# 2024학년도 5월 고3 전국연합학력평가
# 정답 및 해설

## • 2교시 수학 영역 •



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | ④ | **2** | ② | **3** | ③ | **4** | ③ | **5** | ④ |
| **6** | ⑤ | **7** | ② | **8** | ⑤ | **9** | ① | **10** | ⑤ |
| **11** | ① | **12** | ⑤ | **13** | ① | **14** | ② | **15** | ④ |
| **16** | 5 | **17** | 7 | **18** | 16 | **19** | 11 | **20** | 25 |
| **21** | 64 | **22** | 114 | | | | | | |

**1. [출제의도] 지수법칙 계산하기**

$$4^{1-\sqrt{3}}\times 2^{1+2\sqrt{3}}=(2^2)^{1-\sqrt{3}}\times 2^{1+2\sqrt{3}}$$
$$=2^{(2-2\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})}=2^3=8$$

**2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=2$$

**3. [출제의도] 등차수열 이해하기**

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하자.

$a_5-a_3=(a_3+2d)-a_3=2d=8$에서 $d=4$

따라서 $a_2=1+4=5$

**4. [출제의도] 미분계수 이해하기**

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-4}{h}=6$이고 $\displaystyle\lim_{h\to 0}h=0$이므로

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\{f(1+2h)-4\}=0$, $f(1)=4$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2$$
$$=f'(1)\times 2=6$$

이므로 $f'(1)=3$

따라서 $f(1)+f'(1)=4+3=7$

**5. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기**

$$\sin(-\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta+(-\sin\theta)$$
$$=-2\sin\theta=\frac{8}{5}$$

에서 $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$이고 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$

**6. [출제의도] 함수의 극대와 극소 이해하기**

$f(x)=x^3+ax^2+3a$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극대이므로

$f'(-2)=12-4a=0$, $a=3$

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=3a=9$

**7. [출제의도] 부정적분 이해하기**

다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

그러므로

$f'(x)=\{3x-f(1)\}(x-1)=3(x-1)^2$

에서 $f(1)=3$

$$f(x)=\int(3x^2-6x+3)dx$$
$$=x^3-3x^2+3x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

$f(1)=1+C=3$에서 $C=2$

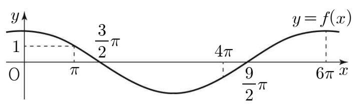
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$이므로 $f(2)=4$

**8. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기**

함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}=6\pi$이므로

$b=\dfrac{1}{3}$, $f(x)=a\cos\dfrac{x}{3}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




닫힌구간 $[\pi, 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(\pi)=a\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

따라서 $a+b=2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

**9. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기**

$a_{n+1}=1-4\times S_n$에서 $S_n=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a_{n+1}$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a_2$ $\cdots$ ㉠

$n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a_{n+1}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a_n\right)$$
$$=-\frac{1}{4}a_{n+1}+\frac{1}{4}a_n$$

이므로 $a_{n+1}=-3a_n$ $(n\geq 2)$

즉, 수열 $\{a_{n+1}\}$은 첫째항이 $a_2$이고 공비가 $-3$인 등비수열이다.

$a_4=a_2\times(-3)^2=4$에서 $a_2=\dfrac{4}{9}$ $\cdots$ ㉡

$a_6=a_4\times(-3)^2=4\times 9=36$

㉠, ㉡에서 $a_1=\dfrac{5}{36}$

따라서 $a_1\times a_6=\dfrac{5}{36}\times 36=5$

**10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기**

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2|v_1(t)|dt=\int_0^2|3t^2+1|dt=\Big[t^3+t\Big]_0^2=10$$

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^2|v_2(t)|dt=\int_0^2|mt-4|dt$$

(ⅰ) $m\leq 2$일 때

$$\int_0^2|mt-4|dt=\int_0^2(-mt+4)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^2=-2m+8$$

이므로 $-2m+8=10$, $m=-1$

(ⅱ) $m>2$일 때

$$\int_0^2|mt-4|dt$$
$$=\int_0^{\frac{4}{m}}|mt-4|dt+\int_{\frac{4}{m}}^2|mt-4|dt$$
$$=\int_0^{\frac{4}{m}}(-mt+4)dt+\int_{\frac{4}{m}}^2(mt-4)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^{\frac{4}{m}}+\left[\frac{1}{2}mt^2-4t\right]_{\frac{4}{m}}^2$$
$$=2m-8+\frac{16}{m}$$

