2025학년도 10월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	③	**2**	①	**3**	④	**4**	⑤	**5**	①
6	②	**7**	⑤	**8**	①	**9**	③	**10**	④
11	②	**12**	③	**13**	②	**14**	⑤	**15**	③
16	④	**17**	①	**18**	⑤	**19**	②	**20**	③
21	③	**22**	3	**23**	20	**24**	7	**25**	13
26	9	**27**	12	**28**	5	**29**	28	**30**	50

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$\left(3^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1}=3^{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3^{2-1}=3$

2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{3h}=\dfrac{1}{3}f'(1)=2$에서 $f'(1)=6$

3. [출제의도] 등비수열 이해하기

4는 a와 b의 등비중항이므로 $a\times b=4^2=16$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=2+3=5$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$에서

$2\sin\theta=\sqrt{5}\cos\theta$

$4\sin^2\theta=5\cos^2\theta$

$4(1-\cos^2\theta)=5\cos^2\theta$

$\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$에서 연속이다.

$f(a)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}(x^2-3x+6)=a^2-3a+6$,

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x-2a)^2=a^2$

이므로 $a^2-3a+6=a^2$에서 $a=2$

7. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{5}(k^2+2k-4)-\sum\limits_{k=1}^{5}(2k+5)$

$=\sum\limits_{k=1}^{5}(k^2-9)$

$=\sum\limits_{k=1}^{5}k^2-\sum\limits_{k=1}^{5}9=\dfrac{5\times 6\times 11}{6}-45=10$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_3 a=2\log_a\sqrt{3}$에서

$\log_3 a=2\times\dfrac{1}{2}\log_a 3$

$\log_3 a=\dfrac{1}{\log_3 a}$

$(\log_3 a)^2=1$

$\log_3 a=1$ 또는 $\log_3 a=-1$

$a=3$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은 $3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$

9. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$3\tan(\pi+\theta)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$에서

$3\tan\theta=2\cos\theta$

$\dfrac{3\sin\theta}{\cos\theta}=2\cos\theta$

$3\sin\theta=2\cos^2\theta$

$3\sin\theta=2-2\sin^2\theta$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)=0$

$-1\le\sin\theta\le 1$이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

10. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)f(x)}{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{x+1}{3x+1}\times(x-1)f(x)\right\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x}}\times(x-1)f(x)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\times 12=4$

11. [출제의도] 로그함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

x^2-x, x는 로그의 진수이므로

$x^2-x>0$, $x>0$에서 $x>1$ … ㉠

부등식 $\log_2(x^2-x)<1-\log_{\frac{1}{2}}x$에서

$\log_2(x^2-x)<\log_2 2+\log_2 x$

$\log_2(x^2-x)<\log_2 2x$

밑 2가 1보다 크므로

$x^2-x<2x$, $x(x-3)<0$에서 $0<x<3$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 모든 x의 값의 범위는

$1<x<3$

따라서 $\alpha+\beta=1+3=4$

12. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$x^2-3x=tx$에서

$x(x-t-3)=0$

$x=0$ 또는 $x=t+3$

점 P는 원점 O가 아니므로

점 P의 좌표는 $(t+3,\ t^2+3t)$

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(t+3)^2+t^2(t+3)^2}=(t+3)\sqrt{t^2+1}$

$\overline{\mathrm{OH}}=t+3$

따라서

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}}}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{(t+3)\sqrt{t^2+1}-(t+3)}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{(t+3)\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{t^2\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{(t+3)\{(t^2+1)-1\}}{t^2\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}+1}=\dfrac{3}{2}$

13. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

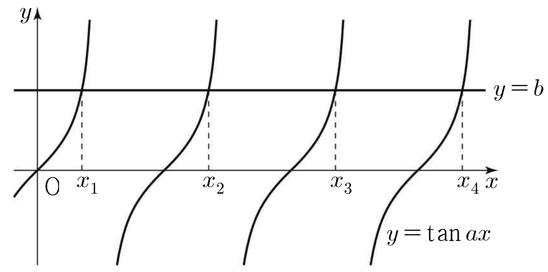
함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\dfrac{\pi}{|a|}$이고

$x_4-x_2=6\pi$이므로 $2\times\dfrac{\pi}{a}=6\pi$, $a=\dfrac{1}{3}$

$x_1=\pi$이므로 $\tan a\pi=b$이고,

$b=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서 $a\times b=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



14. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 문제해결하기

$a_1=S_1=1$

$n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}=-\dfrac{1}{n(n-1)}$

따라서

$a_1+\sum\limits_{k=2}^{7}\dfrac{1}{(k-1)\times a_k}=1+\sum\limits_{k=2}^{7}\dfrac{-k(k-1)}{k-1}$

$=1-\sum\limits_{k=2}^{7}k$

$=1-\left(\sum\limits_{k=1}^{7}k-1\right)$

$=2-\dfrac{7\times 8}{2}=-26$

15. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

(i) $1<n<6$일 때

$n-12<0$이므로

n이 짝수이면 $f(n)=0$, n이 홀수이면 $f(n)=1$

또한

$2n-12<0$이고 $2n$은 짝수이므로 $f(2n)=0$

그러므로 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 자연수 n의 값은 3, 5

(ii) $n=6$일 때

$n-12<0$이고 6은 짝수이므로 $f(n)=0$

$2n-12=0$이므로 $f(2n)=1$

그러므로 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시킨다.

(iii) $n>6$일 때

$2n-12>0$이고 $2n$은 짝수이므로 $f(2n)=2$

$f(n)\ge 0$이므로 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 n의 값의 합은 $3+5+6=14$

16. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 추론하기

$f(1)=0$에서 $f(x)=(x-1)(x-a)$ (a는 실수)

(i) $a=1$일 때

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+3)\times g(x)}{\{f(x)\}^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)^2g(x)}{(x-1)^4}$

사차다항식 $(x+2)^2g(x)$는 $(x-1)^5$을 인수로 가질 수 없으므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+3)\times g(x)}{\{f(x)\}^2}=0$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a\ne 1$일 때

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+3)\times g(x)}{\{f(x)\}^2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x+3-a)g(x)}{(x-1)^2(x-a)^2}=0$

이므로 사차다항식 $(x+2)(x+3-a)g(x)$는

$(x-1)^3$을 인수로 갖는다.

그러므로 $(x+3-a)g(x)=(x-1)^3$이고,

$a=4,\ g(x)=(x-1)^2$

(i), (ii)에 의하여

$f(x)=(x-1)(x-4),\ g(x)=(x-1)^2$

따라서 $f(5)+g(5)=4+16=20$

17. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

$a_4\times a_5=(a_1-6)(a_1-8)\le 0$에서 $6\le a_1\le 8$이고

a_1이 자연수이므로

a_1의 값은 6, 7, 8 중 하나이다. ⋯ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가

-2이므로 2 이상의 자연수 k에 대하여 $a_k<a_1$이고

a_k는 정수이다.

(i) $a_k\ge 0$일 때

$|a_1-a_k|=4|a_k|$에서

$a_1-a_k=4a_k,\ a_1=5a_k$

이고 a_k는 정수이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_k<0$일 때

$|a_1-a_k|=4|a_k|$에서

$a_1-a_k=-4a_k,\ a_1=-3a_k$

이고 a_k가 정수이므로 ㉠에서 $a_1=6,\ a_k=-2$

$a_k=6+(k-1)\times(-2)=-2$에서 $k=5$

(i), (ii)에 의하여 $a_1+k=6+5=11$

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

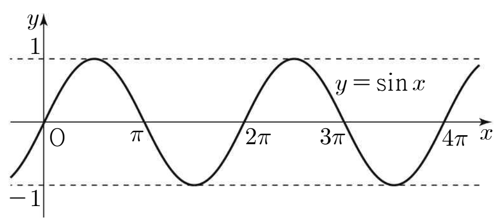
닫힌구간 $[0,\pi]$에서 함수 $f(x)=\sin(x+a)$의

최댓값, 최솟값은 각각

닫힌구간 $[a,a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의

최댓값, 최솟값과 같다.

함수 $y=\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $0<a\le\dfrac{\pi}{2}$일 때

$M=1$에서 $2|M|=2$이고

$m=\sin(a+\pi)=-\sin a$에서 $|m|\le 1$이므로

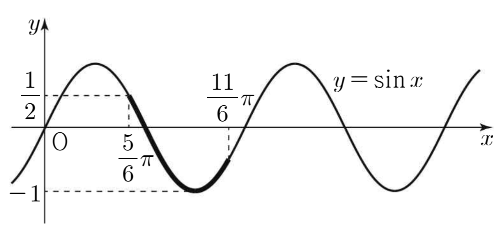
$2|M|=|m|$을 만족시키지 않는다.

