2002학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시

수 학 영 역

'가'형

성명	

수험번호							

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 실수 x, y에 대하여 a, b를 각각 $a=9^x$, $b=3^y$이라 할 때, $\log_a \sqrt{b}$ 를 x와 y로 나타내면? (단, $x \neq 0$) [2점]

① $\frac{y}{4x}$ ② $\frac{y}{3x}$ ③ $\frac{2y}{3x}$
④ $\frac{3y}{4x}$ ⑤ $\frac{2y}{x}$

2. 일차변환 f 는 점 $(2, 1)$을 점 $(3, 2)$로 옮기고,
합성변환 $f \circ f$ 는 점 $(2, 1)$을 점 $(1, -2)$로 옮긴다.
일차변환 f 에 의하여 점 $(-2, -4)$로 옮겨지는 점은? [3점]

① $(1, 0)$ ② $(-1, 0)$ ③ $(1, 1)$
④ $(-1, 1)$ ⑤ $(-1, -1)$

3. 전체집합을 $U=\{a, b, c, d\}$라 하고, U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$을

$$A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$$

로 정의할 때, $\{a, b, c\} \triangle X = Y$를 만족하는 집합 X, Y에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [3점]

① $X=\{a, b, c\}$이면 $Y=\varnothing$이다.
② $X=\{d\}$이면 $Y=U$이다.
③ $X=\{c\}$이면 $Y=\{a, b\}$이다.
④ $X=U$이면 $Y=\{a, b, c\}$이다.
⑤ $X=\{c, d\}$이면 $Y=\{a, b, d\}$이다.

4. $\lim_{x \to 1} \frac{1-x^{27}}{1-x}$ 의 값은? [2점]

① 0 ② 1 ③ 26
④ 27 ⑤ ∞

5. $\sum_{k=1}^{100}(k-2)^2-\sum_{k=1}^{101}4 + 4\sum_{k=1}^{100}k-\sum_{k=2}^{101}(k-1)^2$ 의 값은? [3점]

① -400 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 400

6. 삼각방정식 $6\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 6$ 의 모든 근의 합은? (단, $-\pi \leqq x \leqq \pi$) [3점]

① $-\frac{\pi}{3}$ ② 0 ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ π

7. 실수 a, b, c, d에 대하여 $[a, b, c, d]_{(x)}$를

$$[a, b, c, d]_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

로 정의하자. 예를 들면 $[2, 1, 3, 6]_{(x)} = 2x^3 + x^2 + 3x + 6$ 이다.
이 때, 등식 $[1, 1, 0, 1]_{(x)} = [p, q, r, s]_{(x-1)}$ 이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하도록 하는 상수 p, q, r, s의 합 $p+q+r+s$의 값은? [3점]

① -1 ② 3 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

8. $x^2 + 4\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 11$, $y^2 - 4\sqrt{4-2\sqrt{3}} = 11$을 만족하는 양의 실수 x, y에 대하여 $x^3 + y^3$의 값은? [4점]

① 48 ② 52 ③ $24\sqrt{3}$
④ $16+16\sqrt{3}$ ⑤ $64-6\sqrt{3}$

9. 실수 x, y에 대하여 <보기> 중에서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건인 것을 모두 고르면? [3점]

< 보기 >

ㄱ. $p: x+y=0$

$q: x^2+y^2=0$

ㄴ. $p: |x| \leqq 1$

$q: |x^2-1| \leqq 2|x-1|$

ㄷ. $p: 0<x<1$이고 $y<1-\sqrt{1-x}$

$q: y<x$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. $f(1)=2,\ f'(1)=3$을 만족하는 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{axf(x)-2a}{x-1} & (x \neq 1) \\ 9 & (x=1) \end{cases}$$

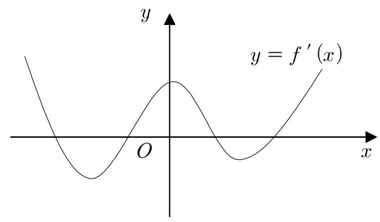
로 정의하자. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

