2002학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형 | 성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 실수 x, y에 대하여 a, b를 각각 $a = 9^x$, $b = 3^y$이라 할 때, $\log_a \sqrt{b}$를 x와 y로 나타내면? (단, $x \neq 0$) [2점]

① $\frac{y}{4x}$ ② $\frac{y}{3x}$ ③ $\frac{2y}{3x}$ ④ $\frac{3y}{4x}$ ⑤ $\frac{2y}{x}$

2. 복소수 z와 z의 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 $d(z)$를

$$d(z) = \sqrt{z\bar{z}}$$

로 정의할 때, $d\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2001}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2001}$ ② $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2001

3. 전체집합을 $U = \{a, b, c, d\}$라 하고, U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$을

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

로 정의할 때, $\{a, b, c\} \triangle X = Y$를 만족하는 집합 X, Y에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [3점]

① $X = \{a, b, c\}$이면 $Y = \varnothing$이다.
② $X = \{d\}$이면 $Y = U$이다.
③ $X = \{c\}$이면 $Y = \{a, b\}$이다.
④ $X = U$이면 $Y = \{a, b, c\}$이다.
⑤ $X = \{c, d\}$이면 $Y = \{a, b, d\}$이다.

4. $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^{27}}{1 - x}$의 값은? [2점]

① 0 ② 1 ③ 26 ④ 27 ⑤ ∞

5. $\sum_{k=1}^{100}(k-2)^2-\sum_{k=1}^{101}4 + 4\sum_{k=1}^{100}k-\sum_{k=2}^{101}(k-1)^2$ 의 값은? [3점]

① -400 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 400

6. 두 함수 $f(\theta)$와 $g(\theta)$를

$$f(\theta)=\frac{\sin(\pi+\theta)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)},\ g(\theta)=\frac{\cos(\pi+\theta)}{1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}$$

로 정의할 때, $f(\theta)f(-\theta)g(\theta)g(-\theta)$를 간단히 하면? [3점]

① $-\cot^2\theta$ ② $-\tan^2\theta$ ③ $\sec^2\theta$
④ $\tan^2\theta$ ⑤ $\cot^2\theta$

7. 수 a, b, c, d에 대하여 $[a, b, c, d]_{(x)}$를

$$[a, b, c, d]_{(x)}=ax^3+bx^2+cx+d$$

로 정의하자. 예를 들면 $[2,1,3,6]_{(x)}=2x^3+x^2+3x+6$이다. 이때, 등식 $[1,1,0,1]_{(x)}=[p,q,r,s]_{(x-1)}$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하도록 하는 상수 $p,\ q,\ r,\ s$의 합 $p+q+r+s$의 값은? [3점]

① -1 ② 3 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

8. $x^2+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}=11$, $y^2-4\sqrt{4-2\sqrt{3}}=11$을 만족하는 양의 실수 x, y에 대하여 x^3+y^3의 값은? [4점]

① 48 ② 52 ③ $24\sqrt{3}$
④ $16+16\sqrt{3}$ ⑤ $64-6\sqrt{3}$

9. 실수 x, y에 대하여 [보기] 중에서 조건 p가 조건 q 이기 위한 충분조건인 것을 모두 고르면? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $p: x+y=0$ $\quad q: x^2+y^2=0$

ㄴ. $p: |x| \leqq 1$ $\quad q: |x^2-1| \leqq 2|x-1|$

ㄷ. $p: 0<x<1$ 이고 $y<1-\sqrt{1-x}$ $\quad q: y<x$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. $f(1)=2$, $f'(1)=3$을 만족하는 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{axf(x)-2a}{x-1} & (x \neq 1) \\ 9 & (x=1) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

11. 이차부등식 $ax^2+bx+c \geqq 0$의 해집합이 $\{3\}$일 때, 부등식 $bx^2+cx+6a<0$을 만족하는 정수 x의 개수는? [3점]

① 0개 ② 1개 ③ 2개
④ 3개 ⑤ 무수히 많다.

12. 일차함수 $f(x)=ax+b$가

$$f^{-1}(1)=0 \text{과 } f^{-1}\left(f^{-1}(b)\right)=2b$$

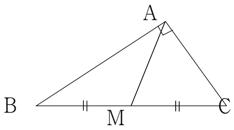
를 만족할 때, $f(a^2-b^2)$의 값은? [3점]

① $-\frac{7}{3}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{17}{10}$

13. 다음은 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC 에서
$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$ 을 증명한 것이다.