이므로 $2m-8+\dfrac{16}{m}=10$

$m^2-9m+8=(m-1)(m-8)=0$

$m>2$이므로 $m=8$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 $m$의 값의 합은

$-1+8=7$

**11. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기**

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 $d$, $d'$이라 하자. 조건 (나)에 의하여

$a_{m+1}-b_{m+1}=(a_m+d)-(b_m+d')$
$=d-d'<0$

$a_m-b_m=\{a_1+(m-1)d\}-\{b_1+(m-1)d'\}$
$=(a_1-b_1)+(m-1)(d-d')=0$

에서 $a_1-b_1=(m-1)(d'-d)$이고,

$m-1>0$, $d'-d>0$이므로 $a_1-b_1>0$

그러므로 조건 (가)에서 $a_1-b_1=5$

$(m-1)(d'-d)=5$

$m-1$, $d'-d$가 모두 자연수이고 $m\geq 3$이므로

$m=6$

따라서

$$\sum_{k=1}^{m}b_k=\sum_{k=1}^{6}b_k=\frac{6\times(b_1+b_6)}{2}$$
$$=\frac{6\{(a_1-5)+a_6\}}{2}$$
$$=\frac{6(a_1+a_6)}{2}-15$$
$$=\sum_{k=1}^{6}a_k-15=9-15=-6$$

**12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기**

두 점 A, B의 좌표를 각각

$\left(a, \dfrac{a}{2}\right)$, $\left(b, \dfrac{b}{2}\right)$ $(0<a<b)$라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 두 점 A, B에서 만나므로

$$f(x)-\frac{1}{2}x=x^2(x-a)(x-b)$$
$$=x^4-(a+b)x^3+abx^2$$

$$S_1-S_2=\int_0^a\left|f(x)-\frac{1}{2}x\right|dx-\int_a^b\left|f(x)-\frac{1}{2}x\right|dx$$
$$=\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx+\int_a^b\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx$$
$$=\int_0^b\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx$$
$$=\int_0^b\{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}dx$$

$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{a+b}{4}x^4 + \frac{ab}{3}x^3\right]_0^b$

$= -\frac{b^5}{20} + \frac{ab^4}{12} = 0$

에서 $5a-3b=0$이고,

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(b-a) = \sqrt{5}$

에서 $b-a=2$이므로 두 식을 연립하여 계산하면

$a=3,\ b=5$

그러므로 $f(x)=x^4-8x^3+15x^2+\frac{1}{2}x$

따라서 $f(1)=\frac{17}{2}$

**13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기**

두 함수 $f_1(x),\ f_2(x)$를

$f_1(x)=2^{x+3}+b,\ f_2(x)=2^{-x+5}+3b$라 하자.

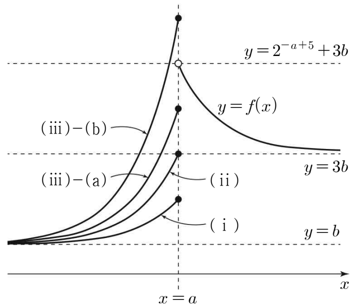
함수 $y=f_1(x)$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하고, 함수 $y=f_2(x)$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

또한 두 함수 $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$의 그래프의 점근선이 각각 $y=b,\ y=3b$이므로

$\{f_1(x) \mid x \le a\} = \{y \mid b < y \le 2^{a+3}+b\}$,

$\{f_2(x) \mid x > a\} = \{y \mid 3b < y < 2^{-a+5}+3b\}$

$2^{a+3}+b$와 $3b,\ 2^{-a+5}+3b$의 대소 관계에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




(i) $2^{a+3}+b<3b$일 때

$2^{a+3}+b<t<3b$인 모든 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않으므로 조건을 만족시키는 실수 $k$의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

(ii) $2^{a+3}+b=3b$일 때

$b<t<2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

또한 $t \ge 2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않는다.

(iii) $2^{a+3}+b>3b$일 때

(a) $2^{a+3}+b \le 2^{-a+5}+3b$일 때

$3b<t<2^{a+3}+b$인 모든 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 $k$의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

(b) $2^{a+3}+b>2^{-a+5}+3b$일 때

$3b<t<2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 $k$의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

조건을 만족시키는 실수 $k$의 최댓값은 $4b+8$이므로

(i), (ii), (iii)에 의하여

$2^{a+3}+b=3b,\ 2^{-a+5}+3b=4b+8$이다.