11. 곡선 $x^3+y^3-9xy=0$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선이 y축과 만나는 점의 좌표가 $(0, a)$일 때, a 의 값은? [4점]

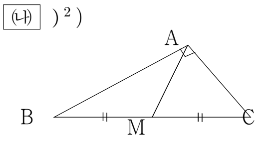
① 2 ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{12}{5}$ ④ $\frac{13}{5}$ ⑤ $\frac{14}{5}$

12. 다음 그림은 다항함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프이다. 함수 $f(x)$의 극대점, 극소점, 변곡점의 개수를 차례로 나열하면? [3점]



① 1, 2, 3 ② 2, 1, 3 ③ 2, 1, 2
④ 2, 2, 2 ⑤ 2, 2, 3

13. 다음은 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형ABC 에서 $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$ 을 증명한 것이다.

> [증명] 오른쪽 그림과 같이
> 변BC 의 중점을 M 이라 하면
> $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \boxed{(가)}(\overline{BM}^2 + (\boxed{(나)})^2)$
> 이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,
> $\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\ \overline{BC}$ 이므로
> $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \boxed{(가)}(\boxed{(라)}\ \overline{BC}^2)$
>
> 
>

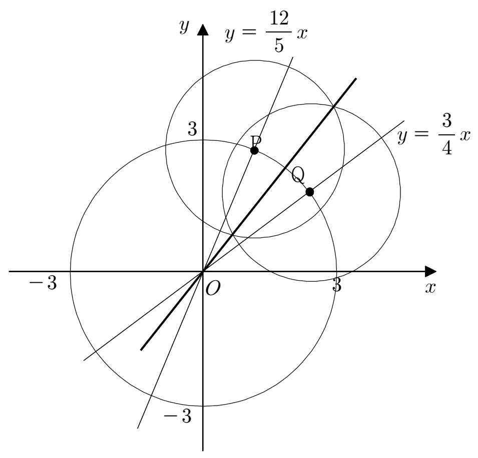
위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	3	$2\overline{AM}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
②	4	$2\overline{AM}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
③	2	$\overline{AM}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
④	2	$\overline{AM}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
⑤	$\frac{16}{5}$	$\overline{AM}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$

14. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대인 것의 둘레의 길이는? [3점]

① 12　② 15　③ $5+5\sqrt{2}$
④ $5+2\sqrt{5}$　⑤ $10+2\sqrt{2}$

15. 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원과 두 직선 $y=\frac{12}{5}x$, $y=\frac{3}{4}x$ 와의 제 1 사분면 위에서의 교점을 각각 P, Q 라 하자. 이 때, 점P 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원과 점Q 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 그렸을 때, 점P 와 점Q 를 중심으로 하는 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하면? [4점]



① $9x-7y=0$　② $7x-9y=0$　③ $7x-5y=0$
④ $5x-7y=0$　⑤ $4x-3y=0$

16. 곡선 $y=\ln x$와 직선 $x=e^2$, x축으로 둘러싸인 영역을 x축의 둘레로 270° 만큼 회전하여 생긴 회전체의 부피는? [4점]

① $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$ ② $\frac{3}{4}\pi(e^2-1)$ ③ $\frac{3}{2}\pi e^2$

④ $\frac{3}{4}\pi e^2$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi(e^2-1)$

17. 두 일차식 $f(t)$, $g(t)$를 각각

$$f(t)=t\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 u\,du$$

$$g(t)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 x\,dx+t\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 y\,dy$$

라 할 때, 방정식 $f(t)=g(t)$ 의 근은? [3점]

① $\frac{\pi-2}{\pi+2}$ ② $\frac{\pi+2}{\pi-2}$ ③ $\frac{\pi+3}{\pi-3}$

④ $\frac{\pi+2}{2\pi-4}$ ⑤ $\frac{\pi+4}{\pi-2}$

18. 다음은 임의의 실수 a, b에 대하여

$\boxed{(가)} \leqq |a+b| \leqq \boxed{(나)}$ 임을 증명한 것이다.