< 증 명 >

오른쪽 그림과 같이
변BC 의 중점을M 이라 하면



$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$
$= \boxed{(가)}(\overline{BM}^2 + (\boxed{(나)})^2)$
이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,
$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\ \overline{BC}$ 이므로
$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \boxed{(가)}\ (\boxed{(라)}\ \overline{BC}^2)$

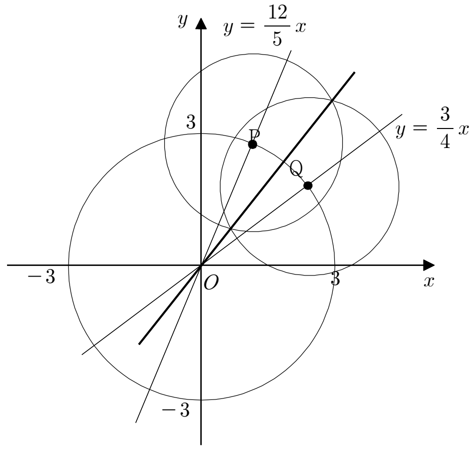
위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	3	$2\overline{AM}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
②	4	$2\overline{AM}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
③	2	$\overline{AM}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
④	2	$\overline{AM}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
⑤	$\frac{16}{5}$	$\overline{AM}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$

14. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대인 것의 둘레의 길이는? [3점]

① 12 ② 15 ③ $5+5\sqrt{2}$
④ $5+2\sqrt{5}$ ⑤ $10+2\sqrt{2}$

15. 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원과 두 직선 $y = \frac{12}{5}x$, $y = \frac{3}{4}x$ 와의 제1사분면 위에서의 교점을 각각 P ,Q 라 하자. 이 때, 점 P 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원과 점 Q 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 그렸을 때, 점 P 와 점 Q 를 중심으로 하는 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하면? [4점]



① $9x - 7y = 0$ ② $7x - 9y = 0$ ③ $7x - 5y = 0$
④ $5x - 7y = 0$ ⑤ $4x - 3y = 0$

16. f, g가 일대일 대응일 때, $f \circ h_1 = g$, $h_2 \circ f = g$를 만족하는 h_1, h_2에 대한 [보기]의 설명 중 항상 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

< 보 기 >

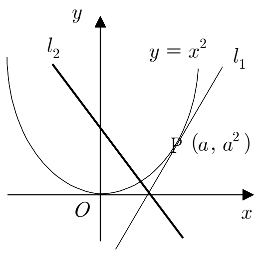
ㄱ. $h_1 = f^{-1} \circ g$이고 $h_2 = g \circ f^{-1}$이다.

ㄴ. h_1과 h_2는 모두 일대일 대응이다.

ㄷ. h_1과 h_2는 서로 같은 함수가 아니다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, a^2)$에서 그은 접선을 l_1이라 하고, 직선 l_1과 x축이 이루는 각 중에서 큰 각을 이등분하는 직선을 l_2라고 하자. 직선 l_2의 방정식이 $y = -\sqrt{3}\,x + k$일 때, 상수 k의 값은? (단, $a > 0$) [4점]



① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

18. 다음은 임의의 실수 a, b에 대하여

$\boxed{(가)} \leq |a+b| \leq \boxed{(나)}$ 임을 증명한 것이다.

< 증 명 >

$-|a| \leq a \leq |a|$이고 $-|b| \leq b \leq |b|$이므로

$|a+b| \leq \boxed{(나)}$ ⋯ ㉠

㉠을 이용하면 $|a| \leq |a+b| + \boxed{(다)}$ 이므로

$|a| - \boxed{(다)} \leq |a+b|$이다.

