정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	④	3	①	4	⑤	5	③
6	⑤	7	②	8	①	9	③	10	②
11	⑤	12	④	13	①	14	④	15	②
16	11	17	50	18	37	19	2	20	35
21	8	22	96						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{16}\times 2^{-\frac{1}{3}}=(2^4)^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=4x+5$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로

$\sin^2\theta+\left(-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)^2=\dfrac{5}{4}\sin^2\theta=1$

$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로 $\sin\theta>0$

$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=3$

따라서 $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=2+3=5$

5. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

함수 $f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$\int_1^2 f'(x)dx=[f(x)]_1^2=f(2)-f(1)$

모든 실수 x에 대하여

$f(x)-f(1)=x^3+4x^2-5x$

$x=2$일 때,

$f(2)-f(1)=2^3+4\times 2^2-5\times 2=14$

따라서 $\int_1^2 f'(x)dx=14$

6. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$이라 하자.

$a_n=ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)

$a_1+a_2=a+ar$

$a_3+a_4=ar^2+ar^3=r^2(a+ar)$

$\dfrac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=\dfrac{r^2(a+ar)}{a+ar}=r^2=4$, $r=2\ (r>0)$

$a_2a_4=a^2r^4=16a^2=1$, $a=\dfrac{1}{4}\ (a>0)$

$a_n=\dfrac{1}{4}\times 2^{n-1}$, $a_6=8$, $a_7=16$

따라서 $a_6+a_7=24$

7. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(1)=1-3+2a=a+3$ 이므로 $a=5$

$f(x)=x^3-3x+10$

따라서 $f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)+10=12$

8. [출제의도] 부정적분의 성질 이해하기

모든 실수 x에 대하여

$xf'(x)=6x^3-x+f(0)+1$

$x=0$일 때, $0=f(0)+1$

$f(0)=-1$

$xf'(x)=6x^3-x+(-1)+1=x(6x^2-1)$

$f'(x)=6x^2-1$

$f(x)=2x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=-1$

$f(x)=2x^3-x-1$

따라서 $f(-1)=-2+1-1=-2$

9. [출제의도] 지수와 로그의 성질 이해하기

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{0+2a+(-\log_2 9)}{3},\ \dfrac{(-\log_2 9)+\log_2 7+a}{3}\right)$

$\dfrac{0+2a+(-\log_2 9)}{3}=b$, $2a-\log_2 9=3b$

$b=\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{3}\log_2 9$ … ㉠

$\dfrac{(-\log_2 9)+\log_2 7+a}{3}=\log_8 7=\dfrac{1}{3}\log_2 7$

$-\log_2 9+\log_2 7+a=\log_2 7$

$a=\log_2 9$ … ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$b=\dfrac{2}{3}\log_2 9-\dfrac{1}{3}\log_2 9=\dfrac{1}{3}\log_2 9$

$a+3b=\log_2 9+\log_2 9=\log_2 81$

$2^{a+3b}=2^{\log_2 81}$

$2^{\log_2 81}=k$라 하면

$\log_2 k=\log_2 81$, $k=81$

따라서 $2^{a+3b}=81$

10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$

$=16+\int_0^t 3t(a-t)dt$

$=16+\int_0^t(-3t^2+3at)dt$

$=16+\left[-t^3+\dfrac{3}{2}at^2\right]_0^t$

$=-t^3+\dfrac{3}{2}at^2+16$

시각 $t=2a$에서 점 P의 위치가 0이므로

$x(2a)=-(2a)^3+\dfrac{3}{2}a\times(2a)^2+16$

$=16-2a^3=0$

$a^3=8$, $a=2$

$v(t)=3t(2-t)=-3t^2+6t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5|v(t)|dt$

$=\int_0^5|-3t^2+6t|dt$

$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^5(3t^2-6t)dt$

$=[-t^3+3t^2]_0^2+[t^3-3t^2]_2^5$

$=\{(-8+12)-0\}+\{(125-75)-(8-12)\}$

$=58$

11. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

$a_n=a+(n-1)d$ (단, n은 자연수)

$a_5=a+4d$는 자연수이다.

$S_8=\dfrac{8(2a+7d)}{2}=4(2a+7d)=\dfrac{68}{3}$

$2a+7d=\dfrac{17}{3}$

$2(a+4d)-d=2a_5-d=\dfrac{17}{3}$

$a_5=\dfrac{1}{2}d+\dfrac{17}{6}$

$0<d<1$ 이므로 $\dfrac{17}{6}<a_5<\dfrac{10}{3}$

$a_5=3$, $d=\dfrac{1}{3}$

$a_5=a+4\times\dfrac{1}{3}=3$, $a=\dfrac{5}{3}$

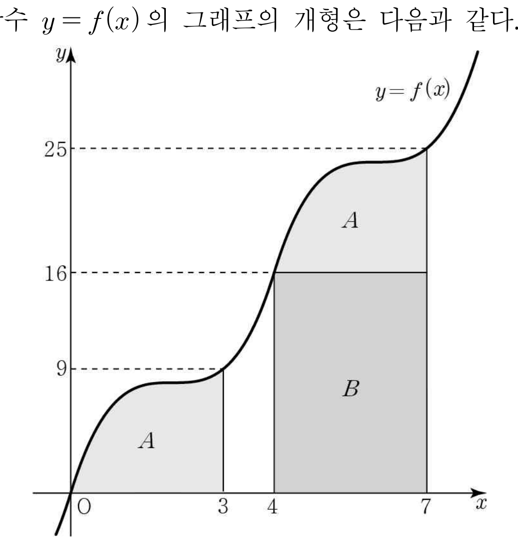
$a_n=\dfrac{5}{3}+(n-1)\times\dfrac{1}{3}$

