2003학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

---

1. $\dfrac{\sqrt{9+\sqrt{80}}}{\sqrt{9-\sqrt{80}}}+\dfrac{\sqrt{9-\sqrt{80}}}{\sqrt{9+\sqrt{80}}}$ 을 계산하면? [2점]

① 8 ② 9 ③ 16
④ 18 ⑤ 36

2. 집합 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 이항연산 $\oplus$와 $\otimes$을 다음과 같이 정의한다.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

방정식 $(3\otimes x)\oplus 2=1$의 해는? [2점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

3. $|x-5|<0.1$을 만족하는 모든 x에 대하여, $|x^2-25|<p$이 성립하도록 하는 p 의 최솟값은? [3점]

① 0.01 ② 0.99 ③ 1 ④ 1.001 ⑤ 1.01

4. 자연수 n을 $n=3^m\cdot k$ (단, m은 음이 아닌 정수, k는 3의 배수가 아닌 자연수)로 나타냈을 때, $f(n)=m$ 이라 하자. 예를 들면, $f(36)=f(3^2\cdot 4)=2$ 이다.

ㄱ. $f(10000)=0$이다.
ㄴ. $n_1<n_2$ 이면 $f(n_1)\leqq f(n_2)$ 이다.
ㄷ. $n_1<n_2$ 이면 $f(3^{n_1})<f(3^{n_2})$ 이다.

위의 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 집합 $A=\{0, 1\}$, $B=\{1, 4(x-1), x+2\}$에 대하여 $A\otimes B=\{ab \mid a\in A,\ b\in B\}$라 할 때, $A\otimes B$의 진부분집합의 개수가 7이다. 이 때, x의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, x는 실수) [4점]

① 0　② $\frac{1}{4}$　③ 1　④ $-\frac{3}{4}$　⑤ -1

6. 각 자리 숫자가 1부터 9까지인 4자리 수로 된 여행용 가방의 비밀번호를 잊어버렸다. 그런데, 비밀번호의 일의 자리 숫자는 5, 백의 자리 숫자는 2이고, 비밀번호가 9로 나누어 떨어진다는 것을 알고 있다. 이 때, 비밀번호로 가능한 것은 몇 가지인가? [3점]

	2		5

① 9 가지　② 10 가지　③ 11 가지
④ 12 가지　⑤ 13 가지

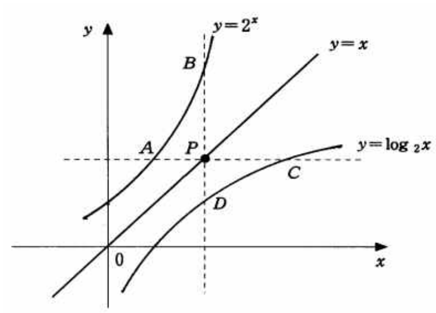
7. 두 함수 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \sqrt{2-x}$ 에 대하여

$$h_1(x)=f(x)+g(x),\ h_2(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ h_3(x)=(g\circ f)(x)$$

의 정의역을 각각 D_1, D_2, D_3 라 할 때, 정의역의 포함관계가 옳은 것은? [3점]

① $D_1 \subset D_2 \subset D_3$　② $D_2 \subset D_1 \subset D_3$
③ $D_2 \subset D_3 \subset D_1$　④ $D_3 \subset D_1 \subset D_2$
⑤ $D_3 \subset D_2 \subset D_1$

8. 아래 그림은 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 의 그래프이다. 점 $P(2,\ 2)$ 에서 x축과 y 축에 평행한 직선을 그어 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D 라 한다. 이 때, $\triangle ADP$ 와 $\triangle BPC$ 의 면적의 비는? [3점]