같은 방법으로 하면 $\boxed{(다)} - |a| \leq |a+b|$

∴ $\boxed{(가)} \leq |a+b|$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡에 의해 $\boxed{(가)} \leq |a+b| \leq \boxed{(나)}$ 가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \rvert$	$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert$	$\lvert b\rvert$
②	$\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \rvert$	$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$-\lvert b\rvert$
③	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert a-b\rvert$	$-\lvert b\rvert$
④	$\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \rvert$	$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert b\rvert$
⑤	$\lvert a-b\rvert$	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert b\rvert$

19. 자연수 n에 대하여 원 $(x-2n)^2 + y^2 = 1$과 원점을 지나는 직선이 제1사분면에서 접할 때, 이 직선의 기울기를 a_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ 2

20. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 세 집합 A, B, C를

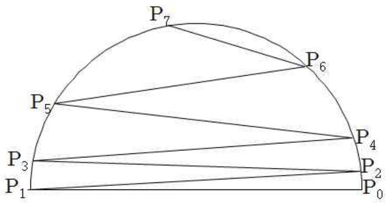
$A=\{x \mid f(x)=0\}$, $B=\{x \mid g(x)=0\}$

$C=\{x \mid (f(x)+g(x))^3=(f(x))^3+(g(x))^3\}$

라고 하자. $n(A)=4$이고 $n(B)=3$일 때, $n(C)$의 최솟값은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수) [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원에서 지름의 양 끝점을 P_0, P_1이라 하자. 이 때, $\angle P_0P_1P_2=1°$, $\angle P_1P_2P_3=2°$, $\cdots$, $\angle P_{k-1}P_kP_{k+1}=(2^{k-1})°$를 만족하는 원주 위의 점 P_2, P_3, ⋯, P_7에 대하여 선분 P_6P_7의 길이는? [4점]

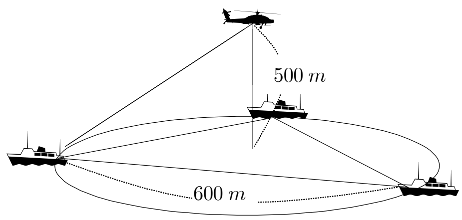


① $2\cos 32°$ ② $2\sin 32°$ ③ $2\cos 63°$
④ $2\cos 64°$ ⑤ $2\sin 64°$

22. 어느 대학교에서는 2001학년도 신입생을 면접, 내신과 수능 성적으로 3200명의 지원자 중에서 800명을 선발하였다. 면접시험에서 85점 이상을 받은 학생은 합격자의 80% 이고 불합격자의 30%이다. 이 때, 면접시험에서 85점 이상을 받은 학생이 합격할 확률은? [4점]

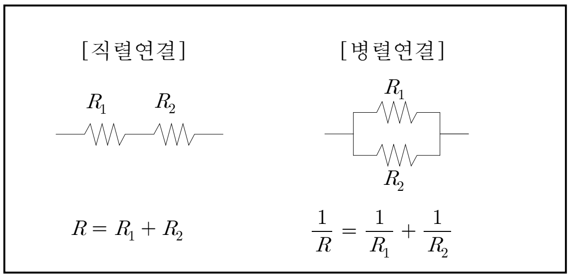
① $\frac{7}{17}$ ② $\frac{8}{17}$ ③ $\frac{17}{40}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{8}{11}$

23. 그림과 같이 헬리콥터가 동해에서 조업하는 세 어선을 동시에 관찰하고 있다. 이 헬리콥터는 세 어선을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심에서 수직 위로 500 m 상공에 있고 각 어선 사이의 거리가 모두 600 m로 일정할 때, 헬리콥터에서 한 어선까지의 거리는? [4점]

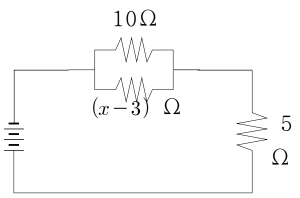


① $300\sqrt{3}\,m$ ② $550m$ ③ $100\sqrt{37}\,m$
④ $100\sqrt{41}\,m$ ⑤ $300\sqrt{5}\,m$

24. 그림과 같이 전기회로도에서 크기가 $R_1(\Omega)$, $R_2(\Omega)$인 두 저항을 연결하였을 때, 총 저항의 크기 $R(\Omega)$은 직렬연결에서는 $R=R_1+R_2$이 되고, 병렬연결에서는 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ 이 된다.