(ii) $\dfrac{\pi}{2}<a\le\pi$일 때

$M=\sin a,\ m=-1$이고

$2|M|=|m|$이므로

$\sin a=\dfrac{1}{2},\ a=\dfrac{5}{6}\pi$

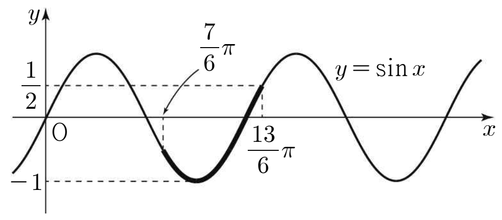


(iii) $\pi<a\le\dfrac{3}{2}\pi$일 때

$M=\sin(a+\pi)=-\sin a,\ m=-1$이고

$2|M|=|m|$이므로

$\sin a=-\dfrac{1}{2},\ a=\dfrac{7}{6}\pi$



(iv) $\dfrac{3}{2}\pi<a\le 2\pi$일 때

$M=1$에서 $2|M|=2$이고

$m=\sin a$에서 $|m|\le 1$이므로

$2|M|=|m|$을 만족시키지 않는다.

(v) $2\pi<a\le\dfrac{5}{2}\pi$일 때

$M=1$에서 $2|M|=2$이고

$m=\sin(a+\pi)=-\sin a$에서 $|m|\le 1$이므로

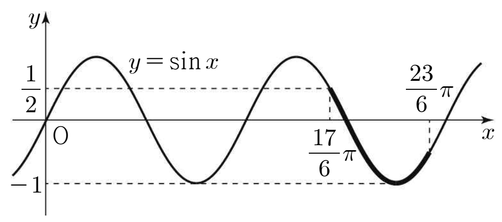
$2|M|=|m|$을 만족시키지 않는다.

(vi) $\dfrac{5}{2}\pi<a\le 3\pi$일 때

$M=\sin a,\ m=-1$이고

$2|M|=|m|$이므로

$\sin a=\dfrac{1}{2},\ a=\dfrac{17}{6}\pi$



(i) ~ (vi)에 의하여 구하는 모든 양수 a의 값의

합은 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{7}{6}\pi+\dfrac{17}{6}\pi=\dfrac{29}{6}\pi$

19. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=2^{x-1}+1$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로

1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이다.

그러므로 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A, B를 x축의

방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한

점을 각각 A′, B′이라 하면 두 점 A′, B′은 곡선

$y=2^{x-1}+1$ 위에 있다.

또한 두 직선 AA′, BB′의 기울기가 모두 1이므로

두 점 A′, B′은 모두 직선 l 위에 있다.

그러므로 두 점 A′, B′은 각각 점 C, 점 D와

일치하고, $\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

점 B가 선분 AD를 3 : 1로 내분하므로

$\overline{AB}:\overline{BD}=3:1$

$\overline{AB}=3\overline{BD}=3\sqrt{2}$

그러므로 점 B의 좌표를 $(k,2^k)$이라 하면

점 A의 좌표는 $(k-3,2^k-3)$이다.

점 A는 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

$2^{k-3}=2^k-3,\ 2^k=\dfrac{24}{7}$에서 $k=\log_2\dfrac{24}{7}$

따라서 점 B의 x좌표는 $\log_2\dfrac{24}{7}$

20. [출제의도] 등비수열을 이용하여 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

조건 (가)에서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n>a_1$이므로

$a_1>0,\ r>1$ 또는 $a_1<0,\ -1<r<1$ ⋯ ㉠

또한 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=(a_4+a_5-1)\times a_{n-1}$

이므로

$a_4+a_5-1=r$

$a_1r^3+a_1r^4-1=r$

$a_1r^3(1+r)=1+r$

㉠에서 $r\ne -1$이므로 $a_1r^3=1,\ r^3=\dfrac{1}{a_1}$

조건 (나)에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}a_n=\dfrac{6}{a_1-a_2}$이므로

$\dfrac{a_1(1-r^3)}{1-r}=\dfrac{6}{a_1(1-r)}$

$a_1^2\left(1-\dfrac{1}{a_1}\right)=6$

$a_1^2-a_1-6=(a_1-3)(a_1+2)=0$

$a_1=3$ 또는 $a_1=-2$

$a_1=3$이면 $r^3=\dfrac{1}{3}$이므로 $r<1$이 되어 ㉠을

만족시키지 않는다.