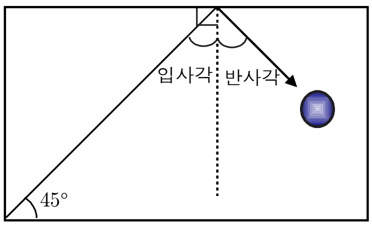


① 1 : 1　② 1 : 2　③ 1 : 3
④ 1 : 4　⑤ 2 : 3

9. 어떤 소리의 세기 I 의 세기준위 β 는 $\beta = 10\log_{10}\dfrac{I}{I_0}$ 이고, 단위는 데시벨(dB)이다. 여기서 I_0 는 인간이 들을 수 있는 최소의 소리의 세기이다. 지하철의 소리의 세기준위가 $100\,dB$ 이고, 제트엔진의 소리의 세기준위가 $150\,dB$ 일 때, 제트엔진의 소리의 세기는 지하철의 소리의 세기의 몇 배인가? [3점]

① 1.5 배 ② 15 배 ③ 50 배
④ 10^3 배 ⑤ 10^5 배

10. 가로, 세로의 길이가 각각 7, 5 인 직사각형 모양인 당구대의 모퉁이에서 변과 45°의 각도로 당구공을 칠 때, 처음으로 어느 모퉁이에 도달할 때까지 당구공이 움직인 거리는? (단, 당구공이 변과 부딪쳐 튕겨 나갈 때, 입사각과 반사각의 크기는 같다.) [4점]



① 25 ② $25\sqrt{2}$ ③ 35
④ $35\sqrt{2}$ ⑤ 49

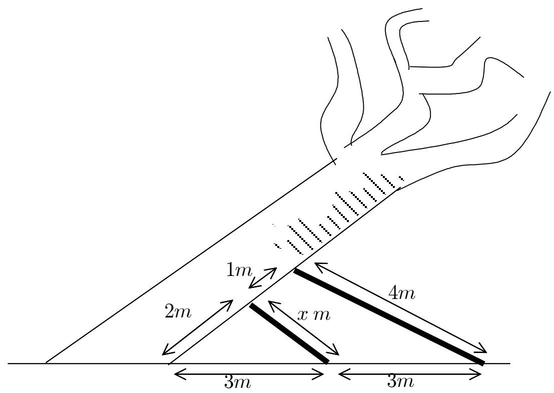
11. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, 함수 $f : N \to N$ 가 두 조건

$$f(1)=1,\quad f(n)f(n+1)=5\{f(n)\}^2+5\{f(n)\}-f(n+1)$$

를 만족한다. 이 때, $f(n) > 2000$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값은? [3점]

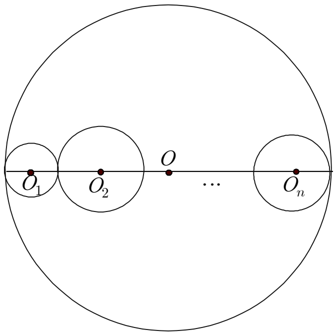
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

12. 태풍으로 인하여 가로수가 기울어져 아래 그림과 같이 두 개의 막대로 지지시켰다. 이 때, 작은 막대의 길이 x 는? [3점]



① $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{29}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$
④ $\dfrac{\sqrt{31}}{3}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

13. 원O 의 내부에 아래 그림과 같이 n 개의 원 O_1, O_2, $\cdots$, O_n 이 차례로 외접하고 원O_1과 원O_n은 원O에 내접해 있다. 원O, O_1, O_2, $\cdots$,O_n 의 넓이를 각각 S, S_1, S_2,$\cdots$,S_n 이라 할 때, 다음은 S, S_1, S_2, $\cdots$, S_n 사이의 관계식 $S=$ (나) 을 증명하는 과정이다.



[증 명]

원 O, O_1, O_2, $\cdots$,O_n 의 반지름을

각각 r, r_1, r_2,$\cdots$,r_n이라 하면,

$\sqrt{S_1}$: $\sqrt{S}=r_1$: (가)

$\sqrt{S_2}$: $\sqrt{S}=r_2$: (가)

$\vdots$

$\sqrt{S_n}$: $\sqrt{S}=r_n$: (가) 이다.