두 식을 연립하여 계산하면

$2^a-2^{-a+3}+2=0$

$(2^a)^2+2\times 2^a-8=0$

$(2^a+4)(2^a-2)=0$

$2^a>0$이므로 $2^a=2,\ a=1$이고 $b=8$

따라서 $a+b=9$

**14. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기**

$|f(k)|+|g(k)|=0$이려면 $f(k)=g(k)=0$이어야 한다. $f(k)=0$을 만족시키는 실수 $k$에 대하여

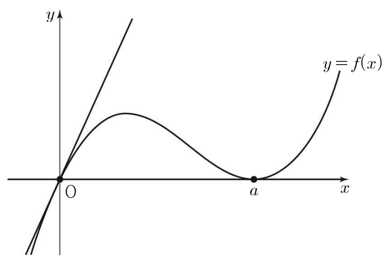
(i) $k=0$인 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 $y$절편 $g(k)$의 값은 0이다.

(ii) $k \ne 0$인 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,0)$에서의 접선의 $y$절편 $g(k)$의 값이 0이려면 $f'(k)=0$이어야 한다.

$|f(k)|+|g(k)|=0$을 만족시키는 실수 $k$의 개수가 2이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




$f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x\ (a \ne 0)$

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-2at^2+a^2t)=(3t^2-4at+a^2)(x-t)$

이 직선의 $y$절편이 $-2t^3+2at^2$이므로

$g(t)=-2t^3+2at^2$

$4f(1)+2g(1)=-1$에서

$4(1-2a+a^2)+2(-2+2a)=-1$

$4a^2-4a+1=(2a-1)^2=0,\ a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(4)=4\times\left(4-\frac{1}{2}\right)^2=49$

**15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기**

$a_n$이 자연수라 하자. 자연수 $k$에 대하여

$a_n=3k-2$이면

$a_{n+1}=\frac{(3k-2)^2+5}{3}=\frac{9k^2-12k+9}{3}=3k^2-4k+3$,

$a_n=3k-1$이면

$a_{n+1}=\frac{(3k-1)^2+5}{3}=\frac{9k^2-6k+6}{3}=3k^2-2k+2$,

$a_n=3k$이면 $a_{n+1}=\frac{3k}{3}=k$

이므로 $a_n$이 자연수이면 $a_{n+1}$도 자연수이다.

$a_1$이 자연수이므로 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n$은 자연수이다. … ㉠

$a_4$가 3의 배수이면 $a_5=\frac{a_4}{3}$이므로

$a_4+a_5=5$에서 $a_4+\frac{a_4}{3}=5,\ a_4=\frac{15}{4}$가 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_4$는 3의 배수가 아니다.

$a_5=\frac{{a_4}^2+5}{3}$이므로 $a_4+a_5=5$에서

$a_4+\frac{{a_4}^2+5}{3}=5$

${a_4}^2+3a_4-10=(a_4+5)(a_4-2)=0$

㉠에 의하여 $a_4=2$

(i) $a_3$이 3의 배수인 경우

$a_4=\frac{a_3}{3}=2$이므로 $a_3=6$

$a_2$의 값을 구하면

(a) $a_2$가 3의 배수인 경우

$a_3=\frac{a_2}{3}=6$이므로 $a_2=18$

(b) $a_2$가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\frac{{a_2}^2+5}{3}=6$이므로 ${a_2}^2=13$이 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=18$

$a_1$의 값을 구하면

(a) $a_1$이 3의 배수인 경우

$a_2=\frac{a_1}{3}=18$이므로 $a_1=54$

(b) $a_1$이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\frac{{a_1}^2+5}{3}=18$이므로 ${a_1}^2=49$

㉠에 의하여 $a_1=7$

(ii) $a_3$이 3의 배수가 아닌 경우

$a_4=\frac{{a_3}^2+5}{3}=2$이므로 ${a_3}^2=1$

㉠에 의하여 $a_3=1$

$a_2$의 값을 구하면

(a) $a_2$가 3의 배수인 경우

$a_3=\frac{a_2}{3}=1$이므로 $a_2=3$

(b) $a_2$가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\frac{{a_2}^2+5}{3}=1$이므로 ${a_2}^2=-2$가 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=3$

$a_1$의 값을 구하면

(a) $a_1$이 3의 배수인 경우

$a_2=\frac{a_1}{3}=3$이므로 $a_1=9$

(b) $a_1$이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\frac{{a_1}^2+5}{3}=3$이므로 ${a_1}^2=4$