따라서 $a_{16}=\dfrac{5}{3}+15\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{20}{3}$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서

미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 4-} f(x) = f(4)$
$4 \le x < 8$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프는
$0 \le x < 4$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 16만큼
평행이동한 그래프와 일치한다.
모든 실수 x에 대하여
$f(x+4)=f(x)+16$이므로
$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x+4)$
$= \lim_{x\to 0+} \{f(x)+16\} = 0+16=16$
$\lim_{x\to 4-} f(x) = \lim_{x\to 4-} (x^3+ax^2+bx)$
$=64+16a+4b$
$f(4)=f(0)+16=16$
$16=64+16a+4b$
$b=-4a-12$
함수 $f(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로
$$\lim_{x\to 4+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$\lim_{x\to 4+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x+4)-f(4)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\{f(x)+16\}-16}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^3+ax^2+bx}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} (x^2+ax+b) = b = -4a-12$$
$$\lim_{x\to 4-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4-} \frac{(x^3+ax^2+bx)-16}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4-} \frac{x^3+ax^2+(-4a-12)x-16}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4-} \frac{ax(x-4)+(x-4)(x^2+4x+4)}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4-} \{x^2+(a+4)x+4\} = 4a+36$$
$-4a-12=4a+36$
$a=-6$, $b=12$
$f(x)=x^3-6x^2+12x$ $(0 \le x < 4)$
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



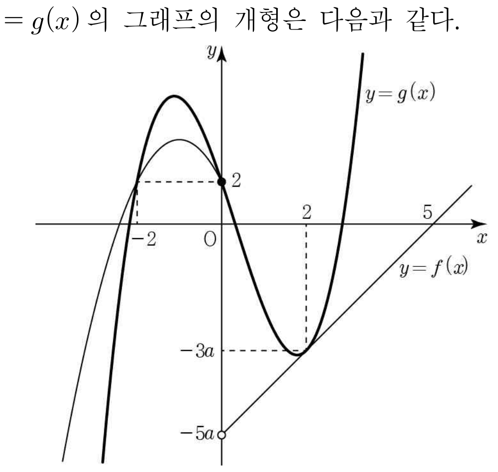
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및
직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A,
직선 $y=16$과 x축 및 두 직선 $x=4$, $x=7$로
둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하면
$$A=\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^3-6x^2+12x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2\right]_0^3 = \frac{81}{4}$$
$B=3\times 16=48$
따라서 $\int_4^7 f(x)dx = A+B = \frac{81}{4}+48 = \frac{273}{4}$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 ABC의 외접원을 C_1,
삼각형 ADC의 외접원을 C_2라 하자.
원 C_1의 반지름의 길이를 R이라 하면
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BAC})} = \frac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 18 = 2R,\ R=9$$
원 C_2에서 $\angle \mathrm{AO'D}$는 호 AD의 중심각,
$\angle \mathrm{ACD}$는 호 AD의 원주각이므로
$\angle \mathrm{AO'D} = 2\angle \mathrm{ACD} = \frac{2}{3}\pi$
이등변삼각형 $\mathrm{O'AD}$에서 $\angle \mathrm{AO'D} = \frac{2}{3}\pi$이므로
$\angle \mathrm{DAO'} = \frac{\pi}{6}$
$\overline{\mathrm{OA}} = R = 9$, $\overline{\mathrm{AO'}} = 5\sqrt{3}$
$\angle \mathrm{OAO'} = \frac{\pi}{6}$이므로
삼각형 $\mathrm{AOO'}$에서 코사인법칙에 의하여
$$\overline{\mathrm{OO'}}^2 = 9^2+(5\sqrt{3})^2 - 2\times 9\times 5\sqrt{3}\times \cos\frac{\pi}{6}$$
$$=81+75-135=21$$
따라서 $\overline{\mathrm{OO'}}^2=21$