> [증명] $-|a| \leqq a \leqq |a|$ 이고 $-|b| \leqq b \leqq |b|$ 이므로
>
> $|a+b| \leqq \boxed{(나)}$ …㉠
>
> ㉠을 이용하면 $|a| \leqq |a+b|+\boxed{(다)}$ 이므로
>
> $|a|-\boxed{(다)} \leqq |a+b|$ 이다.
>
> 같은 방법으로 하면 $\boxed{(다)}-|a| \leqq |a+b|$
>
> $\therefore \boxed{(가)} \leqq |a+b|$ …㉡
>
> ㉠과 ㉡에 의해 $\boxed{(가)} \leqq |a+b| \leqq \boxed{(나)}$ 가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\|\|a\|-\|b\|\|$	$\|a\|-\|b\|$	$\|b\|$
②	$\|\|a\|-\|b\|\|$	$\|a\|+\|b\|$	$-\|b\|$
③	$\|a+b\|$	$\|a-b\|$	$-\|b\|$
④	$\|\|a\|-\|b\|\|$	$\|a\|+\|b\|$	$\|b\|$
⑤	$\|a-b\|$	$\|a+b\|$	$\|b\|$

19. 다음의 극한값을 구하면? [4점]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\frac{3^2}{n^3+3^3}+\dots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right)$$

① $2\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $\frac{1}{3}\ln 2$

④ $\frac{1}{2}\ln 2$ ⑤ $3\ln 2$

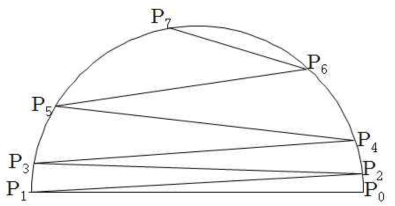
20. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 세 집합 A, B, C를

$$A = \{x \mid f(x) = 0\}$$
$$B = \{x \mid g(x) = 0\}$$
$$C = \{x \mid (f(x) + g(x))^3 = (f(x))^3 + (g(x))^3\}$$

라고 하자. $n(A) = 4$이고 $n(B) = 3$일 때, $n(C)$의 최솟값은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수) [4점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원에서 지름의 양 끝점을 P_0, P_1이라 하자. 이 때, $\angle P_0P_1P_2 = 1°$, $\angle P_1P_2P_3 = 2°$, $\cdots$, $\angle P_{k-1}P_kP_{k+1} = (2^{k-1})°$ 를 만족하는 원주 위의 점 P_2, P_3, $\cdots$, P_7에 대하여 선분 P_6P_7 의 길이는? [4점]

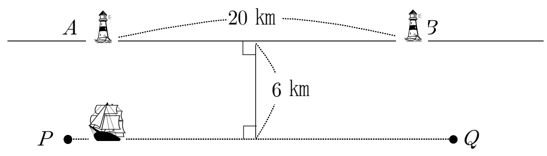


① $2\cos 32°$　② $2\sin 32°$　③ $2\cos 63°$　④ $2\cos 64°$　⑤ $2\sin 64°$

22. 어느 대학교에서는 2001학년도 신입생을 면접, 내신과 수능 성적으로 3200명의 지원자 중에서 800명을 선발하였다. 면접시험에서 85점 이상을 받은 학생은 합격자의 80%이고 불합격자의 30%이다. 이 때, 면접시험에서 85점 이상을 받은 학생이 합격할 확률은? [4점]

① $\frac{7}{17}$　② $\frac{8}{17}$　③ $\frac{17}{40}$　④ $\frac{7}{11}$　⑤ $\frac{8}{11}$

23. 그림과 같이 일직선으로 된 해안가에 있는 두 등대 A, B 사이의 거리는 20km 이다. 이 해안가로부터 6km 떨어진 해상에 두 지점 P, Q가 있다. 등대 A와 B로부터 P지점까지의 거리의 차와 등대 A와 B로부터 Q지점까지의 거리의 차가 모두 16km 이다. 어떤 배가 해안선과 평행하게 분속 0.5km 의 속력으로 P지점과 Q지점 사이를 통과하는 데 걸리는 시간은 몇 분인가? [4점]