위의 사실을 이용하여 오른쪽 그림과 같은 전기회로도에서 구한 총 저항의 크기를 $R(\Omega)$이라 하자. 함수 $R=f(x)$의 정의역이 $\{x \mid 5 \leq x \leq 13\}$ 일 때 이 함수의 치역은? (단, Ω은 저항의 단위이다.) [4점]



① $\{R \mid 7 \leq R \leq 12\}$
② $\left\{R \,\middle|\, \frac{15}{2} \leq R \leq \frac{29}{3}\right\}$
③ $\left\{R \,\middle|\, \frac{20}{3} \leq R \leq 12\right\}$
④ $\left\{R \,\middle|\, \frac{22}{3} \leq R \leq 10\right\}$
⑤ $\left\{R \,\middle|\, \frac{20}{3} \leq R \leq 10\right\}$

25. 삼차다항식 $3x^3-6x^2-3x+a$를 $x+b$로 나눈 몫이 $3x^2-3$이고 나머지가 11일 때, 상수 a,b의 곱 ab의 값을 구하시오. [2점]

26. $3^n=31381059609$를 만족하는 양의 정수 n의 값을 구하시오. (단, $0.47<\log 3<0.48$) [4점]

27. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $P=ABA^{-1}$ 이라 할 때, 행렬 P^{20}의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, A^{-1}은 A의 역행렬) [3점]

28. 부등식 $n<\int_0^2 \sqrt{27+2\sin x}\,dx<n+1$을 만족하는 양의 정수 n을 구하시오. [4점]

29. 월드컵 조직위원회에서는 통역이 가능한 남녀 자원봉사자들을 A와 B 두 종류의 조로 편성하여 축구 경기장 주변의 각 안내소에 한 조씩을 배치하려고 한다. 한 조를 편성하는 데 필요한 남자와 여자의 수가 각각 오른쪽 표와 같고, 조직위원회에서 확보할 수 있는 통역이 가능한 남자 자원봉사자는 최대 330명이고, 여자 자원봉사자는 최대 385명이다. 이 경우에 조직위원회에서 편성할 수 있는 조의 개수의 최댓값을 구하시오. [4점]

조 \ 성별	남자	여자
A	4 명	3 명
B	3 명	5 명

30. 이차방정식 $x^2+2kx+6=0$의 두 근 α, β가

$$\frac{\alpha^{-1}-\beta^{-1}}{\alpha^{-2}-\beta^{-2}}=\frac{4}{25}$$

를 만족할 때, 상수 k의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. [2점]

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2002년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ①

주어진 조건에 의해서

$\log_a \sqrt{b} = \log_{9^x} \sqrt{3^y} = \log_{3^{2x}} 3^{\frac{1}{2}y} = \dfrac{y}{4x} \log_3 3 = \dfrac{y}{4x}$

2) ③

$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2001} = (-i)^{2001} = -i$

$d\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2001}\right) = d(-i) = \sqrt{(-i)(i)} = 1$

3) ④

집합 $X=U$ 일 때,

$\{a, b, c\} \triangle X = \{a, b, c\} \triangle \{a, b, c, d\}$

$= \varnothing \cup \{d\}$

$= \{d\}$

4) ④

곱셈정리에 의해서

$(1-x^{27}) = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{26})$

따라서,

$$\lim_{x\to1} \frac{1-x^{27}}{1-x} = \lim_{x\to1} \frac{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{26})}{1-x}$$
$$= \lim_{x\to1} (1+x+x^2+\cdots+x^{26})$$
$$= 27$$

5) ②

시그마의 성질을 이용하여 식을 정리하면

$$\sum_{k=1}^{100} (k-2)^2 - \sum_{k=1}^{101} 4 + 4\sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=2}^{101} (k-1)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{100} \{(k-2)^2 - 4 + 4k - (k-1)^2\} - 4 - 100^2$$
$$\left(\because \sum_{k=2}^{101} (k-1)^2 = \sum_{k=1}^{101} (k-1)^2\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{100} (2k-1) - 4 - 100^2$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} 100 \cdot 101 - 100 - 4 - 100^2$$
$$= -4$$

6) ②

삼각함수의 성질을 이용하여 각을 θ 로 표현하면

$f(\theta) = -\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$, $g(\theta) = -\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