14. [출제의도] 함수의 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

$f(-2)=g(-2)=2$, $f(0)=g(0)=2$이므로
삼차방정식 $g(x)=2$의 서로 다른 세 실근을
-2, 0, t라 하면
$g(x)-2=x(x+2)(x-t)$
$g(x)=x(x+2)(x-t)+2$
$=x^3+(2-t)x^2-2tx+2$
$f(k)=g(k)$를 만족시키는 양수 k의 값은
2뿐이므로, 이를 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$,
$y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선
$y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선과
일치한다.
$f(2)=g(2)$이고 $f'(2)=g'(2)$
$f(2)=a(2-5)=-3a$
$g(2)=8+4(2-t)-4t+2=18-8t$
$-3a=18-8t$ ⋯ ㉠
$f'(2)=g'(2)$이므로
$f'(x)=a$ $(x>0)$에서
$f'(2)=a$
$g'(x)=3x^2+2(2-t)x-2t$에서
$g'(2)=20-6t$
$a=20-6t$ ⋯ ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=2$, $t=3$
$g(x)=x^3-x^2-6x+2$
따라서 $g(2a)=g(4)=26$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

a_1이 자연수이고 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ 또는 $a_{n+1}=(a_n-1)^2$이므로
수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 음이 아닌 정수이다.
a_{n+1}의 값에 따라 가능한 a_n의 값은 다음과 같다.
(Ⅰ) $a_{n+1}=(2k)^2$인 자연수 k가 존재하는 경우
$a_n=\sqrt{a_{n+1}}+1$ 또는 $a_n=2a_{n+1}$
(Ⅱ) $a_{n+1}=1$인 경우, $a_n=0$ 또는 $a_n=2$
(Ⅲ) $a_{n+1}=0$인 경우, $a_n=1$
(Ⅳ) 그 외의 경우, $a_n=2a_{n+1}$
(Ⅰ)~(Ⅳ)에 의하여
$a_7=1$이므로 $a_6=0$ 또는 $a_6=2$
(i) $a_6=0$인 경우
$a_5=1$이고 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은
(0, 1, 0, 1) 또는 (0, 1, 2, 4) 또는
(2, 4, 3, 6) 또는 (2, 4, 8, 16)이므로
$a_1=1$ 또는 $a_1=4$ 또는 $a_1=6$ 또는
$a_1=16$
(ii) $a_6=2$인 경우
$a_5=4$이고 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은
(3, 6, 12, 24) 또는 (8, 16, 5, 10) 또는
(8, 16, 32, 64)이므로
$a_1=24$ 또는 $a_1=10$ 또는 $a_1=64$
따라서 (i), (ii)에 의하여
모든 a_1의 값의 합은
$1+4+16+6+24+10+64=125$

16. [출제의도] 로그 계산하기

로그의 진수는 양수이므로
$x+9>0$, $x-6>0$에서
$x>6$
$\log_5(x+9)=\log_5 4+\log_5(x-6)$
$\log_5(x+9)=\log_5\{4(x-6)\}=\log_5(4x-24)$
$x+9=4x-24$
따라서 $x=11$

17. [출제의도] 곱의 미분 계산하기

$f(x)=(x-3)(x^2+x-2)$
$f'(x)=1\times(x^2+x-2)+(x-3)(2x+1)$
따라서

$$f'(5)=1\times(25+5-2)+(5-3)\times(10+1)$$
$$=50$$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$$\sum_{k=1}^{15}(3a_k+2)=3\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}2$$
$$=3\sum_{k=1}^{15}a_k+30=45$$

$3\sum_{k=1}^{15}a_k=15$, $\sum_{k=1}^{15}a_k=5$

$2\sum_{k=1}^{15}a_k=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$

$10=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$, $\sum_{k=1}^{14}a_k=-32$

따라서 $a_{15}=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{14}a_k=5-(-32)=37$

19. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각함수 $y=a\sin\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$,

최댓값은 a , 최솟값은 $-a$ 이다.

삼각함수 $y=a\cos\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$,

최댓값은 a , 최솟값은 $-a$ 이다.

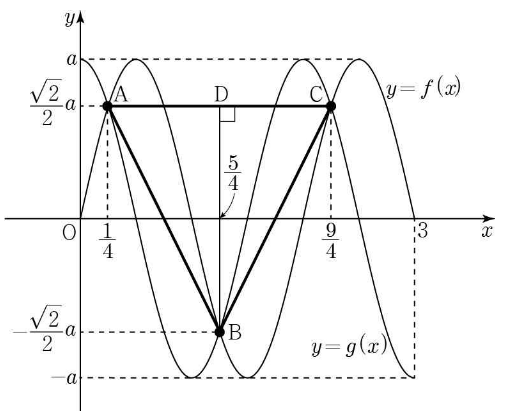
곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근이므로

$a\sin\pi x=a\cos\pi x$, $\tan\pi x=1$

$\pi x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{9}{4}\pi$ $(0\le\pi x\le3\pi)$

$x=\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{4}$

곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점을 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{9}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 라 하고, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\sqrt{2}\,a$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}\,a=2$

$a=\sqrt{2}$

따라서 $a^2=2$

20. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기

직선 $y=k$ 가 곡선 $y=f(x)$, 직선 $y=g(x)$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 각각 3 , 1 이므로

함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는

직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 는 서로 다른 세 점에서 만나고

직선 $y=k$ 와 직선 $y=g(x)$ 는 한 점에서 만나며 이 네 점이 모두 서로 다른 경우이다.