그리고, $\dfrac{\sqrt{S_1}}{r_1}=\dfrac{\sqrt{S_2}}{r_2}=\ \cdots\ =\dfrac{\sqrt{S_n}}{r_n}=k$라 하면,

$\sqrt{S_1}=r_1k$, $\sqrt{S_2}=r_2k$, $\cdots$, $\sqrt{S_n}=r_nk$ 이므로

$S=$ (나) 이다.

위의 증명에서 (나)에 알맞은 것은? [4점]

① $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{S_k}$ ② $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}S_k}$ ③ $\left\{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{S_k}\right\}^2$

④ $\sum_{k=1}^{n}S_k$ ⑤ $4\sum_{k=1}^{n}S_k$

14. 영수는 피로가 누적되어 매일 $100\,mg$ 의 비타민을 섭취하도록 의사의 처방을 받았다. 그래서, 영수는 매일 비타민 $100\,mg$ 을 섭취하려고 한다. 비타민을 섭취한 후 24시간이 되면 영수의 체내에 있는 비타민의 $60\,\%$ 가 체외로 빠져나간다. 영수가 계속해서 비타민을 섭취하면, 앞으로 영수의 체내에 남게 될 비타민의 잔류량이 어떻게 되는지 <풀이>와 같이 구해본다. (단, 영수는 비타민 $100\,mg$ 을 24시간 간격으로 복용하고, 기타 생리적 작용은 배제한다.)

a_n을 n일 후 비타민의 잔류량이라고 하자.

그러면, $a_1=0.4\cdot100+100=140$ 이고 a_n과 a_{n+1}의

관계식을 구하면 $a_{n+1}=$ (가) $\cdot a_n+100$이다.

이 식에서 일반항 a_n을 구하면

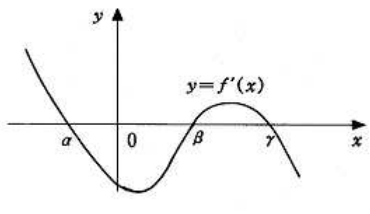
$a_n=140+\sum_{k=1}^{n-1}$ (나) 이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=$ (다) 이므로 영수가 매일 $100mg$씩 비타민을 복용하면 체내에 남을 비타민의 잔류량은 (다) mg에 가까워짐을 알 수 있다.

위의 풀이에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

① 0.3	$140\,(0.3)^{k-1}$	$\dfrac{100}{7}$
② 0.4	$16\,(0.4)^{k-1}$	$\dfrac{500}{3}$
③ 0.4	$156\,(0.4)^{k-1}$	$\dfrac{500}{3}$
④ 0.6	$16\,(0.6)^{k-1}$	250
⑤ 0.6	$156\,(0.6)^{k-1}$	250

15. 사차함수 $f(x)$에 대하여 $y=f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$, $f'(\gamma)=0$ 이고, $f(\alpha)=4$, $f(\beta)=-4$, $f(\gamma)=-1$, $f(0)=-3$ 일 때, 방정식 $|f(x)|-3=0$ 의 실근의 개수는? [4점]



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

16. $P_n=\lim_{x\to\infty}\left\{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})(1+\frac{3}{x})\cdots(1+\frac{n}{x})\right\}^x$ 일 때, $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{\ln P_n}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{19}{20}$ ② $\frac{21}{20}$ ③ $\frac{20}{21}$ ④ $\frac{38}{21}$ ⑤ $\frac{40}{21}$

17. 함수 $f(x)=e^x+\ln x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(e)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{e+1}$ ③ $\frac{e}{e+1}$ ④ e ⑤ $e+1$

18. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β 라 할 때, 분수방정식 $\frac{x-\beta^3}{x-\alpha^3}+\frac{x-\alpha^3}{x-\beta^3}+2=0$ 의 근은? [3점]

① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$

19. 포물선 $y^2-4y-8x+28=0$의 축에 수직이고 초점을 지나는 현의 길이는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

20. $z^6=1$을 만족하는 복소수 z에 대하여 $|z-z^2|$의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

21. 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 평면 $\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}z=0$ 이 만나서 생긴 도형의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{2}\pi$ ② $\frac{1}{3}\pi$ ③ $\frac{1}{4}\pi$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

22. 일차변환 f 와 g 의 행렬이 각각 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$과 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$일 때, 합성변환 $f \circ g$ 에 의하여 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 이 옮겨지는 도형의 둘레의 길이는? [3점]

① π ② 2π ③ 4π ④ 6π ⑤ 8π

23. 수열 $\{a_n\}$을 $a_0=1,\ a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}\ (n \geq 1)$로 정의한다. 다음은 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\boxed{(나)}$ 임을 증명한 것이다.

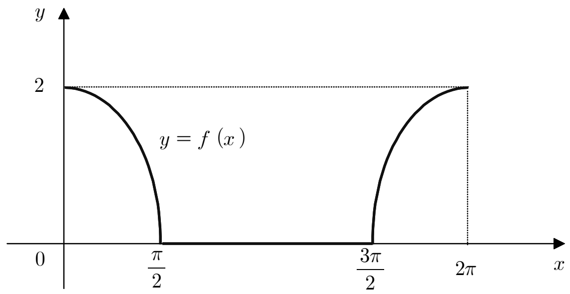
[증 명]
수학적 귀납법을 이용하면 … (중 략) …
$n \geq 0$인 모든 정수에 대하여 $0 < a_n < a_{n+1}$이 성립함을 알 수 있다.
점화식 $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}\ (n \geq 1)$을 변형하면
$a_n-\sqrt{n}=\frac{1}{a_n+\sqrt{n}}\cdot\boxed{(가)}\ (n \geq 1)$ 임을 알 수 있다.
$a_n < a_{n+1}$ 과 점화식 $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}$ 을 이용하여 $a_n-\sqrt{n}$ 의 범위를 구하면
$0 < a_n-\sqrt{n} < 1$ 이 된다.
그러므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\boxed{(나)}$ 이 된다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

① $a_{n-1},\ 1$ ② $a_{n-1},\ 0$ ③ $a_n,\ 1$
④ $a_n,\ 0$ ⑤ $a_n,\ 2$

24. 아래 그림은 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \cos x + |\cos x|$ 의 그래프이다.

이 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} f\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx$ 의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1　④ $\sqrt{3}$　⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 임의의 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $f(A) = ad - bc$ 라 정의한다. 행렬 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때, x 에 관한 이차방정식 $f(B - xE) = 0$ 의 두 근의 곱을 구하시오. [3점]

26. 직선 $y = -4x$ 와 직선 $y = 2x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 할 때, $\sec^2(\alpha - \beta) = \frac{A}{49}$ 이다. 이 때, A 의 값을 구하시오. [3점]

27. 이차방정식 $x^2-x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이고, 삼차방정식 $x^3-3x+5=0$ 의 세 근이 $p,\ q,\ r$ 일 때, $(p\alpha+q\beta)^2+(p\beta-q\alpha)^2+r^2\alpha^2+r^2\beta^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

28. 좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ 2)$ 와 $B(3,\ 5)$ 가 있다. 점 P 가 x 축 위를 움직일 때, $|\overline{AP}-\overline{BP}|^2$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=(2n)^\circ$ 라 하고, 한 변의 길이가 $\sin a_n$ 인 정사각형의 면적을 A_n 으로 정의한다. 이 때, $\sum_{n=1}^{45} A_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. $a_n=\int_0^n (n-x)dx$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}}{10}$ 의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. (단, n 은 자연수) [2점]

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2003년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ④