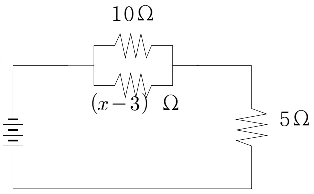
① $30\sqrt{2}$　② $32\sqrt{2}$　③ $34\sqrt{2}$　④ $28\sqrt{3}$　⑤ $32\sqrt{3}$

24. 그림과 같이 전기회로도에서 크기가 $R_1(\Omega)$, $R_2(\Omega)$인 두 저항을 연결하였을 때, 총 저항의 크기 $R(\Omega)$은 직렬연결에서는 $R=R_1+R_2$이 되고, 병렬연결에서는 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$이 된다.

[직렬연결] [병렬연결]

$R=R_1+R_2$ $\qquad$ $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$

위의 사실을 이용하여 오른쪽 그림과 같은 전기회로도에서 구한 총 저항의 크기를 $R(\Omega)$이라 하자. 함수 $R=f(x)$의 정의역이 $\{x \mid 5 \leqq x \leqq 13\}$일 때 이 함수의 치역은? (단, Ω은 저항의 단위이다.)



[4점]

① $\{R \mid 7 \leqq R \leqq 12\}$
② $\left\{R \,\middle|\, \dfrac{15}{2} \leqq R \leqq \dfrac{29}{3}\right\}$
③ $\left\{R \,\middle|\, \dfrac{20}{3} \leqq R \leqq 12\right\}$
④ $\left\{R \,\middle|\, \dfrac{22}{3} \leqq R \leqq 10\right\}$
⑤ $\left\{R \,\middle|\, \dfrac{20}{3} \leqq R \leqq 10\right\}$

주관식 문항(25～30)

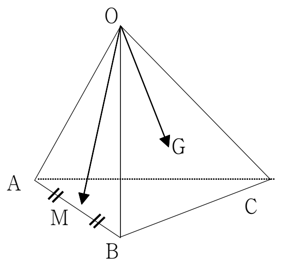
25. 삼차다항식 $3x^3-6x^2-3x+a$를 $x+b$로 나눈 몫이 $3x^2-3$이고 나머지가 11일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.

[2점]

26. $3^n=31381059609$를 만족하는 양의 정수 n의 값을 구하시오. (단, $0.47<\log 3<0.48$) [4점]

27. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $P=ABA^{-1}$이라 할 때, 행렬 P^{20}의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, A^{-1}은 A의 역행렬) [3점]

28. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M, △OBC의 무게중심을 G라 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$의 내적의 값을 구하시오. [3점]



29. 월드컵 조직위원회에서는 통역이 가능한 남녀 자원봉사자들을 A와 B 두 종류의 조로 편성하여 축구 경기장 주변의 각 안내소에 한 조씩을 배치하려고 한다. 한 조를 편성하는 데 필요한 남자와 자의 수가 각각 오른쪽 표와 같고, 조직위원회에서 확보할 수 있는 통역이 가능한 남자 자원봉사자는 최대 330명이고, 여자 자원봉사자는 최대 385명이다. 이 경우에 조직위원회에서 편성할 수 있는 조의 개수의 최댓값을 구하시오. [4점]

조 \ 성별	남자	여자
A	4 명	3 명
B	3 명	5 명

30. 이차방정식 $x^2+2kx+6=0$ 의 두 근 α, β 가

$$\frac{\alpha^{-1}-\beta^{-1}}{\alpha^{-2}-\beta^{-2}}=\frac{4}{25}$$

를 만족할 때, 상수 k의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. [2점]

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2002년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ①

$a=9^x \Leftrightarrow x=\log_9 a=\frac{1}{2}log_3 a$, $b=3^y \Leftrightarrow y=\log_3 b$

$\therefore \log_a \sqrt{b}=\dfrac{\frac{1}{2}log_3 b}{\log_3 a}=\dfrac{\frac{1}{2}y}{2x}=\dfrac{y}{4x}$

2) ③

$f((2,1))=(3,2)$,

$(f\circ f)((2,1))=f(f((2,1)))=f((3,2))=(1,-2)$

일차변환 f 의 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 두면

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$

그러므로

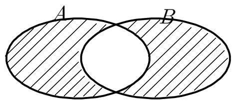
$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) ④

집합 $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$ 은 대칭 차집합이므로

즉, A 와 B 의 합집합에서 교집합을 뺀 집합이다.