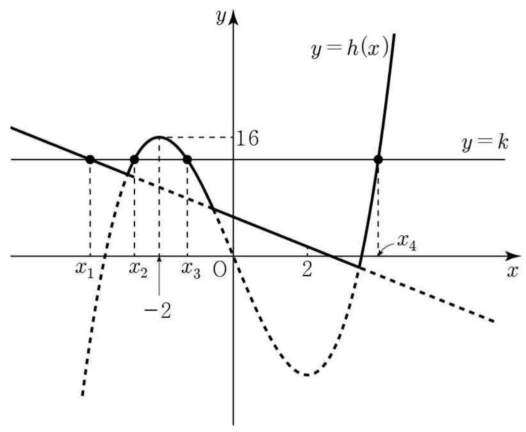
함수 $h(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)\ge g(x))\\ g(x) & (f(x)<g(x))\end{cases}$ 이므로

직선 $y=k$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 x_1 이라 하면 $f(x_1)<g(x_1)$

직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_2 , x_3 , x_4 라 하면

$f(x_2)>g(x_2)$, $f(x_3)>g(x_3)$, $f(x_4)>g(x_4)$

이를 만족시키는 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선 $y=g(x)$ 가 점 $(2,\ 2)$ 를 지나고

$x_1<x_2$, $f(x_1)<g(x_1)=k$ 인 실수 x_1 이 존재하므로 직선 $y=g(x)$ 의 기울기는 음수이다.

$y=g(x)=a(x-2)+2$ 에서 $a<0$ ⋯ ㉠

$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값을 갖고

$x=-2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 함숫값은 함수 $g(x)$ 의 함숫값보다 크다.

$f(-2)>g(-2)$

$16>-4a+2$

$a>-\frac{7}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-\frac{7}{2}<a<0$

$m=-\frac{7}{2}$, $M=0$

따라서 $10\times(M-m)=10\times\left\{0-\left(-\frac{7}{2}\right)\right\}=35$

21. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

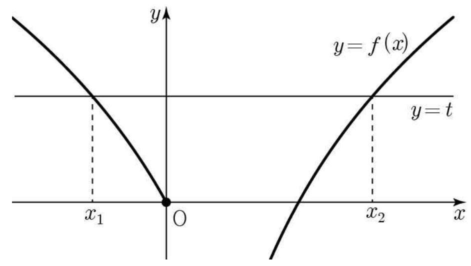
(i) $m=-10$ 인 경우

$f(0)=|10-10|=0$

$t>0$ 일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)-10=t$ 의 실근을 x_1 ,

방정식 $5\log_2 x-10=t$ 의 실근을 x_2 라 하자.



$5\log_2(4-x_1)-10=5\log_2 x_2-10$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$

$4-x_1=x_2$, $x_1+x_2=4$

$t>0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$g(t)=4$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m<-10$ 인 경우

$x<0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 α 라 하면

$$f(x)=\begin{cases}5\log_2(4-x)+m & (x\le\alpha)\\ -5\log_2(4-x)-m & (\alpha<x\le0)\\ 5\log_2 x+m & (x>0)\end{cases}$$

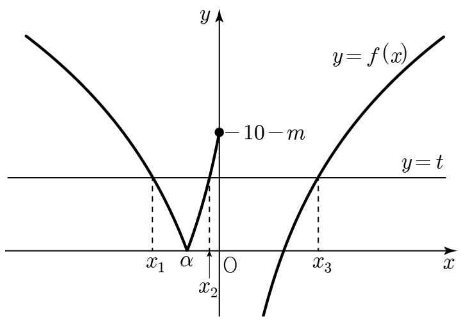
$f(0)=|10+m|=-10-m$

① $0<t<-10-m$ 일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1,

방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$ 의 실근을 x_2,

방정식 $5\log_2 x+m=t$ 의 실근을 x_3 이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$

$4-x_1=x_3$, $x_1+x_3=4$

$g(t)=x_1+x_2+x_3=x_2+4<4$ 이고

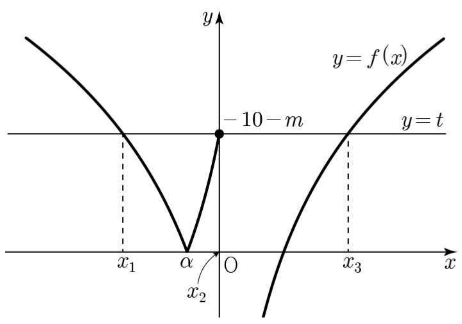
$g(t)$ 의 값은 일정하지 않다.

② $t=-10-m$ 일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1,

방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$ 의 실근을 x_2,

방정식 $5\log_2 x+m=t$ 의 실근을 x_3 이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$, $4-x_1=x_3$

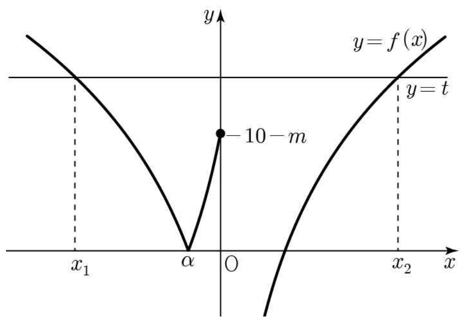
$x_1+x_3=4$, $x_2=0$ 이므로

$g(t)=x_1+x_2+x_3=4$

③ $t>-10-m$ 일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1 ,

방정식 $5\log_2 x+m=t$ 의 실근을 x_2 라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_2+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$

$4-x_1=x_2$, $x_1+x_2=4$

$g(t)=x_1+x_2=4$

①, ②, ③에 의하여

$t\ge -10-m$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$g(t)=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$t\ge a$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$g(t)=g(a)$ 가 되도록 하는 a 의 최솟값은

$-10-m$ 이다.