먼저 이중근호를 풀면

$\sqrt{9 \pm \sqrt{80}} = \sqrt{9 \pm 2\sqrt{20}} = \sqrt{5} \pm 2$

$(\text{준식}) = \dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} + \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

$= (\sqrt{5}+2)^2 + (\sqrt{5}-2)^2 = 18$

2) ④

이항 연산표를 참고하면

$4 \oplus 2 = 1$ 이므로

$(3 \otimes x) \oplus 2 = 1 \Leftrightarrow 3 \otimes x = 4 \quad \therefore x = 3$

3) ⑤

$|x-5| < 0.1 \Leftrightarrow -0.1 < x-5 < 0.1$ …… ①

또, $-0.1 < x-5 < 0.1$ 이므로 $9.9 < x+5 < 10.1$ …… ②

$\therefore -1.01 < (x-5)(x+5) < 1.01 \Leftrightarrow |x^2-25| < 1.01$

4) ④

ㄱ. $10000 = 3^0 \times 10000$ 이므로 $\therefore f(10000) = 0$

ㄴ. 반례) $f(3) = 1$, $f(4) = 0$

ㄷ. $n_1 < n_2$ 이면 $f(3^{n_1}) = n_1 < f(3^{n_2}) = n_2$이다.

5) ①

$A \otimes B = \{0,\ 1,\ 4(x-1),\ x+2\}$

$\otimes$	0	1
1	0	1
$4(x-1)$	0	$4(x-1)$
$x+2$	0	$x+2$

집합$A \otimes B$의 진부분집합의 개수가 7이므로 원소의 개수는 3개이다.

ⅰ) $4(x-1) = x+2$ 일때, $x = 2$

$\Rightarrow A \otimes B = \{0,\ 1,\ 4\}$

ⅱ) $4(x-1) = 0$ 일 때, $x = 1 \Rightarrow A \otimes B = \{0,\ 1,\ 3\}$

ⅲ) $4(x-1) = 1$ 일 때, $x = \dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow A \otimes B = \left\{0,\ 1,\ \dfrac{13}{4}\right\}$

ⅳ) $x+2 = 0$ 일 때, $x = -2 \Rightarrow A \otimes B = \{0,\ 1,\ -12\}$

ⅴ) $x+2 = 1$ 일 때, $x = -1 \Rightarrow A \otimes B = \{0,\ 1,\ -8\}$

$\therefore$ x 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2

6) ①

비밀번호가 9로 나누어 떨어지므로 9의 배수이다.

그러므로 각 자리수의 합이 9의 배수이면 된다.

천의 자리수의 숫자를a 십의 자리의 숫자를b 라 두자.

$a+2+b+5 = 9k$ (단, $a, b = 1,2,3,\cdots,9, k$는 자연수)

ⅰ) $a+b = 2$ 일 때, $(a,\ b) = (1,\ 1)$ $\therefore$ 1가지

ⅱ) $a+b = 11$ 일 때,

$(a,\ b) = (2,\ 9),\ (3,\ 8),\ (4,\ 7),\ (5,\ 6),\ (9,\ 2),\ (8,\ 3),\ (7,\ 4),\ (6,\ 5)$

$\therefore$ 8가지

$\therefore$ $1+8 = 9$ 가지

7) ②

$f(x) = \log_2 x,\ g(x) = \sqrt{2-x}$ 이므로

ⅰ) $h_1(x) = f(x) + g(x) = \log_2 x + \sqrt{2-x}$

$\Rightarrow x > 0,\ 2-x \geqq 0 \ \therefore D_1 = \{x \mid 0 < x \leqq 2\}$

ⅱ) $h_2(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{2-x}}$

$\Rightarrow x > 0,\ 2-x > 0 \ \therefore D_2 = \{x \mid 0 < x < 2\}$

ⅲ) $h_3(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{2 - \log_2 x}$

$\Rightarrow 2 - \log_2 x \geqq 0 \ \therefore \log_2 x \leqq 2 \ \therefore D_3 = \{x \mid 0 < x \leqq 4\}$