④에서

$X=U$ 이면 $\{a,\ b,\ c\}\triangle\{a,\ b,\ c,\ d\}=\{d\}$ 이다.

4) ④

로피탈의 정리사용

$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{27}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{27}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{27x^{26}}{1}=27$

미분계수이용

$f(x)=x^{27}$ 이라 두면

준식) $=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)=27$

5) ②

준식 $=\sum_{k=1}^{100}(k-2)^2-\left(\sum_{k=1}^{100}4+4\right)+\sum_{k=1}^{100}4k-\left(\sum_{k=1}^{100}(k-1)^2+100^2\right)$

$=\sum_{k=1}^{100}\{(k-2)^2-4+4k-(k-1)^2\}-4-100^2$

$=\sum_{k=1}^{100}(2k-1)-4-100^2$

$=100\times 101-100-4-100^2=-4$

6) ④

반각공식과 배각공식을 이용하면 주어진 방정식은

$6\times\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin 2x+7\times\frac{1+\cos 2x}{2}=6$

$\sqrt{3}\,sin2x+\cos 2x=-1 \Leftarrow$ 합성하면

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$ 에서

$\theta=2x+\frac{\pi}{6}$ 라 두면

$-2\pi+\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq 2\pi+\frac{\pi}{6}$ 이므로 (그래프를 이용하면)

$\theta=-\pi+\frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6},\ \pi+\frac{\pi}{6},\ 2\pi-\frac{\pi}{6}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ 모든합은 $\frac{2\pi}{3}$

7) ⑤

정의에서 $[a,\ b,\ c,\ d]_{(x)}=ax^3+bx^2+cx+d$ 이므로

$[1,\ 1,\ 0,\ 1]_{(x)}=[p,\ q,\ r,\ s]_{(x-1)}$

$x^3+x^2+1=p(x-1)^3+q(x-1)^2+r(x-1)+s$

연 조립제법을 이용하면

```
1 | 1   1   0   1
  |     1   2   2
  -----------------
1 | 1   2   2  (3) ⇐s
  |     1   3
  -------------
1 | 1   3  (5) ⇐r
  |     1
  ---------
   (1) (4) ⇐ q
    ↳ p
```

따라서, $p+q+r+s=1+4+5+3=13$

8) ②

$x^2=11-4\sqrt{4+2\sqrt{3}}=11-4(\sqrt{3}+1)=7-2\sqrt{12}$

$\therefore\ x=\sqrt{7-2\sqrt{12}}=2-\sqrt{3}$

$y^2=11+4\sqrt{4-2\sqrt{3}}=11+4(\sqrt{3}-1)=7+2\sqrt{12}$

$\therefore\ y=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=2+\sqrt{3}$

$x+y=4,\ xy=1$ 이므로

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=52$

9) ④

ㄱ. $x+y=0 \quad \Leftarrow \quad x^2+y^2=0$ (필요)

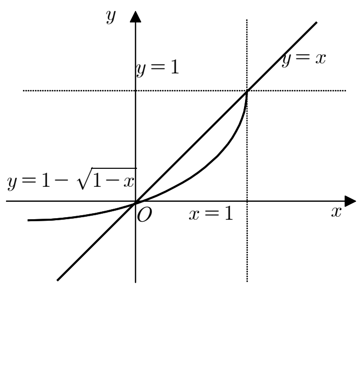
ㄴ. p : $|x|\leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1\leqq x\leqq 1$

q : $|x^2-1|\leqq 2|x-1| \Leftrightarrow |x-1||x+1|\leqq 2|x-1|$

$x=1$ 일 때 성립 또는 $x\neq 1$ 일 때는

$|x+1|\leqq 2 \Leftrightarrow -3\leqq x\leqq 1$ 이다.