$-10-m=2$, $m=-12$

따라서 $f(m)=f(-12)$

$=\left|5\log_2(4+12)-12\right|$

$=8$

22. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 함수 추론하기

함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 와 $x=b$ 에서만 불연속이고, 함수 $f(x+k)$ 는 $x=a-k$ 와 $x=b-k$ 에서만 불연속이므로

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a$, $x=b$, $x=a-k$, $x=b-k$ 에서 연속이면 함수 $f(x)f(x+k)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$a-k<a$, $b-k<b$ 이므로 두 수 a 와 $b-k$ 에 대하여 다음과 같은 경우가 존재한다.

(ⅰ) $a\ne b-k\ (k\ne b-a)$ 인 경우

① $x=a-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x\to(a-k)+}f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x\to(a-k)+}f(x)\times\lim_{x\to(a-k)+}f(x+k)$

$=f(a-k)\times(a-10)$

$\lim_{x\to(a-k)-}f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x\to(a-k)-}f(x)\times\lim_{x\to(a-k)-}f(x+k)$

$=f(a-k)\times(a+2)$

$f(a-k)f(a-k+k)=f(a-k)\times(a-10)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a-k$ 에서 연속이므로

$f(a-k)\times(a-10)=f(a-k)\times(a+2)$

$f(a-k)=0$

② $x=a$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x\to a+}f(x)f(x+k)=(a-10)f(a+k)$

$\lim_{x\to a-}f(x)f(x+k)=(a+2)f(a+k)$

$f(a)f(a+k)=(a-10)f(a+k)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$(a-10)f(a+k)=(a+2)f(a+k)$

$f(a+k)=0$

③ $x=b-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x\to(b-k)+}f(x)f(x+k)$

$=f(b-k)\times(-b+8)$

$\lim_{x\to(b-k)-}f(x)f(x+k)=f(b-k)\times(b-10)$

$f(b-k)f(b-k+k)=f(b-k)\times(-b+8)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=b-k$ 에서 연속이므로

$f(b-k)\times(-b+8)=f(b-k)\times(b-10)$

$f(b-k)=0$

④ $x=b$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x\to b+}f(x)f(x+k)=(-b+8)f(b+k)$

$\lim_{x\to b-}f(x)f(x+k)=(b-10)f(b+k)$

$f(b)f(b+k)=(-b+8)f(b+k)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=b$ 에서 연속이므로

$(-b+8)f(b+k)=(b-10)f(b+k)$

$f(b+k)=0$

①~④에 의하여

$f(a-k)=f(a+k)=f(b-k)=f(b+k)=0$

$a+k=b-k\ (k=\frac{b-a}{2})$ 이면

$a+k=b-k=\frac{a+b}{2}$

$a<\frac{a+b}{2}<b<8$ 이므로

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left|\frac{a+b}{2}\right|-10<0$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a+k)=f(b-k)=0$ 을 만족시키지 않는다.

$a+k\ne b-k$ 이므로 네 수 $a-k$, $a+k$, $b-k$, $b+k$ 는 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 네 실근이다.

방정식 $f(x)=0$ 의 모든 실근은 -4, -2, 8, 10 이므로

$\{a-k,\ a+k,\ b-k,\ b+k\}$

$=\{-4,\ -2,\ 8,\ 10\}$

$0<a+k<b+k$ 이므로

$a+k=8$, $b+k=10$

$a-k<b-k$ 이므로

$a-k=-4$, $b-k=-2$

두 식 $a-k=-4$, $a+k=8$ 을 연립하면

$a=2$, $k=6$

$b+k=b+6=10$, $b=4$

$a<b<k$ 이므로

$f(k)=f(6)=|6-9|-1=2$

$f(k)>0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=b-k\ (k=b-a)$ 인 경우

① $x=a-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

(ⅰ)의 ①에 의하여 $f(a-k)=0$

$a-k=2a-b$ 이므로 $f(2a-b)=0$

② $x=b$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

(ⅰ)의 ④에 의하여 $f(b+k)=0$

$b+k=2b-a$ 이므로 $f(2b-a)=0$

③ $x=a(=b-k)$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x\to a+}f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x\to a+}f(x)f(x+b-a)$

$=(a-10)(-b+8)$

$\lim_{x\to a-}f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x\to a-}f(x)f(x+b-a)$

$=(a+2)(b-10)$

$f(a)f(a+k)=f(a)f(b)=(a-10)(-b+8)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a=b-k$ 에서 연속이므로

$(a-10)(-b+8)=(a+2)(b-10)$

$a(b-9)-4b+30=0$

$a=4+\frac{6}{b-9}$

$a<b<8$ 이므로 이를 만족시키는 두 자연수 a, b 의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 $(1,\ 7)$, $(2,\ 6)$ 이다.