㉠에 의하여 $a_1=2$

(i), (ii)에 의하여 모든 $a_1$의 값의 합은

$54+7+9+2=72$

**16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기**

$x-3,\ x-4$는 로그의 진수이므로

$x-3>0,\ x-4>0$에서 $x>4$

방정식 $\log_2(x-3)+\log_2(x-4)=1$에서

$\log_2(x-3)(x-4)=1$

$(x-3)(x-4)=2$

$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)=0$

$x>4$이므로 $x=5$

**17. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기**

$f'(x)=1\times(x^3+x^2+5)+(x-1)(3x^2+2x)$

이므로 $f'(1)=7$

**18. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기**

$f(x)=3x^2+ax+b$라 하자.

$\int_0^x f(t)dt=2x^3+\int_0^{-x}f(t)dt$에서

$$2x^3=-\int_0^{-x}f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_{-x}^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_{-x}^x f(t)dt$$
$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{-x}^x=2x^3+2bx$$

모든 실수 $x$에 대하여 $2x^3=2x^3+2bx$이므로

$b=0$이고, $f(1)=3+a+b=5$에서 $a=2$

따라서 $f(2)=12+2a+b=16$

**19. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기**

집합 $X$의 원소 중 양수의 개수를 $p$,

음수의 개수를 $q$라 하자.

$0\notin X$이면 $n(A)=2p$이므로 $n(A)=9$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $0\in X$

$n(A)=2p+1=9$에서 $p=4$

$n(B)=p+q+1=7$에서 $q=2$

따라서 집합 $X$의 모든 원소의 합은

$X=\{-2,-1,0,2,3,4,5\}$일 때 최대이고 그 값은

$-2+(-1)+0+2+3+4+5=11$

**20. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기**

$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$ ⋯ ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=0$

㉠에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=g(2)$

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}$ 의 값이 0이 아닌 실수이고

$\lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=f(2)-g(2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}g(x-1)=g(1)=0$

$g(0)=g(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 상수함수이거나 차수가 2 이상이다.

함수 $g(x)$가 상수함수이면 $g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 의 값이 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $g(x)$의 차수는 2 이상이다.

또한 $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 의 값이 0이 아닌 실수이므로

함수 $\{f(x)\}^2$의 차수는 함수 $g(x)$의 차수와 같다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 차수를 각각 $n$, $2n$이라 하자.

(i) $n=1$일 때

함수 $g(x)$의 차수가 2이고 $g(0)=g(1)=0$이므로

$g(x)=ax(x-1)$ $(a\neq 0)$

㉠에서 양변의 $x^3$의 계수가 같아야 하므로

$0=-\frac{1}{2}\times a-1$, $a=-2$이고 $g(x)=-2x^2+2x$

또한 ㉠에서

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\times(-2x^2+2x)-x^3+2x^2$$
$$=-5x^2+6x$$

이므로 $f(x)=-5x+6$

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{(2x-3)(x-2)}=-2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x+6)^2}{-2x^2+2x}=-\frac{25}{2}$

그러므로 $k=-2\times\left(-\frac{25}{2}\right)=25$

(ii) $n\geq 2$일 때

㉠의 좌변과 우변의 차수가 각각

$n+1$, $2n+1$이고 $n+1\neq 2n+1$이므로

㉠이 성립하지 않는다.

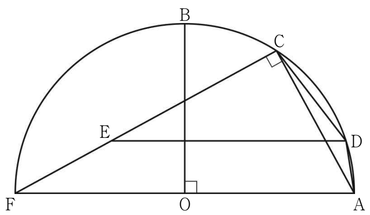
(i), (ii)에 의하여 구하는 $k$의 값은 25

**21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기**

중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 원을 $C$라 하고, 원 $C$와 직선 OA가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F라 하자. 선분 FA는 원 $C$의 지름이므로

$\angle\mathrm{FCA}=\frac{\pi}{2}$이다. 또한 $\angle\mathrm{ECA}=\frac{\pi}{2}$이므로

세 점 C, E, F는 한 직선 위에 있다.




