{\sqrt{2-x}}$

$\Rightarrow x>0,\ 2-x>0 \ \therefore D_2=\{x\mid 0<x<2\}$

iii) $h_3(x)=(g\circ f)(x)=\sqrt{2-\log_2x}$

$\Rightarrow 2-\log_2x\geqq0 \ \therefore \log_2x\leqq2 \ \therefore D_3=\{x\mid 0<x\leqq4\}$

$\therefore\ D_2\subset D_1\subset D_3$

8) ④

$P(1.\ 2)$ 이므로

i) $2^x=2 \ \therefore\ x=1 \ \therefore\ A(1,\ 2)$ 또, $B(2,\ 4)$

ii) $\log_2x=2 \ \therefore\ x=4 \ \therefore\ C(4,\ 2)$ 또, $D(2,\ 1)$

그러므로 $\triangle ADP=\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$

$\triangle BPC=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$

9) ⑤

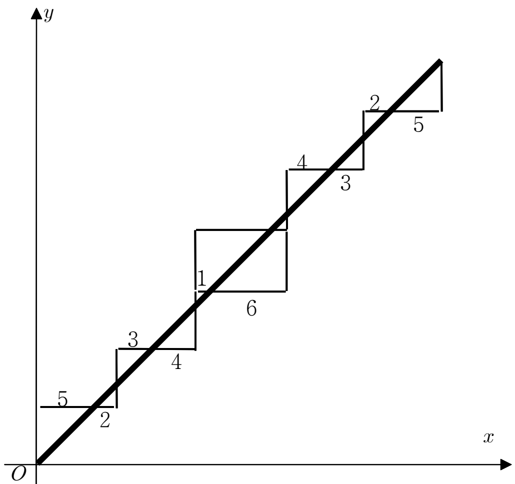
i) $10\log_{10}\dfrac{I_{지}}{I_0}=100 \Leftrightarrow \log_{10}\dfrac{I_{지}}{I_0}=10$

$\therefore\ I_{지}=10^{10}I_0$

ii) $10\log_{10}\dfrac{I_{제}}{I_0}=150 \Leftrightarrow \log_{10}\dfrac{I_{제}}{I_0}=15$

$\therefore\ I_{제}=10^{15}I_0=10^5I_{지} \quad \therefore\ 10^5$ 배

10) ④



윗 그림에서 굵은 선이 한 모퉁이에 처음 도착하게 되는 당구공이 움직인 거리이다. 가로선은 가로변이고 세로선은 세로변이다.

$\therefore\ (5+2+3+4+1+6+4+3+2+5)\sqrt{2}=35\sqrt{2}$

11) ②

점화식이용

$f(n)f(n+1)=5\{f(n)\}^2+5\{f(n)\}-f(n+1)$

$\Leftrightarrow\{f(n)+1\}f(n+1)=5f(n)\{f(n)+1\}$

$\therefore f(1)=1,\quad f(n+1)=5f(n)$

$\therefore\ f(n)=5^{n-1}>2000 \quad \therefore\ n\geqq6$

$\therefore$ 최솟값은 6

12) ③

그림에서 사잇각을 θ 라두고 코사인 제이법칙을 이용하면

i) $\cos\theta=\dfrac{6^2+3^2-4^2}{2\times3\times6}=\dfrac{29}{36}$

ii) $x^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\theta=13-12\times\dfrac{29}{36}=\dfrac{10}{3}$

$\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

13) ③

닮은비가 $a:b$ 이면 넓이의 비는 $a^2:b^2$ 이므로 (가) r

그리고, $\dfrac{\sqrt{S_1}}{r_1}=\dfrac{\sqrt{S_2}}{r_2}=\cdots=\dfrac{\sqrt{S_n}}{r_n}=k$ 라 두면

$\dfrac{\sqrt{S}}{r}=k\ \Leftrightarrow\ S=r^2k^2$

$\sqrt{S_1}=r_1k,\ \sqrt{S_2}=r_2k,\ \cdots,\ \sqrt{S_n}=r_nk$ 이므로

$S=r^2k^2=(r_1+r_2+\cdots+r_n)^2k^2=(r_1k+r_2k+\cdots+r_nk)^2$

$=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\cdots+\sqrt{S_n})^2=\left\{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{S_k}\right\}^2$

14) ②

$a_1=140$, $a_2=0.4\cdot140+100=156$

$a_{n+1}=0.4\cdot a_n+100$

$-)\ a_n=0.4\cdot a_{n-1}+100$

$a_{n+1}-a_n=0.4\cdot(a_n-a_{n-1})$

$\therefore\ a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\cdot(0.4)^{n-1}\Leftarrow a_2-a_1=16$

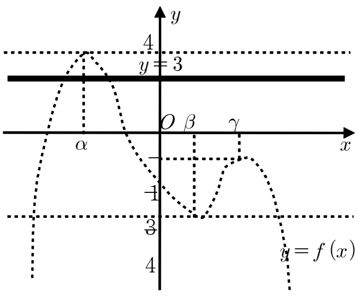
$\therefore\ a_{n+1}-a_n=16\cdot(0.4)^{n-1}$

$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}16\cdot(0.4)^{k-1}$

$=140+\sum_{k=1}^{n-1}16\cdot(0.4)^{k-1}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=140+\dfrac{16}{1-0.4}=\dfrac{500}{3}$

15) ⑤



$y=|f(x)|$ 의 그래프를 대충 그리면 위의 그림의 x 축 아래 부분을 꺾어 올려붙이면 $y=3$ 과 만나는 교점의 개수는 6 개이다.