$a_1=-2$이면 $r^3=-\dfrac{1}{2}$이므로 $-1<r<1$이 되어

㉠을 만족시킨다.

따라서

$a_{10}=a_1r^9=a_1(r^3)^3=-2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기

$f(x)f(x-k)=0$이면

$f(x)=0$ 또는 $f(x-k)=0$이므로

x에 대한 방정식 $f(x)f(x-k)=0$의 서로 다른

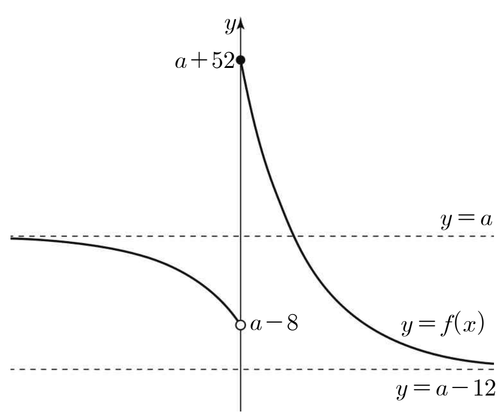
실근의 개수는

함수 $y=f(x)$의 그래프 또는 함수 $y=f(x-k)$의

그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수와

같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나는

서로 다른 점의 개수는

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는

서로 다른 점의 개수와 같고, 그 개수는

$a<-52$ 또는 $a\ge 12$일 때 0,

$-52\le a\le 0$ 또는 $8\le a<12$일 때 1,

$0<a<8$일 때 2이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프 또는 함수 $y=f(x-k)$의

그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수는

$a\le 0$ 또는 $a\ge 8$일 때 2 이하이고,

$0<a<8$일 때 4 이하이므로

조건을 만족시키려면 $0<a<8$이어야 한다. … ㉠

$0<a<8$일 때,

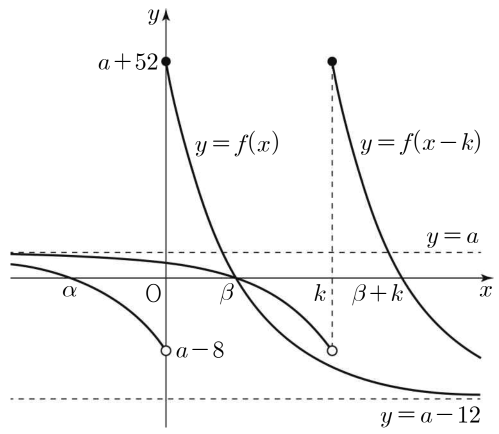
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha<0<\beta$이고,

함수 $y=f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 $\alpha+k$, $\beta+k$이다.

이때

함수 $y=f(x)$의 그래프 또는 함수 $y=f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이려면 $\beta=\alpha+k$이어야 한다.

$0<a<8$이고 $\beta=\alpha+k$일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-k)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(\alpha)=0$이므로

$-2^{\alpha+3}+a=0$, $2^{\alpha+3}=a$에서 $\alpha=\log_2 a-3$

$f(\beta)=0$이므로

$2^{-\beta+6}+a-12=0$, $2^{-\beta+6}=12-a$에서

$\beta=6-\log_2(12-a)$

k는 4 이하의 양수이므로

$$\begin{aligned}k&=\beta-\alpha\\&=6-\log_2(12-a)-\log_2 a+3\\&=9-\log_2(12a-a^2)\le 4\end{aligned}$$

$\log_2(12a-a^2)\ge 5$

$12a-a^2\ge 32$

$a^2-12a+32=(a-4)(a-8)\le 0$

㉠에서 $0<a<8$이므로 $4\le a<8$

따라서 조건을 만족시키도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은 $4+5+6+7=22$

22. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 54-\log_3 2=\log_3 27=3$

23. [출제의도] 호도법 이해하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r이라 하자.

부채꼴의 호의 길이가 4π이므로

$4\pi=r\times\frac{2}{5}\pi$에서 $r=10$이고,

부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 10^2\times\frac{2}{5}\pi=20\pi$

따라서 $a=20$

24. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기

두 함수 $y=\log(x-2)$, $y=2^x+5$의 그래프의 점근선의 방정식은 각각 $x=2$, $y=5$이다.

그러므로 두 점근선이 만나는 점의 좌표는 $(2,5)$

따라서 $a+b=2+5=7$

25. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$$\begin{aligned}S_{11}&=\frac{11\{2a_1+(11-1)d\}}{2}\\&=11(a_1+5d)=88\end{aligned}$$

에서 $a_1+5d=8$이고

$a_5=3$에서 $a_1+4d=3$이다.