$a=1$, $b=7$ 이면 $f(2a-b)=f(-5)=1$ 이므로 $f(2a-b)=0$ 을 만족시키지 않는다.

$a=2$, $b=6$ 이면

$f(2a-b)=f(-2)=0$,

$f(2b-a)=f(10)=0$ 을 만족시킨다.

$k=6-2=4$

$a<k<b$ 이므로

$f(k)=f(4)=4-10=-6$

$f(k)<0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2$, $b=6$, $k=4$ 이고 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

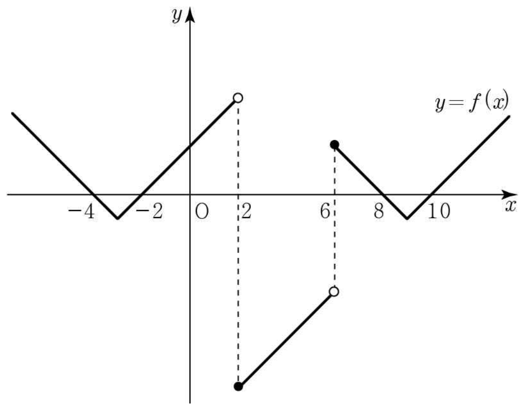
$$f(x)=\begin{cases}|x+3|-1 & (x<2)\\ x-10 & (2\le x<6)\\ |x-9|-1 & (x\ge 6)\end{cases}$$

따라서

$f(a)\times f(b)\times f(k)=f(2)\times f(6)\times f(4)$

$=(-8)\times 2\times(-6)=96$

[참고] 함수 $y=f(x)$ 의 그래프



기하 정답

23	③	24	①	25	⑤	26	②	27	④
28	④	29	90	30	111				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 합과 크기 계산하기

$\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ 0)$

$\vec{a}+\vec{b}=(4-2,\ 1+0)=(2,\ 1)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 위의 점 $(2,\ a)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{8}+\frac{ay}{2a^2}=1$

$\frac{x}{4}+\frac{y}{2a}=1$

$y=-\frac{a}{2}x+2a$

접선의 기울기가 -3이므로

$-\frac{a}{2}=-3$

따라서 $a=6$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$라 하면

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$(x-4,\ y-2)\cdot(4,\ 2)=0$

$4x+2y-20=0$

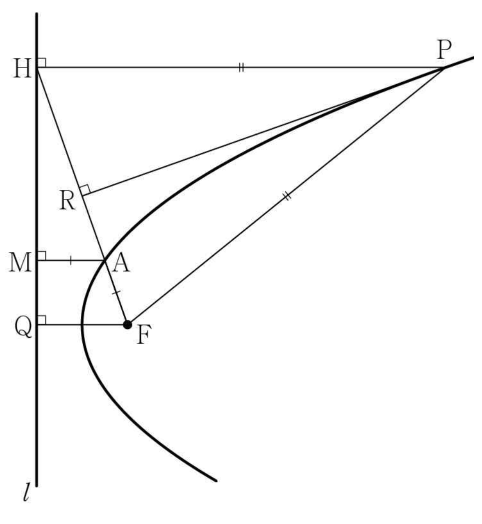
$y=-2x+10$

$\mathrm{B}(5,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 10)$

따라서 삼각형 OBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\times5\times10=25$

26. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기



두 점 F, A에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, M이라 하자.

$\overline{\mathrm{HA}}:\overline{\mathrm{AF}}=3:1$

$\overline{\mathrm{AF}}=k\ (k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{HA}}=3k$, $\overline{\mathrm{HF}}=4k$, $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{AF}}=k$

두 삼각형 HMA, HQF가 서로 닮음이고 닮음비가 $3:4$이므로

$\overline{\mathrm{FQ}}=\frac{4}{3}k$

$\overline{\mathrm{FQ}}=4$, $k=3$

$\overline{\mathrm{HF}}=4k=12$

점 P에서 선분 HF에 내린 수선의 발을 R이라 하자.

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로 $\overline{\mathrm{HR}}=\overline{\mathrm{RF}}=2k=6$

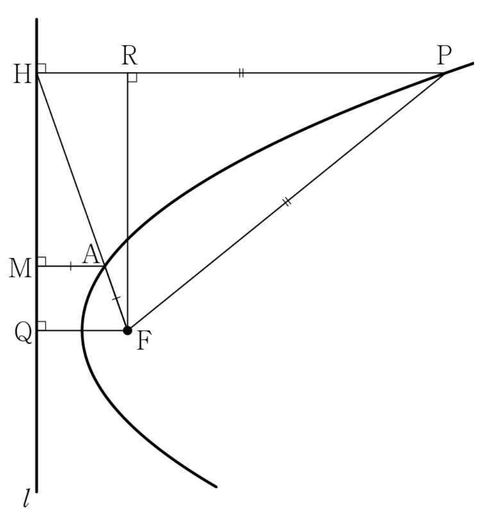
$\angle\mathrm{FHQ}=\angle\mathrm{HPR}$, $\angle\mathrm{FQH}=\angle\mathrm{HRP}=\frac{\pi}{2}$

두 삼각형 HQF, PRH는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{FQ}}:\overline{\mathrm{HR}}=2:3$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{HF}}=\frac{3}{2}\times12=18$

[다른 풀이]



두 점 F, A에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, M이라 하자.