직선 ED가 직선 OA에 평행하므로

$\sin(\angle\mathrm{DEC})=\sin(\angle\mathrm{AFC})=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

삼각형 CED에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{DEC})}=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$

사각형 ADCF가 원 $C$에 내접하므로

$$\cos(\angle\mathrm{CDA})=\cos(\pi-\angle\mathrm{AFC})$$
$$=-\cos(\angle\mathrm{AFC})$$
$$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{2})^2=4^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times 4\times\overline{\mathrm{AD}}\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

$3\times\overline{\mathrm{AD}}^2+8\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{AD}}-48=0$

$\overline{\mathrm{AD}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{7}$

따라서 $p=\frac{16}{3}$, $q=-\frac{4}{3}$이므로 $9\times|p\times q|=64$

**22. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기**

함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 $x$의 값을

$\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$이라 하자.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

| $x$ | ⋯ | $\alpha_1$ | ⋯ | $\alpha_2$ | ⋯ | $\alpha_3$ | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

조건 (가)에서 모든 실수 $x$에 대하여 $|g(x)|=f(x)$

이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\geq 0$이고,

임의의 실수 $k$에 대하여

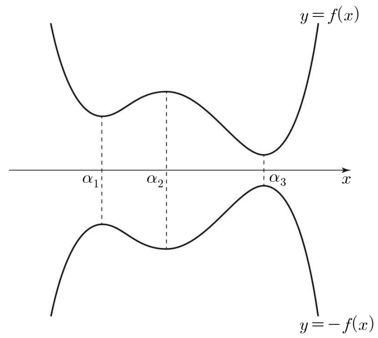
$g(k)=f(k)$ 또는 $g(k)=-f(k)$이다.

또한

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=|f'(k)|$이고 $\lim_{t\to 0+}t=0$이므로

$\lim_{t\to 0+}\{g(k+t)-g(k)\}=0$,

$g(k)=\lim_{t\to 0+}g(k+t)$ ⋯ ㉠




실수 $k$에 대하여

(i) $k<\alpha_1$ 또는 $\alpha_2\leq k<\alpha_3$일 때

(a) $k<\alpha_1$ 또는 $\alpha_2<k<\alpha_3$일 때

$g(k)=f(k)$이면 ㉠에 의하여

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=f'(k)<0$이므로

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=|f'(k)|$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $g(k)=-f(k)$

(b) $k=\alpha_2$일 때

(a)와 ㉠에 의하여

$g(\alpha_2)=\lim_{t\to 0+}g(\alpha_2+t)=-f(\alpha_2)$

(ii) $\alpha_1\leq k<\alpha_2$ 또는 $k\geq\alpha_3$일 때

(a) $\alpha_1<k<\alpha_2$ 또는 $k>\alpha_3$일 때

$g(k)=-f(k)$이면 ㉠에 의하여

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=-f'(k)<0$이므로

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=|f'(k)|$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $g(k)=f(k)$

(b) $k=\alpha_1$ 또는 $k=\alpha_3$일 때

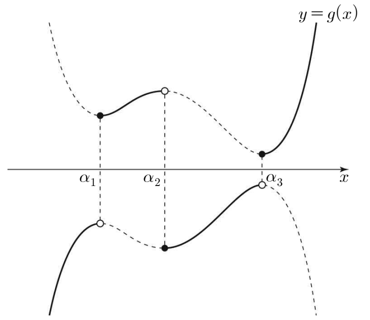
(a)와 ㉠에 의하여

$g(\alpha_1)=\lim_{t\to 0+}g(\alpha_1+t)=f(\alpha_1)$,

$g(\alpha_3)=\lim_{t\to 0+}g(\alpha_3+t)=f(\alpha_3)$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<\alpha_1 \text{ 또는 } \alpha_2\leq x<\alpha_3)\\ f(x) & (\alpha_1\leq x<\alpha_2 \text{ 또는 } x\geq\alpha_3)\end{cases}$$




함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속이면
$f'(k)=0$이고 $f(k)\neq 0$이다.
함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(\alpha_1)$ 또는 $f(\alpha_3)$이고
$f(\alpha_1)\neq f(\alpha_3)$이므로
함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속인 실수 $k$의 개수는
$f(\alpha_1)>0$이고 $f(\alpha_3)>0$이면 3,
$f(\alpha_1)=0$ 또는 $f(\alpha_3)=0$이면 2이다.
함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속이라 하자.
조건 (나)에 의하여 함수 $g(x)h(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$g(k)h(k)=\lim_{x\to k+}g(x)h(x)=\lim_{x\to k-}g(x)h(x)$