16) ②

x,y,z 는 자연수 (단, x 는 2이하의 자연수)

$4(xy+yz+zx)=3xyz$ 양변을 xyz 로 나누면

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{4}$ 이고 $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{x}$ 이므로

$\therefore\ x=2$ 이다. ($x=1$ 이면 우변이 음수이므로 모순)

$\therefore\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$ 이고 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{y}$ 이므로

y 와 z 는 5이상의 자연수이다. 또, 위 식을 정리하면

$yz-4(y+z)=0\ \Leftrightarrow\ (y-4)(z-4)=16$ (부정방정식)

$y-4$	1	2	4	8	16
$z-4$	16	8	4	2	1

$\therefore$ 순서쌍은 $(x,\ y,\ z)=(2,\ 5,\ 20),\ (2,\ 6,\ 12),\ (2,\ 8,\ 8)$
$(2,\ 12,\ 6),\ (2,\ 20,\ 5)$

$\therefore$ 5가지

17) ②

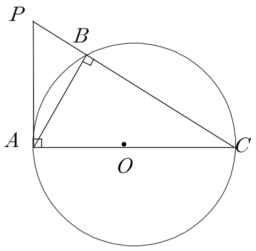
$2f(x)+g(x)$ 와 $f(x)+2g(x)$ 가 모두 $x-7$ 로 나누어 떨어지므로 인수정리에 의해서

$2f(7)+g(7)=0$ 이고 $f(7)+2g(7)=0$ 이므로

$f(7)=0$ 이고 $g(7)=0$ 이다. 그러므로 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x-7$ 로 나누어 떨어진다.

즉, $f(x)=(x-7)p(x)$,$g(x)=(x-7)q(x)$ 라 두면 보기 중 맞는 것은 ㄴ 밖에 없다.

18) ③



반지름이 1이고, $\overline{AB}=0.7814$ 이므로 $\triangle ABC$ 에서 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\cos A$ 이므로

$\cos A=\dfrac{0.7814}{2}=0.3907$

표에서 $A=67^\circ$ 이다.

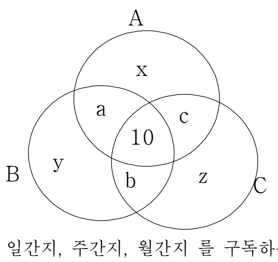
$\triangle ABP$ 에서 $\angle PAB=23^\circ$ 이다.

그러므로

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\cos23^\circ=0.9203$

$\therefore\ \overline{AP}=\dfrac{0.7814}{0.9205}\fallingdotseq0.8490$

19) ①



일간지, 주간지, 월간지 를 구독하는 가정의 집합을 각각 A, B, C 라 두면$n(A)=80$, $n(B)=50$, $n(C)=30$ 이다.

벤다이어그램에서

$x+a+c=70$ …… ①

$y+a+b=40$ …… ②

$z+c+a=20$ …… ③

①+②+③ 하면 $(x+y+z)+2(a+b+c)=140$

$(x+y+z)+(a+b+c)+10=140-(a+b+c)$ 이므로

좌변이 모든 가구의수이므로 140 보다는 작다.

20) ③

$A^2-3A+E=O$ 을 변형하면 $E=A(3E-A)$ 이므로 A 는 역행렬이 존재한다.

ㄱ. $AB=AC$ 이면 $B=C$ 이다. $\because$ A 의 역행렬이 존재하므로

ㄴ. $E=(-A)(A-3E)$ 이므로 $A-3E$ 의 역행렬은 $-A$ 이다.

ㄷ. A 의 역행렬이 존재하므로 방정식 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 의 해는

$x=0,\ y=0$ 만 가진다.

21) ⑤

함수 $f_S(x)$ 가 $f_S(x)=\begin{cases}2 & (x\in S)\\ 5 & (x\notin S)\end{cases}$ 을 만족하므로

$f_{A\cap B\cap C}(a)=2$ 에서 $a\in A\cap B\cap C$ 이므로

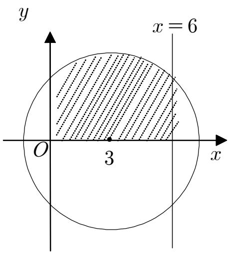
$a\in A,\ a\in B,\ a\in C$ 이다.