$\therefore\ -3\leqq x\leqq 1 \qquad \therefore\ p \ \Rightarrow\ q$ (충분)



ㄷ. 위 그래프에서 $0<x<1$ 에서 $y=x$ 의 그래프가 $y=1-\sqrt{1-x}$ 의 그래프보다 위에 존재하므로

$\therefore\ p \Rightarrow q$ (충분)

10) ⑤

$g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 연속의 정의에 의해서

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{axf(x)-2a}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}a\dfrac{x\times f(x)-1\times f(1)}{x-1}$

$=a\{xf(x)\}'_{x=1}$

$=a\{f(1)+f'(1)\}$

$=5a=9$

$\therefore a=\dfrac{9}{5}$

11) ③

음함수 미분법을 이용하면

$3x^2+3y^2\times\dfrac{dy}{dx}-9\left(y+x\times\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

$(3y^2-9x)\times\dfrac{dy}{dx}=9y-3x^2$

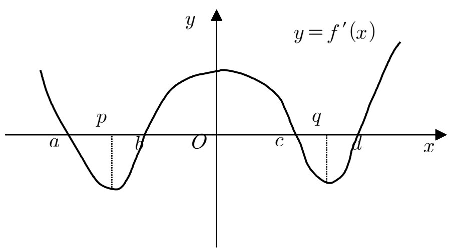
$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9y-3x^2}{3y^2-9x}$

그러므로 $(2,\ 4)$ 에서의 접선의 기울기 m 은

$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{\left(\substack{x=2\\y=4}\right)}=\dfrac{4}{5}$ 접선의 방정식은

$y-4=\dfrac{4}{5}(x-2)$ 그러므로 y 축 절편은 $a=\dfrac{12}{5}$

12) ⑤



x	$\cdots$	a	$\cdots$	p	$\cdots$	b	$\cdots$	O	$\cdots$	c	$\cdots$	q	$\cdots$	d	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	변곡	↘	극소	↗	변곡	↗	극대	↘	변곡	↘	극소	↗

13) ③

중선의 정리에 의해서

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$ …… ①이고,

이 때, $\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$ 이고, $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$ …… ②이므로

($\therefore$ M은 직각삼각형 $\triangle ABC$의 외접원의 중심)

②식을 ①식에 대입하면

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=2\left(\dfrac{1}{2}\overline{BC}^2\right)=\overline{BC}^2$ 이다.

14) ③

직각삼각형의 가로의 길이를a , 세로의 길이를b 라 두면

$a^2+b^2=25$ 이고, 넓이는$S=\dfrac{1}{2}ab$ 이므로 산술기하평균에서

$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때성립)

$\therefore\ ab\leq\dfrac{25}{2}$ $\therefore\ ab$ 의 최대값은 $\dfrac{25}{2}$ 이다.

등호가 성립하려면, $a=b$ 이므로

$a^2=\dfrac{25}{2}$ $\therefore\ a=b=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ 일 때 넓이는 최대이다.

이 때, 삼각형의 둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

15) ①

원 $x^2+y^2=9$ 에 대하여

ⅰ) $y=\dfrac{12}{5}x$ 와의 1사분면위의 교점을 구하면 $P\left(\dfrac{15}{13},\ \dfrac{36}{13}\right)$

ⅱ) $y=\dfrac{3}{4}x$ 와의 1사분면위의 교점을 구하면 $Q\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

구하는 직선은 직선 PQ 와 수직이고 원점을 지나므로

직선의 PQ 의 기울기가 $-\dfrac{7}{9}$ 이므로

$\therefore\ y=\dfrac{9}{7}x$

16) ⑤

주어진 조건의 영역을 x 축의 둘레로 360° 만큼 회전하여 생긴 회전체의 부피를 구하면

$V_x=\pi\int_1^{e^2}y^2dx=\pi\int_1^{e^2}\ln^2x\,dx$

$=\pi\left\{\left[x\ln^2x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\ (2\ln x\times\dfrac{1}{x})\,dx\right\}$