두 식을 연립하여 계산하면 $d=5$, $a_1=-17$

따라서 $a_7=-17+6\times 5=13$

【 다른 풀이 】

$S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=88$에서 $\frac{a_1+a_{11}}{2}=8$

a_1과 a_{11}의 등차중항은 a_6이므로 $a_6=8$이고,

$a_5=3$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 5이다.

따라서 $a_7=8+5=13$

26. [출제의도] 미분계수를 이용하여 추론하기

함수

$$f(x)=\begin{cases}-ax+2a & (x<2)\\ ax-2a & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여

(i) $k<2$일 때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}&=\lim_{x\to k}\frac{-ax+2a-(-ak+2a)}{x-k}\\&=\lim_{x\to k}\frac{-a(x-k)}{x-k}=-a\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}-\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$
$$=-a-(-a)=0\ne 6$$

(ii) $k=2$일 때

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{ax-2a}{x-2}-\lim_{x\to 2-}\frac{-ax+2a}{x-2}$$
$$=a-(-a)=2a$$

$2a=6$에서 $a=3$

(iii) $k>2$일 때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}&=\lim_{x\to k}\frac{ax-2a-(ak-2a)}{x-k}\\&=\lim_{x\to k}\frac{a(x-k)}{x-k}=a\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}-\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$
$$=a-a=0\ne 6$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=3$, $k=2$이므로

$f(a+k)=f(3+2)=f(5)=9$

27. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$

이고 $2\sin A=\sin B$이므로 $\overline{AC}=2\overline{BC}$

$\overline{BC}=k$라 하면 $\overline{AC}=2k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$6^2=k^2+(2k)^2-2\times k\times 2k\times\frac{4}{5}$

$\frac{9}{5}k^2=36$이고, $k>0$이므로 $k=2\sqrt{5}$

$\cos C=\frac{4}{5}$에서 $\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=12$

28. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (0\le x<1,\ 1<x\le 2)\\ 3f(2) & (x=1)\end{cases}$$

이라 하자.

조건 (가)에 의하여

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,2]$에서 연속이다.

또한 조건 (나)에 의하여

$g(0)\ne 2$, $g(2)\ne 2$이고 $\frac{g(0)+g(2)}{2}=2$이므로

$g(0)<2<g(2)$ 또는 $g(2)<2<g(0)$이다.

그러므로 사잇값 정리에 의하여

$0<c<2$이고 $g(c)=2$인 c가 적어도 하나 존재한다.

조건 (나)에 의하여

$0\le x<1$, $1<x\le 2$에서 $g(x)=f(x)\ne 2$

이므로 $c=1$

$g(1)=3f(2)=2$에서 $f(2)=\frac{2}{3}$

$f(0)+f(2)=4$에서 $f(0)=\frac{10}{3}$

따라서 $\frac{f(0)}{f(2)}=5$

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1>6$에서 $a_2=\frac{1}{a_1}-1$

$a_2<0$이므로 $a_3=-a_2=-\frac{1}{a_1}+1$

$a_3>0$이므로 $a_4=\frac{1}{a_3}-1=\frac{1}{a_1-1}$

$a_4>0$이므로 $a_5=\frac{1}{a_4}-1=a_1-2$

자연수 n에 대하여 $a_n>1$이면

위와 같은 과정에 의하여

$a_{n+1}<0$, $a_{n+2}>0$, $a_{n+3}>0$

이므로 $a_{n+4}=a_n-2$

$a_5>1$이므로 $a_9=a_1-4$

$a_9>1$이므로 $a_{13}=a_1-6$

그러므로

$$\begin{aligned}a_1+a_5+a_9+a_{13}&=a_1+(a_1-2)+(a_1-4)+(a_1-6)\\&=4a_1-12\end{aligned}$$

$4a_1-12=13$에서 $a_1=\frac{25}{4}$이고

$a_{13}=\frac{25}{4}-6=\frac{1}{4}$

그러므로 $a_{14}=4-1=3$, $a_{15}=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

따라서 $12(a_{14}+a_{15})=12\times\left\{3+\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}=28$

30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

실수 p에 대하여

함수 $f(x)$가 $x=p$, $x=p+k$에서 모두 연속이면

$$\begin{aligned}\lim_{t\to p}g(t)&=\lim_{t\to p}\frac{f(t+k)-f(t)}{k}\\&=\frac{f(p+k)-f(p)}{k}=g(p)\end{aligned}$$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=p$에서 연속이고,

함수 $h(t)=f(t)g(t)$도 $t=p$에서 연속이다.