$\therefore D_2 \subset D_1 \subset D_3$

8) ④

$P(1.\ 2)$ 이므로

ⅰ) $2^x = 2 \ \therefore \ x = 1 \ \therefore \ A(1,\ 2)$ 또, $B(2,\ 4)$

ⅱ) $\log_2 x = 2 \ \therefore \ x = 4 \ \therefore \ C(4,\ 2)$ 또, $D(2,\ 1)$

그러므로 $\triangle ADP = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 1 = \dfrac{1}{2}$

$\triangle BPC = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \quad \therefore \ \dfrac{1}{2} : 2 = 1 : 4$

9) ⑤

ⅰ) $10 \log_{10} \dfrac{I_{지}}{I_0} = 100 \Leftrightarrow \log_{10} \dfrac{I_{지}}{I_0} = 10$

$\therefore \ I_{지} = 10^{10} I_0$

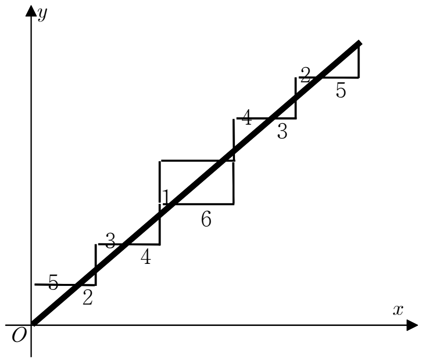
ⅱ) $10 \log_{10} \dfrac{I_{제}}{I_0} = 150 \Leftrightarrow \log_{10} \dfrac{I_{제}}{I_0} = 15$

$\therefore \ I_{제} = 10^{15} I_0 = 10^5 I_{지} \quad \therefore \ 10^5$ 배

10) ④

그림에서 굵은 선이 한 모퉁이에 처음 도착하게 되는 당구공이 움직인 거리이다.가로선은 가로변이고 세로선은 세로변이다.

$\therefore \ (5+2+3+4+1+6+4+3+2+5)\sqrt{2} = 35\sqrt{2}$



11) ②

$f(n) f(n+1) = 5\{f(n)\}^2 + 5\{f(n)\} - f(n+1)$

$\Leftrightarrow \{f(n)+1\} f(n+1) = 5 f(n) \{f(n)+1\}$

$\therefore f(1) = 1, \quad f(n+1) = 5 f(n)$

$\therefore \ f(n) = 5^{n-1} > 2000 \quad \therefore \ n \geqq 6$

$\therefore$ 최솟값은 6

12) ③

그림에서 사잇각을 θ 라두고 코사인 제이법칙을 이용하면

ⅰ) $\cos\theta = \dfrac{6^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 3 \times 6} = \dfrac{29}{36}$

ii) $x^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\theta=13-12\times\frac{29}{36}=\frac{10}{3}$

$\therefore\ x=\frac{\sqrt{30}}{3}$

13) ③

닮은비가 $a:b$ 이면 넓이의 비는 $a^2:b^2$ 이므로 (가) r
그리고,

$\frac{\sqrt{S_1}}{r_1}=\frac{\sqrt{S_2}}{r_2}=\cdots=\frac{\sqrt{S_n}}{r_n}=k$ 라 두면

$\frac{\sqrt{S}}{r}=k \Leftrightarrow S=r^2k^2$

$\sqrt{S_1}=r_1k,\ \sqrt{S_2}=r_2k,\ \cdots,\ \sqrt{S_n}=r_nk$ 이므로

$S=r^2k^2=(r_1+r_2+\cdots+r_n)^2k^2=(r_1k+r_2k+\cdots+r_nk)^2$

$=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\cdots+\sqrt{S_n})^2=\left\{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{S_k}\right\}^2$