그러므로

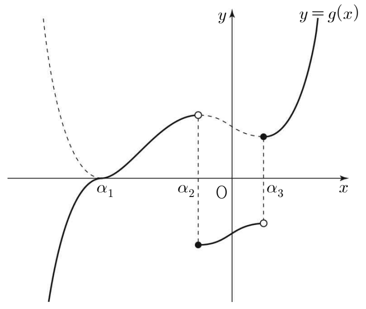
$h(k)=\lim_{x\to k+}h(x)=\lim_{x\to k-}h(x)=0$ ⋯ ㉡

또는

$h(k)\neq 0$이고 $h(k)=\lim_{x\to k+}h(x)=-\lim_{x\to k-}h(x)$ ⋯ ㉢

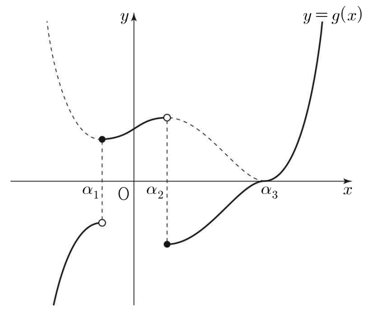
㉡을 만족시키는 실수 $k$의 값은
$a\le -\frac{3}{2}$이면 $-\frac{3}{2}$이고
$-\frac{3}{2}<a\le -\frac{1}{2}$이면 존재하지 않으며
$a>-\frac{1}{2}$이면 $-\frac{1}{2}$이다.
실수 $k$가 ㉢을 만족시키면 함수 $h(x)$는 $x=k$에서 불연속이므로 $k=a$이고
$4k+2=-(-2k-3)$에서 $k=a=\frac{1}{2}$
그러므로 ㉡ 또는 ㉢을 만족시키는 실수 $k$의 개수는 실수 $a$의 값에 따라서 최대 2이다.
그러므로 $a=\frac{1}{2}$이고
$f(\alpha_1)=0$ 또는 $f(\alpha_3)=0$이며
함수 $g(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$에서만 불연속이다.

( i ) $f(\alpha_1)=0$일 때




함수 $g(x)$가 $x=\alpha_2$, $x=\alpha_3$에서 불연속이므로
$\alpha_2=-\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{1}{2}$
$g(0)<0$이므로 $g(0)=\frac{40}{3}$을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(\alpha_3)=0$일 때




함수 $g(x)$가 $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$에서 불연속이므로
$\alpha_1=-\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$

$f'(x)=16\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-\alpha_3)$
$=16x^3-16\alpha_3x^2-4x+4\alpha_3$

에서

$f(x)=\int\left(16x^3-16\alpha_3x^2-4x+4\alpha_3\right)dx$
$=4x^4-\frac{16}{3}\alpha_3x^3-2x^2+4\alpha_3x+C$
($C$는 적분상수)

$f(0)=g(0)=\frac{40}{3}$이므로 $C=\frac{40}{3}$

$f(\alpha_3)=-\frac{4}{3}\alpha_3^4+2\alpha_3^2+\frac{40}{3}=0$

$2\alpha_3^4-3\alpha_3^2-20=0$

$(\alpha_3+2)(\alpha_3-2)(2\alpha_3^2+5)=0$

$\alpha_3>\frac{1}{2}$이므로 $\alpha_3=2$

그러므로

$f(x)=4x^4-\frac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\frac{40}{3}$,

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & \left(x<-\frac{1}{2} \text{ 또는 } \frac{1}{2}\le x<2\right)\\ f(x) & \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2} \text{ 또는 } x\ge 2\right)\end{cases},$$

$$h(x)=\begin{cases}4x+2 & \left(x<\frac{1}{2}\right)\\ -2x-3 & \left(x\ge\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 $g(1)\times h(3)=\left(-\frac{38}{3}\right)\times(-9)=114$

## [기하]

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **23** | ③ | **24** | ④ | **25** | ① | **26** | ② | **27** | ③ |
| **28** | ④ | **29** | 24 | **30** | 36 | | | | |

**23. [출제의도] 쌍곡선의 점근선 계산하기**

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{36}=1$의 점근선의 방정식은
$y=\pm\frac{6}{a}x$이므로 $\frac{6}{a}=2$에서 $a=3$

**24. [출제의도] 벡터의 연산 이해하기**

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 방향이 같으므로
$\vec{b}=k\vec{a}\,(k>0)$