θ 대신 $-\theta$ 를 대입한 경우에

$f(-\theta) = -\dfrac{\sin(-\theta)}{1-\sin(-\theta)} = \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$g(-\theta) = -\dfrac{\cos(-\theta)}{1-\sin(-\theta)} = -\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

따라서,

$$\text{준 식} = -\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta} \cdot -\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \cdot -\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$
$$= -\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$= -\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$
$$= -\tan^2\theta$$

7) ⑤

주어진 정의에 의하여

$x^3+x^2+1 = p(x-1)^3 + q(x-1)^2 + r(x-1) + s \cdots$ (1)

식 (1)이 x 에 관한 항등식이어야 하므로 좌변의 식을 $x-1$ 에 대한 내림차순으로 정리하면 미지수를 결정할 수 있다. 아래와 같은 방법으로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & 1 & 2 & 2 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\
 & & 1 & 3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 5 & \\
 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & &
\end{array}$$

$p=1,\ q=4,\ r=5,\ s=3$

따라서,

$p+q+r+s = 1+4+5+3 = 13$

8) ②

준 식을 정리하면

$x^2 + 4\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 11$

$x^2 + 4(\sqrt{3}+1) = 11$

$x^2 = 7 - 4\sqrt{3}$

$\therefore\ x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ $(\because\ x>0)$

같은 방법으로

$y = 2+\sqrt{3}$ $(\because\ y>0)$

그러므로

$x+y=4,\ xy=1$

따라서,

$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 64-12 = 52$

9) ④

ㄱ. $p \to q$: $x+y=0$ 이면 $x^2+y^2=0$ 이다.

(반례) $x=1,\ y=-1$ (거짓)

$q \to p$: $x^2+y^2=0$ 이기 위한 조건은 $x=y=0$ 이므로 $x+y=0$ 이다. (참)

따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. 준 부등식을 정리하면

$|x^2-1| \leqq 2|x-1|$

$\Leftrightarrow\ |x-1||x+1| \leqq 2|x-1|$

$\Leftrightarrow\ |x-1| \cdot (|x+1|-2) \leqq 0$

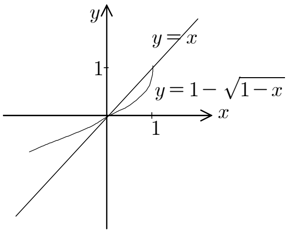
$p \to q$: $-1 \leqq x \leqq 1$ 이면 $|x-1|-2 \leqq 0$ 이므로 항상 $|x^2-1| \leqq 2|x-1|$ 이다. (참)

$q \to p$: $|x+1|-2 \leqq 0$ 의 해집합이 $-3 \leqq x \leqq 1$ 이므로 반례가 존재한다. (거짓)

따라서, 조건 p 는 조건 q 이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $p \to q$: 그림 참조 (참)

$q \to p$: $y<x$ 의 해집합은 직선의 아래쪽 모든 영역을 의미한다. (거짓)



10) ⑤

$g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 연속의 정의에 의해서

$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

$\lim_{x\to1}\frac{axf(x)-2a}{x-1} = \lim_{x\to1} a\frac{x\times f(x)-1\times f(1)}{x-1}$

$= a\{xf(x)\}'_{x=1}$

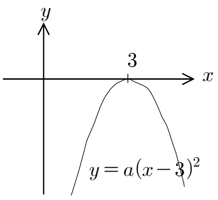
$= a\{f(1)+f'(1)\}$

$= 5a = 9$

$\therefore a = \frac{9}{5}$

11) ③

조건을 만족하는 이차함수는 그림과 같은 경우이다.



즉,

$y = a(x-3)^2, \quad a<0$

그러므로

$ax^2+bx+c = a(x-3)^2$

$= ax^2-6ax+9a$

$\therefore \ b=-6a,\ c=9a$

따라서, 주어진 부등식의 해집합은

$bx^2+cx+6a = -6ax^2+9ax+6a$

$= -3a(2x^2-3x-2)$

$= -3a(2x-1)(x-2) < 0$

$\therefore \ -\frac{1}{2} < x < 2$

조건을 만족하는 정수는 0, 1 로 2 개다.