14) ②

$a_1=140$, $a_2=0.4\cdot140+100=156$

$$\begin{aligned} & a_{n+1}=0.4\cdot a_n+100 \\ -)\ & a_n=0.4\cdot a_{n-1}+100 \\ & a_{n+1}-a_n=0.4\cdot(a_n-a_{n-1}) \end{aligned}$$

$\therefore\ a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\cdot(0.4)^{n-1} \Leftarrow a_2-a_1=16$

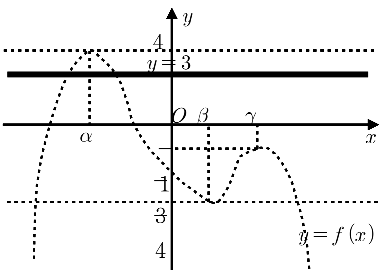
$\therefore a_{n+1}-a_n=16\cdot(0.4)^{n-1}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}16\cdot(0.4)^{k-1}=140+\sum_{k=1}^{n-1}16\cdot(0.4)^{k-1}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=140+\frac{16}{1-0.4}=\frac{500}{3}$

15) ⑤

$y=|f(x)|$ 의 그래프를 대충 그리면



위의 그림의 x 축 아래 부분을 꺾어 올려붙이면 $y=3$ 과 만나는 교점의 개수는 6 개이다.

16) ⑤

$P_n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\cdots\left(1+\frac{n}{x}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^3\cdots\left\{\left(1+\frac{n}{x}\right)^{\frac{x}{n}}\right\}^n$

$=e\cdot e^2\cdot e^3\cdot\ \cdots\ \cdot e^n\ =e^{1+2+3+\cdots+n}=e^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$\ln P_n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{20}\frac{1}{\ln Pn}=\sum_{n=1}^{20}\frac{2}{n(n+1)}=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

17) ②

$y=e^x+\ln x$ 이므로

$x=e^y+\ln y$ 을 양변을 y 에 관하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=e^y+\frac{1}{y}=\frac{y\,e^y+1}{y}\quad g'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y\,e^y+1}$

이므로 $g'(e)=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{y=1}=\frac{1}{e+1}$

($\because\ e=e^y+\ln y\quad\therefore\ y=1$)

18) ②

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

주어진 분수방정식의 양변에 $(x-\alpha^3)(x-\beta^3)$ 을 곱하면

$(x-\beta^3)^2+(x-\alpha^3)^2+2(x-\alpha^3)(x-\beta^3)=0$

$4x^2-4(\alpha^3+\beta^3)x+(\alpha^3+\beta^3)^2=0$

$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=18$

$\therefore\ \ x^2-18x+81=0\quad\therefore\ \ x=9$

19) ④

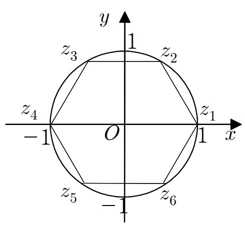
$y^2-4y-8x+28=0\ \Leftrightarrow\ (y-2)^2=8(x-3)$

$y^2=8x$ 의 그래프를 x 축으로 3만큼 y 축으로 2만큼 평행이동한 식이므로 초점의 좌표는 $F(5,\ 2)$ 대칭축의 방정식은 $y=2$ 이다.

포물선과 직선 $x=5$ 만나는 점은 $y^2-4y-12=0$ 에서

$y=-2$ 또는 $y=6$ 현의 길이는 6-(-2)=8

20) ⑤



$z^6=1$ 을 만족하는 6개의 근은 오른쪽 그림의 복소평면에서 반지름이 1인 원에 내접하는 정육각형의 6개의 꼭지점이다. (단, $z=1$ 포함)

그러므로 절대값의 성질에서

$|z-z^2|=|z||1-z|=|1-z|\ \Leftrightarrow$ 1에서 z 까지의 거리

그러므로 1에서 가장 멀리 떨어져있는 점은 $z_4=-1$ 이다.