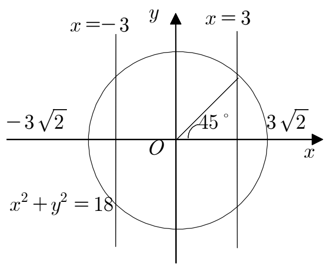
$\{f_A(a)+f_{B^c}(a)+f_C(a)\}\cdot f_{A-B}(a)=\{2+5+2\}\times 5=45$

22) ①

$y=\sqrt{9-x^2+6x}$ 에서 양변을 제곱하면 $(x-3)^2+y^2=18$ 이다.

그러므로 주어지 함수는 중심이 $(3,\ 0)$ 이고 반지름이 $3\sqrt{2}$ 인 원 중에서 위에 부분이다.





왼쪽 그래프를 평행이동 시키면 위의 그림과 같다. 그러므로 넓이는

$$9\pi-2\left(\frac{1}{2}\times 18\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times 3\times 3\right)$$

$$=9\pi-\left(\frac{9}{2}\pi-9\right)=\frac{9}{2}\pi+9$$

23) ①

$a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}\ (n\geq 1)$ 을 양변 제곱하면

$a_n^2=n+a_{n-1}\Leftrightarrow a_n^2-n=a_{n-1}$

$(a_n-\sqrt{n})(a_n+\sqrt{n})=a_{n-1}$

$\therefore\ a_n-\sqrt{n}=\dfrac{1}{a_n+\sqrt{n}}\cdot a_{n-1}\ (n\geq 1)$

$0<a_n-\sqrt{n}<1$ 에서

$\sqrt{n}<a_n<\sqrt{n}+1$ 을 양변을 $\sqrt{n}$ 으로 나누면

$1<\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}<1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 의 양변에 극한을 취하면

$1<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}<\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$ (센드위치)

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=1$

24) ③

교점을 구하면 $-x^2+10=k$ 에서 $x=\sqrt{10-k}$ $(x>0)$

$\therefore\ R(k)=\sqrt{10-k}$ 이다.

$$\lim_{k\to 0}\frac{R(k)-R(-k)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{10-k}-\sqrt{10+k}}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{-2k}{k(\sqrt{10-k}+\sqrt{10+k})}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

25) −13

$B-xE=\begin{pmatrix}1&3\\5&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x&3\\5&2-x\end{pmatrix}$

$\therefore\ f(B-xE)=(1-x)(2-x)-15=0$

$x^2-3x-13=0$ $\quad\therefore$ 두 근의 곱은 -13

26) −12

$y=f'(x)$ 의 그래프는 $x=1,\ x=-1$ 에서 x 축과 접하고, 함수 $f(x)$ 는 최고차 항의 계수가 양수인 5차이므로 $f'(x)$ 는 4차 함수이므로

$f'(x)=a(x+1)^2(x-1)^2$ (단, $a>0$)라 둘 수 있다.

또, $f'(0)=15$ 에서 $a=15$ 이다.

$\therefore\ f'(x)=15(x+1)^2(x-1)^2=15(x^4-2x^2+1)$ 이다.

$\therefore f(x)=\int 15(x^4-2x^2+1)dx$

$=3x^5-10x^3+15x+C$ (단, C는 적분상수)

또, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{20x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt=-1$ 에서

$\dfrac{1}{20}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt=-1\Leftrightarrow f(0)=-20$ 이므로

$f(0)=C=-20$ 이다.

$\therefore\ f(x)=3x^5-10x^3+15x-20$

$\therefore\ f(1)=-12$

27) −18

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=2,\ p+q+r=0,\ pq+qr+rp=-3,\ pqr=-5$

$$\begin{aligned}\text{준식}&=p^2\alpha^2+2\alpha\beta pq+q^2\beta^2+p^2\beta^2+q^2\alpha^2-2\alpha\beta pq+r^2\alpha^2+r^2\beta^2\\&=(p^2+q^2+r^2)\alpha^2+(p^2+q^2+r^2)\beta^2\\&=(p^2+q^2+r^2)(\alpha^2+\beta^2)\\&=\{(p+q+r)^2-2(pq+qr+rp)\}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=-18\end{aligned}$$

28) 13

$\triangle PAB$에서

$\overline{AP}\leq\overline{BP}+\overline{AB}$ (등호는 점 $P,\ A,\ B$ 가 일직선일 때 성립)

$\therefore\ \overline{AP}-\overline{BP}\leq\overline{AB}=\sqrt{13}$

29) 23

$A_n=\sin^2 a_n$ 이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{45}A_n=\sin^2 a_1+\sin^2 a_2+\cdots+\sin^2 a_{45}$

$=\sin^2 2^\circ+\sin^2 4^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=22+1=23$

$(\because \sin^2 A+\cos^2 A=1\Leftrightarrow \sin^2 A+\sin^2(90^\circ-A)=1)$

30) 19.25

$$a_n=\int_0^n(n-x)dx=\left[nx-\frac{1}{2}x^2\right]_0^n=n^2-\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{2}n^2$$

$$\text{준식}=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{20}\times\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=\frac{77}{4}=19.25$$