12) ④

주어진 조건에 의하여

$f(0)=1,\ f\circ f(2b)=b$

$f(x)=ax+b$ 이므로

$f(0)=b=1$

$f\circ f(2b) = f\circ f(2) = f(2a+1) = 2a^2+a+1 = 1$

$\therefore \ a=-\frac{1}{2} \quad (\because \ a\neq 0)$

따라서, 구하고자 하는 식의 값은

$f(a^2-b^2) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+1 = \frac{11}{8}$

13) ③

중선 정리에 의해

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2 = 2\left(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2\right) \ \cdots \ (1)$

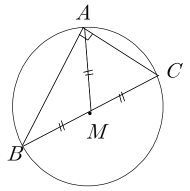
이 때,

$\overline{BM} = \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC} \ \cdots \ (2)$

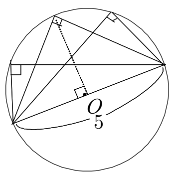
식 (2)를 식 (1)에 대입하여 정리하면

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2 = 2\left(\frac{1}{4}\overline{BC}^2+\frac{1}{4}\overline{BC}^2\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2}\overline{BC}^2\right)$



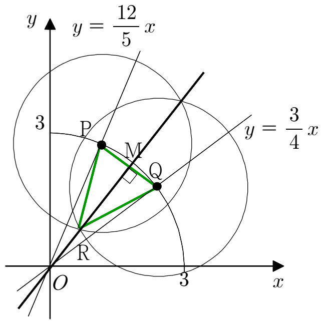
14) ③



빗변의 길이가 5 인 모든 직각 삼각형은 그림과 같이 지름이 5 인 원에 내접하는 삼각형이 된다. 따라서, 면적이 최대일 때는 높이(h)가 최대일 때 즉, 반지름의 길이와 같은 경우이다. 따라서, 둘레의 길이는

$\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}+5 = 5\sqrt{2}+5$

15) ①



그림에서 알 수 있듯이

$\overline{PR} = \overline{QR} = 2$

$\overline{PM} = \overline{QM}$

따라서, 직선 OM 은 직선 PQ 의 수직이등분선이다.

점 $P\left(\frac{15}{13}, \frac{36}{13}\right)$, 점 $Q\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$ 이므로

$\overline{PQ}$ 의 기울기$= \dfrac{\frac{9}{5}-\frac{36}{13}}{\frac{12}{5}-\frac{15}{13}} = -\frac{7}{9}$

따라서,

$y = \frac{9}{7}x$

16) ②

ㄱ. f, g 가 일대일 대응이므로 f^{-1}, g^{-1} 이 존재한다.

$f^{-1} \circ f \circ h_1 = f^{-1} \circ g$

$\therefore\ h_1 = f^{-1} \circ g$

$h_2 \circ f \circ f^{-1} = g \circ f^{-1}$

$\therefore\ h_2 = g \circ f^{-1}$ (참)

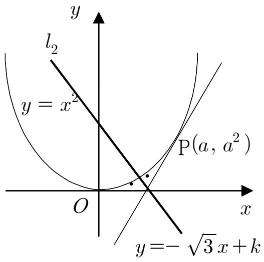
ㄴ. $h_1^{-1} = g^{-1} \circ f,\ h_2^{-1} = f \circ g^{-1}$

따라서, h_1 과 h_2 는 모두 일대일 대응이다. (참)

ㄷ. 일반적으로 $f^{-1} \circ g \neq g \circ f^{-1}$ 이다.

만약 $g^{-1} = f$ 또는 $f^{-1} = g$ 인 경우에는 $h_1 = h_2$ 이다.
(거짓)

17) ①



직선 $y = -\sqrt{3}x + k$ 와 x 축이 이루는 각은 120° 이므로 그림에서 ∠ · $=60^\circ$ 이다. 따라서, 점 P 에서의 접선과 x 축의 양의 방향이 이루는 각은 60° 이고, 접선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이다. 따라서, 접선의 방정식은