$|\vec{a}-2\vec{b}|=|(1-2k)\vec{a}|$
$=|1-2k||\vec{a}|=6$

$|1-2k|=2$에서 $k>0$이므로 $k=\frac{3}{2}$

따라서 $|\vec{b}|=|k\vec{a}|=|k|\times|\vec{a}|=\frac{9}{2}$

**25. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기**

타원 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1}{2}x+y_1y=1$

직선 $\frac{x_1}{2}x+y_1y=1$의 기울기는 $-\frac{x_1}{2y_1}$

$\mathrm{F}(1, 0)$이므로 직선 PF의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1-1}$

$-\frac{x_1}{2y_1}\times\frac{y_1}{x_1-1}=1$이므로 $\frac{x_1}{x_1-1}=-2$에서 $x_1=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+y_1^2=1$에서 $y_1^2=\frac{7}{9}$

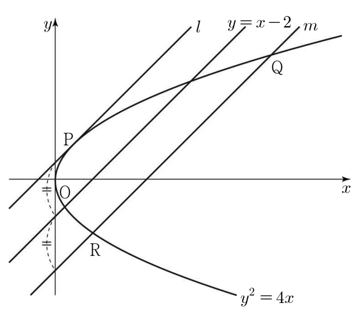
따라서 $x_1^2+y_1^2=\frac{4}{9}+\frac{7}{9}=\frac{11}{9}$

**26. [출제의도] 쌍곡선의 정의 이해하기**

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF}}=k\,(k>0)$이라 하면
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$의 주축의 길이가 $2a$이므로
$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=2a+k$
$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=2a$에서 $\overline{\mathrm{QF'}}=k-2a$
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}=(2a+k)-(k-2a)=4a$
$\overline{\mathrm{PQ}}=8$이므로 $a=2$
$c^2=a^2+16=20$에서 $c=2\sqrt{5}$
따라서 $\overline{\mathrm{FF'}}=2c=4\sqrt{5}$

**27. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식을 이용하여 추론하기**

포물선 $y^2=4x$에 접하고 기울기가 1인 직선을 $l$, 기울기가 1인 직선 중 직선 $y=x-2$와의 거리가 두 직선 $y=x-2$, $l$ 사이의 거리와 같으면서 포물선과 서로 다른 두 점에서 만나는 직선을 $m$이라 하자.
직선 $y=x-2$로부터의 거리가 같은 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이 3개뿐이므로 세 점 P, Q, R 중 하나는 직선 $l$이 포물선에 접하는 점이고, 나머지 두 점은 직선 $m$과 포물선의 교점이어야 한다.
이제 직선 $l$이 포물선에 접하는 점을 P, 직선 $m$과 포물선이 만나는 두 점을 Q, R이라 하자.




직선 $l$의 방정식은 $y=x+1$
두 직선 $y=x-2$, $m$의 $y$절편의 차는
두 직선 $y=x+1$, $y=x-2$의 $y$절편의 차인

3이어야 하므로 직선 $m$의 방정식은 $y=x-5$

세 점 P, Q, R의 $x$좌표를 각각 $x_1$, $x_2$, $x_3$이라 하면

$(x+1)^2=4x$에서 $x_1=1$

$(x-5)^2=4x$에서 $x^2-14x+25=0$이고

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_2+x_3=14$

세 점 P, Q, R에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{H_3}$이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{RF}}&=\overline{\mathrm{PH_1}}+\overline{\mathrm{QH_2}}+\overline{\mathrm{RH_3}}\\&=(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)\\&=x_1+(x_2+x_3)+3\end{aligned}$$

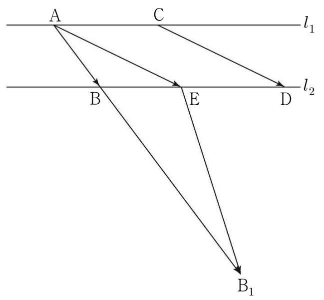
따라서 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{RF}}=1+14+3=18$

**28. [출제의도] 벡터의 연산을 활용하여 문제해결하기**

점 A를 시점으로 하는 벡터 $4\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 종점을 $\mathrm{B_1}$이라 하자.

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$의 시점이 A가 되도록 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$를 평행이동시킨 벡터의 종점을 E라 하면

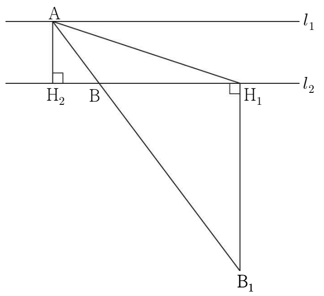
$4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{EB_1}}$




점 $\mathrm{B_1}$에서 직선 $l_2$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면 점 E가 점 $\mathrm{H_1}$일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{EB_1}}|$의 값은 최소이다.