$=\pi\left\{4e^2-2\int_1^{e^2}\ln x\,dx\right\}$

$=\pi\left\{4e^2-2\left(\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\times\dfrac{1}{x}\,dx\right)\right\}$

$=\pi\{4e^2-2(2e^2-(e^2-1)\ )\}$

$=2(e^2-1)\pi$

$\therefore$ 구하는 부피는 $V=\dfrac{3}{4}V_x=\dfrac{3}{2}(e^2-1)\pi$

17) ②

$f(t)=g(t)$ 를 정리하면

$t\left\{\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2y\,dy\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2u\,du$

$t\left\{\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\,dx\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\,dx$

$t\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\,dx\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\,dx$

$t\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cos2x}{2}\,dx\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cos2x}{2}\,dx$

$t\left[x-\dfrac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left[x+\dfrac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$t\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \quad t=\dfrac{\pi+2}{\pi-2}$

18) ④

$-|a|\leqq a\leqq |a|,\ -|b|\leqq b\leqq |b|$ 에서

$-|a|-|b|\leqq a+b\leqq |a|+|b| \qquad \therefore\ |a+b|\leqq |a|+|b|\cdots$ ㉠

㉠ 을 이용하면 $|a|\leqq |a+b|+|b|$ 이므로

$|a|-|b|\leqq |a+b|$ 이다.

같은 방법으로 하면 $|b|-|a|\leqq |a+b|$

$\therefore \quad ||a|-|b||\leqq |a+b| \cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡ 에 의해 $||a|-|b||\leqq |a+b|\leqq |a|+|b|$ 가 성립한다.

19) ③

$$\text{준식)}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^3}+\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^3}+\frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^3}+\cdots+\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^3}\right\}\times\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\times\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln|1+x^3|\right]_0^1=\frac{1}{3}ln2$$

20) ②

집합 C의 방정식을 정리하면

$f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\}=0$ 이므로

$f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$ 또는 $f(x)+g(x)=0$ 이다.

$n(A)=4,\ n(B)=3$ 이고

$n(C)$ 는 $B\subset A$ 일 때 최솟값 4이다.

21) ③

원의 중심을 O 라 두면 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2 배이고,

$\angle P_0P_1P_2=1^o,\ \angle P_1P_2P_3=2^o,\ \angle P_2P_3P_4=(2^2)^\circ,$

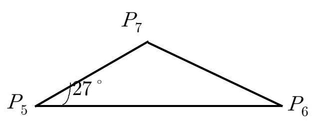
$\cdots, \angle P_{k-1}P_kP_{k+1}=(2^{k-1})^\circ$

$\angle P_5P_6P_7=(2^{6-1})=32^\circ,\quad \angle P_6P_7P_8=64^\circ$ 이므로

호 P_6P_7의 중심각의 크기를 x° 라 두면 각 호의 중심각의 크기의 합은

$2^\circ+4^\circ+8^\circ+16^\circ+32^\circ+64^\circ+x^\circ=180^\circ$

$\therefore\ x^\circ=54^\circ$ 이므로 호 P_6P_7의 원주각의 크기는 27° 이다.



그러므로 사인 법칙에서

$\dfrac{P_6P_7}{\sin 27^\circ}=2\times1$ 이므로 $P_6P_7=2\sin27^\circ=2\cos63^\circ$

22) ②

합격자중 면접시험에서 85점 이상을 받은 학생은 합격자의 80%이므로

학생의 수는 $800\times0.8=640$ 명이고,

불합격자중 면접시험에서 85점 이상을 받은 학생은 불합격자의 30%이므로

학생의 수는 $2400\times0.3=720$ 명이다. 그러므로 면접시험에서 85점 이상을 받은 학생이 합격할 확률은

$P=\dfrac{640}{640+720}=\dfrac{8}{17}$

23) ②

좌표평면에서 점 $A(-10,\ 0),\ B(10,\ 0)$ 을 초점으로 하고 주축의 길이가 16인 쌍곡선을 생각하면 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 라 두면