$y = \sqrt{3}x - k$

곡선 $y = x^2$ 과 접하므로

$x^2 = \sqrt{3}x - k$

$x^2 - \sqrt{3}x + k = 0$

의 판별식 $D = 3 - 4k = 0$ 이어야 한다. 따라서,

$k = \dfrac{3}{4}$

18) ④

증명하는 과정을 한 단계씩 따라가면

$-|a| \leqq a \leqq |a|$ 이고 $-|b| \leqq b \leqq |b|$ 이므로

$|a+b| \leqq \boxed{|a|+|b|} \cdots$ ㉠

두 수가 $a+b,\ -b$ 일 때 ㉠을 이용하면

$|a| \leqq |a+b| + \boxed{|b|}$

이므로

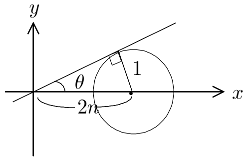
$|a| - \boxed{|b|} \leqq |a+b|$

이다. 같은 방법으로 하면 $\boxed{|b|} - |a| \leqq |a+b|$

$\therefore\ \boxed{||a|-|b||} \leqq |a+b| \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡에 의해 $\boxed{||a|-|b||} \leqq |a+b| \leqq \boxed{|a|+|b|}$ 가 성립한다.

19) ①



그림에서 접선의 기울기 a_n 은

$$a_n = \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$$

따라서,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k^2-1}}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

20) ②

집합 C 의 방정식을 정리하면

$f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\} = 0$ 이므로

$f(x) = 0$ 또는 $g(x) = 0$ 또는 $f(x)+g(x) = 0$ 이다.

$n(A) = 4,\ n(B) = 3$ 이고

$n(C)$ 는 $B \subset A$ 일 때 최솟값 4이다.

21) ③

원의 중심을 O 라 두면 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2 배이고,

$\angle P_0P_1P_2 = 1^o,\ \angle P_1P_2P_3 = 2^o,\ \angle P_2P_3P_4 = (2^2)^\circ,$

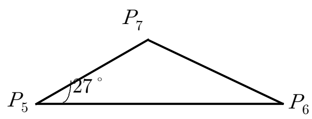
$\cdots, \angle P_{k-1}P_kP_{k+1} = (2^{k-1})^\circ$

$\angle P_5P_6P_7 = (2^{6-1}) = 32^\circ,\quad \angle P_6P_7P_8 = 64^\circ$ 이므로

호 P_6P_7의 중심각의 크기를 x° 라 두면 각 호의 중심각의 크기의 합은

$2^\circ + 4^\circ + 8^\circ + 16^\circ + 32^\circ + 64^\circ + x^\circ = 180^\circ$

$\therefore\ x^\circ = 54^\circ$ 이므로 호 P_6P_7의 원주각의 크기는 27° 이다.



그러므로 사인 법칙에서

$\dfrac{P_6P_7}{\sin 27^\circ} = 2 \times 1$ 이므로 $P_6P_7 = 2\sin 27^\circ = 2\cos 63^\circ$

22) ②

주어진 조건에 의하여 면접점수가 85 점 이상인 학생중에서 합격한 학생 수는

$0.8 \times 800 = 640$ (명)

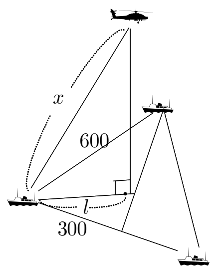
이고, 불합격한 학생 수는

$0.3 \times 2400 = 720$ (명)

이다. 따라서, 면접점수가 85 점 이상을 받았을 때 합격할 확률은

$$\frac{640}{640+720} = \frac{640}{1360} = \frac{8}{17}$$

23) ③



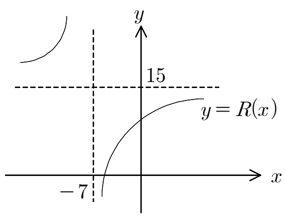
세 어선으로 이루어지는 삼각형이 정삼각형이므로 외심과 무게중심은 일치한다. 그러므로 외심에서 어선까지의 수면위에서의 거리 l 은

$$l=\frac{2}{3}\times 300\sqrt{3}=200\sqrt{3}$$

따라서, 헬리콥터에서 어선까지의 거리 x 는

$$x=\sqrt{(200\sqrt{3})^2+500^2}$$
$$=100\sqrt{37}$$

24) ⑤



주어진 전기회로의 총 저항 R 은

$$R(x)=\frac{10\cdot(x-3)}{10+(x-3)}+5$$
$$=15-\frac{100}{x+7}$$

$y=R(x)$ 라 하면 그림과 같이 주어진 정의역 $5\leqq x\leqq 13$ 에서 단조증가함수이다.