$|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$의 최솟값이 12이므로 $\overline{\mathrm{B_1H_1}}=12$

점 A에서 직선 $l_2$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하자.




삼각형 $\mathrm{AH_2B}$, $\mathrm{B_1H_1B}$는 서로 닮음이고

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BB_1}}=15$이므로 닮음비는 $1:3$이다.

$\overline{\mathrm{AH_2}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{B_1H_1}}=4$이므로 $d=4$

$\overline{\mathrm{BH_2}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH_2}}^2}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BH_1}}=3\overline{\mathrm{BH_2}}=9$

$\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\overline{\mathrm{BH_1}}+\overline{\mathrm{BH_2}}=12$

그러므로

$$\begin{aligned}k=\overline{\mathrm{AH_1}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{AH_2}}^2+\overline{\mathrm{H_1H_2}}^2}\\&=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}\end{aligned}$$

따라서 $d\times k=16\sqrt{10}$

**29. [출제의도] 포물선의 정의를 활용하여 문제해결하기**

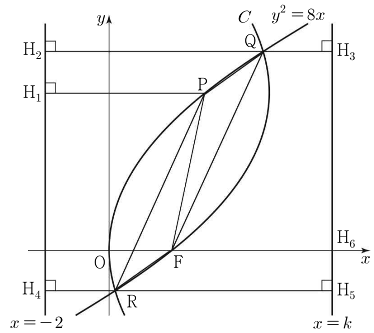
포물선 $y^2=8x$의 초점은 $\mathrm{F}(2,0)$이고

준선의 방정식은 $x=-2$

점 P에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$,

점 Q에서 두 직선 $x=-2$, $x=k$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{H_3}$,

점 R에서 두 직선 $x=-2$, $x=k$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_4}$, $\mathrm{H_5}$라 하자.




포물선 $C$에서 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RH_5}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QH_3}}$이고,

포물선 $y^2=8x$에서 $\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{QH_2}}$, $\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{RH_4}}$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{RH_5}}+\overline{\mathrm{RH_4}}=\overline{\mathrm{H_4H_5}}=k+2$

$\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QH_2}}+\overline{\mathrm{QH_3}}=\overline{\mathrm{H_2H_3}}=k+2$

사각형 PRFQ의 둘레의 길이가 18이므로

$18=\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{FR}}+\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}=2(k+2)$에서 $k=7$

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하고, 직선 $x=7$이 $x$축과 만나는 점을 $\mathrm{H_6}$이라 하자.

포물선 $C$에서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FH_6}}=5$이고,

포물선 $y^2=8x$에서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH_1}}=x_1+2$이므로 $x_1=3$

점 P가 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로 $y_1=2\sqrt{6}$

점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 T라 하면

$\overline{\mathrm{PT}}=2\sqrt{6}$이고 삼각형 OFP의 넓이 $S$는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OF}}\times\overline{\mathrm{PT}}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

따라서 $S^2=24$

**30. [출제의도] 타원의 정의를 이용하여 추론하기**

$\mathrm{A}(a,0)$이라 하면 타원 $E_1$의 장축의 길이가 $2a$이므로

$\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{BF}}=2a$

타원 $E_2$가 $x$축과 만나는 점 중 F′이 아닌 점을 C라 하면 타원 $E_2$의 장축의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{F'C}}=\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{AC}}&=\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{F'F}}\\&=(a+c)+2c=a+3c\end{aligned}$$

그러므로 $\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BA}}=a+3c$

$\overline{\mathrm{BF'}}-\overline{\mathrm{BA}}=(\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{BF}})-(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BA}})=a-3c$

$\overline{\mathrm{AF'}}=a+c$이므로 $a-3c=\dfrac{1}{5}(a+c)$에서 $a=4c$

선분 FA의 중점을 O′이라 하면 $\mathrm{O'}\left(\dfrac{5}{2}c, 0\right)$이고

타원 $E_2$의 단축의 길이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{O'F'}}^2-(2\sqrt{3})^2=\overline{\mathrm{O'F}}^2$

$\left(\dfrac{7}{2}c\right)^2-12=\left(\dfrac{3}{2}c\right)^2$에서 $c^2=\dfrac{6}{5}$

따라서 $30\times c^2=36$