주축의 길이 : $2a=16 \quad \therefore\ a=8$

초점 : $a^2+b^2=k^2 \quad 64+b^2=100 \ \therefore\ b=6$

그러므로 쌍곡선의 식은 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 와 $y=-6$ 과의 교점의 x 좌표를

구하면 $x=\pm8\sqrt{2}$ 이므로 점 P, Q 간의 거리는 $16\sqrt{2}$

그러므로 걸리는 시간은

$\dfrac{16\sqrt{2}}{0.5}=32\sqrt{2}$ (분)

24) ⑤

병렬회로에 걸리는 저항은 R' 라 두면

$\dfrac{1}{R'}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{x+7}{10(x-3)}$

$R'=\dfrac{10(x-3)}{x+7}$ 이므로

$R=f(x)=\dfrac{10(x-3)}{x+7}+5=\dfrac{-100}{x+7}+15\ (5\leqq x\leqq 13)$

그러므로 치역은 $\left\{R \mid \dfrac{20}{3}\leqq R\leqq 10\right\}$

25) -34

$3x^3-6x^2-3x+a=(x+b)(3x^2-3)+11=3x^3+3bx^2-3x-3b+11$

$\therefore\quad 3b=-6 \quad a=-3b+11$

$\therefore\ a=17,\ b=-2$ 이므로

$ab=-34$

26) 22

$3^n=31381059609$ (11자리정수) 이므로 지표의 성질에서

$10<\log3^n<11 \Leftrightarrow \dfrac{10}{\log3}<n<\dfrac{11}{\log3}$

$\therefore\ 21.\cdots<n<22.\cdots$

$\therefore\ n=22$

27) -18

$P^{20}=(ABA^{-1})(ABA^{-1})\cdots(ABA^{-1})=AB^{20}A^{-1}\ \cdots$ (1)

케일리 헤밀턴 정리에 의하여

$B^2-2B+E=O \qquad \therefore\ B^2=2B-E$

$B^3=2B^2-B=2(2B-E)-B=3B-2E$

$B^4=3B^2-2B=3(2B-E)-2B=4B-3E$

$\vdots$

$B^{20}=20B-19E=\begin{pmatrix}20&20\\0&20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}19&0\\0&19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&20\\0&1\end{pmatrix}\ \cdots$ (2)

또한, $A^2-E=O$ 이므로 $A=A^{-1}$ 이다. 이 결과를 식 (1)에 대입하면

$P^{20}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&20\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-20\\0&1\end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은

$1-20+1=-18$

28) 15

점 A를 $(0,0,0)$, 점 B를 $(6,0,0)$, 점 C를 $(3,3\sqrt{3},0)$,

점 O를 $(3,\ \sqrt{3},2\sqrt{6})$라고 하면

점 M과 점 G의 좌표는 각각 $(3, 0, 0)$, $\left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$이고

$\overrightarrow{OM}=(0, -\sqrt{3}, -2\sqrt{6})$, $\overrightarrow{OG}=(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{6}}{3})$이다.

$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OG}=15$

29) 95

A, B조를 각각 x , y개 편성한다고 하자.

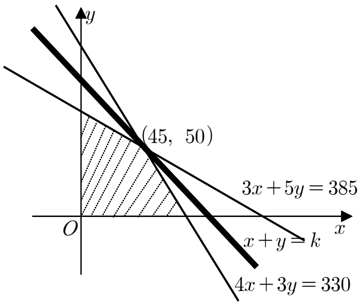
$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $4x+3y \leqq 330$, $3x+5y \leqq 385$ 이다.

i) 영역을 도시하면 빗금친 부분이고

ii) $x+y=k$ 라 두면

$y=-x+k$ (직선)이 점 $(45, 50)$ 을 지날 때이다.

$\therefore$ $k=95$ 이다.



30) -18.75

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=6$ 이고,

$$\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}=\frac{4}{25} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{6}{-2k}=\frac{4}{25}$$

$\therefore$ $k=-18.75$