$$f(5)=15-\frac{100}{12}=\frac{20}{3}$$

$$f(13)=15-\frac{100}{20}=10$$

따라서, 치역은

$$\frac{20}{3}\leqq R(x)\leqq 10$$

25) -34

나머지 정리에 의해서

$$3x^3-6x^2-3x+a=(x+b)(3x^2-3)+11 \cdots (1)$$

식 (1)은 x 에 관한 항등식이므로

$x=1$ 일 때 : $3-6-3+a=11 \quad \therefore\ a=17$

이 결과를 이용하여 식 (1)을 정리하면

$$3x^3-6x^2-3x+6=3(x+b)(x+1)(x-1)$$
$$3(x+1)(x-1)(x-2)=3(x-b)(x+1)(x-1)$$
$$\therefore\ b=-2$$

따라서,

$$ab=17\times(-2)=-34$$

26) 22

3^n 이 11 자리 정수이므로 $\log 3^n$ 의 지표는 10 이다.

$$10<\log 3^n<11$$

$$\frac{10}{n}<\log 3<\frac{11}{n}$$

주어진 조건에서 $0.47<\log 3<0.48$ 이므로 다음 두 조건이 만족시켜야 한다. 즉,

$$0.47>\frac{10}{n}\ ,\ \frac{11}{n}>0.48$$

$$\therefore\ 21.2<n<22.9$$

따라서, 양의 정수 n 은 22 이다.

27) -18

$P^{20}=(ABA^{-1})(ABA^{-1})\cdots(ABA^{-1})=AB^{20}A^{-1} \cdots (1)$

케일리 헤밀턴 정리에 의하여

$$B^2-2B+E=O \quad \therefore\ B^2=2B-E$$
$$B^3=2B^2-B=2(2B-E)-B=3B-2E$$
$$B^4=3B^2-2B=3(2B-E)-2B=4B-3E$$
$$\vdots$$
$$B^{20}=20B-19E=\begin{pmatrix}20&20\\0&20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}19&0\\0&19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&20\\0&1\end{pmatrix} \cdots (2)$$

또한, $A^2-E=O$ 이므로 $A=A^{-1}$ 이다. 이 결과를 식 (1)에 대입하면

$$P^{20}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&20\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-20\\0&1\end{pmatrix}$$

따라서, 모든 성분의 합은

$$1-20+1=-18$$

28) 10

구간 $0\leqq x\leqq 2$ 에서 $0\leqq \sin x\leqq 1$ 이므로

$$\int_0^2\sqrt{27}\,dx<\int_0^2\sqrt{27+2\sin x}\,dx<\int_0^2\sqrt{29}\,dx$$

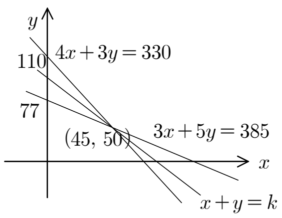
$$\left[\sqrt{27}\,x\right]_0^2<\int_0^2\sqrt{27+2\sin x}\,dx<\left[\sqrt{29}\,x\right]_0^2$$

$$\sqrt{108}<\int_0^2\sqrt{27+2\sin x}\,dx<\sqrt{116}$$

$$10<\sqrt{108}<\int_0^2\sqrt{27+2\sin x}\,dx<\sqrt{116}<11$$

$$\therefore\ n=10$$

29) 95



A 조를 x 개, B 조를 y 개 만든다고 하면 필요한 남녀의 인원 수는

$$4x+3y\leqq 330 \cdots (1)$$
$$3x+5y\leqq 385 \cdots (2)$$

식 (1)과 식 (2)의 영역을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$x+y=k$ 라 하면 k 의 값은 두 직선 $4x+3y=330$ 와 $3x+5y=385$ 의 교점에서 최대가 된다. 교점의 좌표는 $(45, 50)$ 이므로 최댓값은

$$x+y=45+50=95$$

이다.

30) -18.75

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2k,\ \alpha\beta=6$$

주어진 식을 두 근 α, β 의 합과 곱의 형태로 나타내면

$$\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}=\frac{\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}}{\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha\beta)^2}}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{3}{-2k}=\frac{4}{25}$$

따라서,

$$k=-\frac{75}{4}=-18.75$$