함수 $f(x)$는

$\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} (x+4)(x+a) = 0$, $f(-4) = b$에서

$\lim_{x \to -4} f(x) \neq f(-4)$이므로 $x = -4$에서 불연속이고

$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (x+4)(x+a) = 4a$,

$f(0) = \lim_{x \to 0+} f(x) = c$이므로

$4a = c$이면 $x = 0$에서 연속이고,

$4a \neq c$이면 $x = 0$에서 불연속이다. $\cdots$ ㉠

또한 함수 $f(x)$는 a, b, c, k의 값에 관계없이

$x \neq -4$, $x \neq 0$인 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $h(t)$는 a, b, c, k의 값에 관계없이

$t = -4-k$, $t = -k$, $t = -4$, $t = 0$을 제외한

실수 전체의 집합에서 연속이다.

이를 이용하여 a, b, c, k의 값을 구하면 다음과 같다.

$t = -4-k$에서

$$\lim_{t \to -4-k} h(t) = \lim_{t \to -4-k} \left\{ f(t) \times \frac{f(t+k) - f(t)}{k} \right\}$$
$$= f(-4-k) \times \frac{0 - f(-4-k)}{k}$$
$$= -\frac{\{f(-4-k)\}^2}{k}$$

$$h(-4-k) = f(-4-k) \times \frac{f(-4) - f(-4-k)}{k}$$

이고 함수 $h(t)$는 $t = -4-k$에서 연속이므로

$$-\frac{\{f(-4-k)\}^2}{k} = \frac{f(-4-k)\{f(-4) - f(-4-k)\}}{k}$$

$f(-4-k)f(-4) = 0$

이고 $f(-4) \neq 0$이므로 $f(-4-k) = 0$

즉, $-a = -4-k$, $a = k+4$이고

$x < -4$, $-4 < x < 0$일 때

$f(x) = (x+4)(x+k+4)$ $\cdots$ ㉡

$t = -k$에서

$$\lim_{t \to -k+} h(t) = \lim_{t \to -k+} \left\{ f(t) \times \frac{f(t+k) - f(t)}{k} \right\}$$
$$= f(-k) \times \frac{c - f(-k)}{k}$$

$$\lim_{t \to -k-} h(t) = \lim_{t \to -k-} \left\{ f(t) \times \frac{f(t+k) - f(t)}{k} \right\}$$
$$= f(-k) \times \frac{4a - f(-k)}{k}$$

$$h(-k) = f(-k) \times \frac{c - f(-k)}{k}$$

함수 $h(t)$가 $t = -k$에서 연속이므로

$$f(-k) \times \frac{c - f(-k)}{k} = f(-k) \times \frac{4a - f(-k)}{k}$$

$k > 4$이므로 ㉡에서 $f(-k) \neq 0$

그러므로 $c = 4a$이고, ㉠에 의하여

함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

$t = -4$에서

$$\lim_{t \to -4} h(t) = \lim_{t \to -4} \left\{ f(t) \times \frac{f(t+k) - f(t)}{k} \right\}$$
$$= 0 \times \frac{f(-4+k) - 0}{k} = 0$$

$$h(-4) = f(-4) \times \frac{f(-4+k) - f(-4)}{k}$$

함수 $h(t)$가 $t = -4$에서 연속이므로

$$f(-4) \times \frac{f(-4+k) - f(-4)}{k} = 0$$

$f(-4) \neq 0$이므로 $f(-4+k) = f(-4) = b$

조건 (나)에서 $b = f(k)$이므로

$f(-4+k) = f(k)$이고 $-4+k > 0$, $k > 0$

이차함수 $y = -x^2 + 6x + c$의 그래프가

직선 $x = 3$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{(-4+k)+k}{2} = 3$, $k = 5$이고

$a = 5 + 4 = 9$

$c = 4 \times 9 = 36$

$b = f(5) = -25 + 30 + 36 = 41$

그러므로 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} (x+4)(x+9) & (x < -4,\ -4 < x < 0) \\ 41 & (x = -4) \\ -x^2 + 6x + 36 & (x \geq 0) \end{cases}$$

따라서 $f(c-a-b) = f(36-9-41) = f(-14) = 50$