$\overline{\mathrm{HA}}:\overline{\mathrm{AF}}=3:1$

$\overline{\mathrm{AF}}=k\ (k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{HA}}=3k$, $\overline{\mathrm{HF}}=4k$, $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{AF}}=k$

두 삼각형 HMA, HQF가 서로 닮음이고 닮음비가 $3:4$이므로

$\overline{\mathrm{FQ}}=\frac{4}{3}k$

$\overline{\mathrm{FQ}}=4$, $k=3$

$\overline{\mathrm{HF}}=4k=12$

점 F에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 R이라 하자.

삼각형 HQF에서

$\overline{\mathrm{HQ}}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{RF}}=8\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PH}}-\overline{\mathrm{RH}}=x-4$

직각삼각형 PRF에서

$(x-4)^2+(8\sqrt{2})^2=x^2$

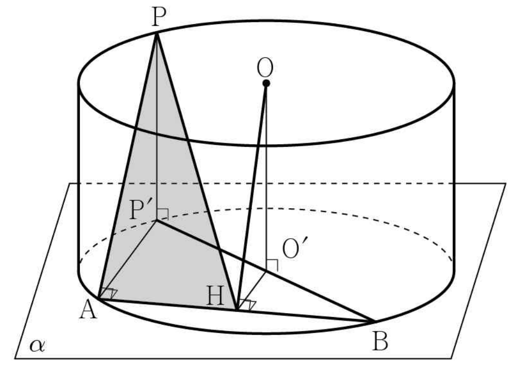
$x=18$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=18$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기

$\overline{\mathrm{BP'}}=6$이므로 선분 BP′은 점 P′을 포함하는 밑면의 지름이다.

선분 BP′의 중점을 O′, 직선 OO′에 수직이고 점 O′을 포함하는 평면을 α라 하면,



$\overline{\mathrm{OO'}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{O'H}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{O'H}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2-\overline{\mathrm{OO'}}^2}=\sqrt{13-9}=2$

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BO'}}^2-\overline{\mathrm{O'H}}^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

점 A가 선분 BP′을 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{P'A}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

두 삼각형 BHO′, BAP′은 서로 닮음이고 닮음비가 $1:2$이므로

$\overline{\mathrm{P'A}}=2\overline{\mathrm{O'H}}=4$

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{P'A}}^2+\overline{\mathrm{PP'}}^2}=\sqrt{16+9}=5$

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{5}$

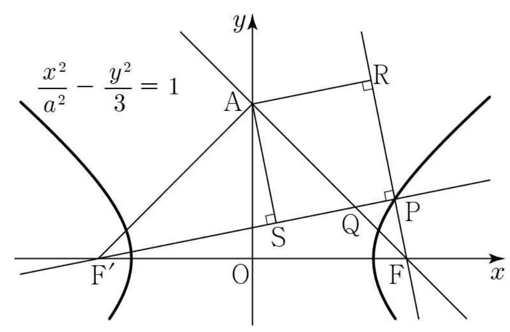
$\overline{\mathrm{PP'}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{P'A}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

따라서 삼각형 PAH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times5\times\sqrt{5}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

28. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제 해결하기



$\overline{\mathrm{PF}}=t$라 하자.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$

$\overline{\mathrm{PF'}}=t+2a$

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}$, $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{AS}}$,

$\angle\mathrm{ARF}=\angle\mathrm{ASF'}=\frac{\pi}{2}$이므로

두 삼각형 ARF, ASF′은 서로 합동이고

$\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{SF'}}$

$\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{AS}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{RF}}=t+k$, $\overline{\mathrm{SF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PS}}=t+2a-k$

$t+k=t+2a-k$

$k=a$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{a}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{QS}}=\frac{2a}{3}$

두 삼각형 QSA, QPF는 서로 닮음이고 닮음비가 $2:1$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AS}}=\frac{a}{2}$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+2a=\dfrac{5}{2}a$

$\angle \mathrm{F'PF}=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{a}{2}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=\dfrac{5}{2}a$ 이므로

$\overline{\mathrm{FF'}}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}a$ ⋯ ㉠

두 점 F, F′은

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 의 두 초점이므로

$\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{a^2+3}$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡에 의하여 $26a^2=16a^2+48$

따라서 $a^2=\dfrac{24}{5}$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ 이므로

점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있고

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\geq 0$ 이므로 점 P의 y좌표는

0 이상이다. 그러므로 점 P는 곡선

$(x-4)^2+y^2=4\ (y\geq 0)$ 위에 있다.