그러므로 최댓값은 $1-(-1)=2$

21) ①

평면 $\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}z=0$ 와 xy 평면이 이루는각을 θ ,

$\overrightarrow{n_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$ 라 두면

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{2}$

정사영을 이용하면

$\therefore\ \ S'=S\cos\theta=\pi\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$

22) ③

$f\circ g\ :\ \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$x=\frac{1}{2}(x'+\sqrt{3}y'),\ y=\frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y')$을 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 에

대입하여 정리하면

$x'^2+y'^2=4$

둘레의 길이는 4π

23) ①

$a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}$ $(n \geqq 1)$을 양변 제곱하면

$a_n^2=n+a_{n-1} \Leftrightarrow a_n^2-n=a_{n-1}$

$(a_n-\sqrt{n})(a_n+\sqrt{n})=a_{n-1}$

$\therefore\ a_n-\sqrt{n}=\frac{1}{a_n+\sqrt{n}}\cdot a_{n-1}$ $(n \geqq 1)$

$0<a_n-\sqrt{n}<1$ 에서

$\sqrt{n}<a_n<\sqrt{n}+1$ 을 양변을 $\sqrt{n}$ 으로 나누면

$1<\frac{a_n}{\sqrt{n}}<1+\frac{1}{\sqrt{n}}$ 의 양변에 극한을 취하면

$1<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}<\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$ (센드위치)

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=1$

24) ③

준식) $=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\left\{\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\left|\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right|\right\}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$

$=\left[\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\left[\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}$

$=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}\right)+\left(\sin\frac{11\pi}{6}-\sin\frac{3\pi}{2}\right)=1$

25) -13

$B-xE=\begin{pmatrix}1&3\\5&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x&3\\5&2-x\end{pmatrix}$

$\therefore\ f(B-xE)=(1-x)(2-x)-15=0$

$x^2-3x-13=0$

$\therefore$ 두 근의 곱은 -13

26) 85

$\tan\alpha=-4,\quad \tan\beta=2$ 이므로

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{6}{7}$

$\sec^2(\alpha-\beta)=1+\tan^2(\alpha-\beta)=\frac{A}{49}$

$1+\frac{36}{49}=\frac{A}{49}\quad \therefore\ A=85$

27) -18

근과 계수 관계에서

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=2$

$p+q+r=0,\ pq+qr+rp=-3,\ pqr=-5$

준식) $=p^2\alpha^2+2\alpha\beta pq+q^2\beta^2+p^2\beta^2+q^2\alpha^2-2\alpha\beta pq+r^2\alpha^2+r^2\beta^2$

$=(p^2+q^2+r^2)\alpha^2+(p^2+q^2+r^2)\beta^2$

$=(p^2+q^2+r^2)(\alpha^2+\beta^2)$

$=\{(p+q+r)^2-2(pq+qr+rp)\}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$=-18$

28) 13

$\triangle PAB$에서

$\overline{AP} \leq \overline{BP}+\overline{AB}$ (등호는 점 P, A, B 가 일직선일 때 성립)

$\therefore \overline{AP}-\overline{BP} \leq \overline{AB}=\sqrt{13}$

29) 23

$A_n=\sin^2 a_n$ 이므로

$\sum_{n=1}^{45}A_n=\sin^2 a_1+\sin^2 a_2+\cdots+\sin^2 a_{45}$

$=\sin^2 2^\circ+\sin^2 4^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=22+1=23$

$(\because \sin^2 A+\cos^2 A=1 \Leftrightarrow \sin^2 A+\sin^2(90^\circ-A)=1)$

30) 19.25

$a_n=\int_0^n(n-x)dx=\left[nx-\frac{1}{2}x^2\right]_0^n$

$=n^2-\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{2}n^2$

준식 $=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{20}\times\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=\frac{77}{4}=19.25$