조건 (나)에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 이므로

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 는 방향이 서로 같고

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$ 이므로 점 Q는 점 P를

x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점과

일치한다.

그러므로 점 Q는 곡선

$(x-3)^2+y^2=4\ (y\geq 0)$ ⋯ ㉠

위에 있다.

$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|=2$ 이므로 점 Q는 중심이 A이고

반지름의 길이가 2인 원

$(x-2)^2+y^2=4$ ⋯ ㉡

위에 있다.

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4}=\dfrac{9}{2}$$

따라서 $20\times k=90$

[다른 풀이]

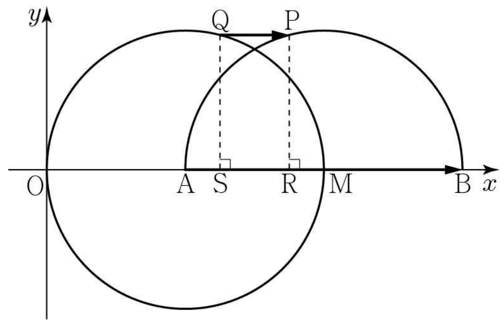
조건 (가)에 의하여 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 중 y좌표가 0 이상인 점이다.

조건 (나)에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 이므로

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 는 방향이 서로 같고

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=1$ 이므로 점 Q는 점 P를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점과 일치한다.

$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|=2$ 를 만족시키는 점 Q는 중심이 A이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있으므로 조건을 만족시키는 두 점 P, Q의 위치는 다음 그림과 같다.



선분 AB의 중점을 M이라 하고 두 점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면 $\overline{\mathrm{AS}}=\overline{\mathrm{RM}}=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=4+\overrightarrow{\mathrm{SR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=4+2\overrightarrow{\mathrm{AS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=4+2|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|^2=\dfrac{9}{2}\end{aligned}$$

따라서 $20\times k=90$

30. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여 추론하기

삼각형 A′PB′은 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{A'M}}=\sqrt{\overline{\mathrm{A'P}}^2-\overline{\mathrm{PM}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\overline{\mathrm{AA'}}\perp\alpha$, 선분 A′M은 평면 α에 포함되므로

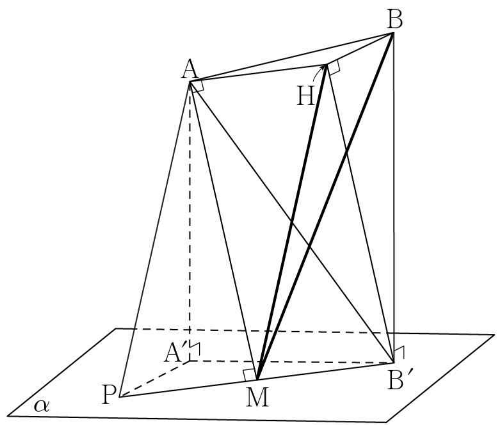
$\overline{\mathrm{AA'}}\perp\overline{\mathrm{A'M}}$

$\angle\mathrm{AA'M}=\dfrac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 AA′M에서

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AA'}}^2+\overline{\mathrm{A'M}}^2}=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AA'}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{A'M}}\perp\overline{\mathrm{PB'}}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{PB'}}$ ⋯ ㉠



점 B의 평면 APB′ 위로의 정사영을 점 H라 하면, 선분 BM의 평면 APB′ 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{HM}}$ 이다.

직각삼각형 MAB에서 $\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{BH}}\perp$(평면 APB′)이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{AH}}$ ⋯ ㉡

$\overline{\mathrm{BH}}\perp$(평면 APB′), $\overline{\mathrm{PB'}}\perp\overline{\mathrm{BB'}}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PB'}}\perp\overline{\mathrm{HB'}}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

사각형 AMB′H가 직사각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{HM}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{MB'}}^2}\\&=\sqrt{(3\sqrt{10})^2+4^2}=\sqrt{106}\end{aligned}$$

두 직선 AM, HB′은 서로 평행하고

두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{MAA'}=\angle\mathrm{BB'H}$ 이고

$\tan(\angle\mathrm{MAA'})=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}=\tan(\angle\mathrm{BB'H})$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BH}}&=\overline{\mathrm{HB'}}\times\tan(\angle\mathrm{BB'H})\\&=3\sqrt{10}\times\dfrac{1}{3}=\sqrt{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BM}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{BH}}^2+\overline{\mathrm{HM}}^2}\\&=\sqrt{10+106}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}\end{aligned}$$

직선 BM과 평면 APB′이 이루는 예각의 크기는 $\angle\mathrm{BMH}$ 와 같으므로 $\theta=\angle\mathrm{BMH}$

$\cos^2\theta=\left(\dfrac{\overline{\mathrm{HM}}}{\overline{\mathrm{BM}}}\right)^2=\dfrac{\overline{\mathrm{HM}}^2}{\overline{\mathrm{BM}}^2}=\dfrac{106}{116}=\dfrac{53}{58}$

$p=58$, $q=53$

따라서 $p+q=111$