2024학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

# 수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 2023.06.05.(월)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01. ⑤ | 02. ④ | 03. ② | 04. ② | 05. ① |
| 06. ④ | 07. ③ | 08. ③ | 09. ① | 10. ② |
| 11. ③ | 12. ⑤ | 13. ① | 14. ③ | 15. ② |
| 16. 3 | 17. 33 | 18. 6 | 19. 8 | 20. 39 |
| 21. 110 | 22. 380 | | | |

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3\times 2^{-1}$$
$$=3\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

**정답** ⑤

2. **출제의도** : 다항함수의 미분과 미분계수의 정의를 이해하고 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=x^2-2x+3$

에서

$f'(x)=2x-2$

이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$$
$$=2\times 3-2$$
$$=4$$

**정답** ④

3. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하고 있는가?

**정답풀이** :

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\times 10$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k+30$$

따라서

$$2\sum_{k=1}^{10}a_k+30=60$$

이므로

$$2\sum_{k=1}^{10}a_k=30$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=15$$

**정답** ②

4. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉,

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$$

에서

$f(1)=4-f(1)$

$2f(1)=4$

따라서 $f(1)=2$

**정답** ②

**5. 출제의도** : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$g(x)=(x^3+1)f(x)$

이므로

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$

이때 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이므로

$g'(1)=3f(1)+2f'(1)$

$=3\times2+2\times3$

$=12$

**정답** ①

**6. 출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이해하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

이므로

$\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$

에서

$\cos\theta=-7\sin\theta$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+49\sin^2\theta=1$

$\sin^2\theta=\frac{1}{50}$

한편, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{7}\cos\theta>0$

따라서

$\sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

**정답** ④

**7. 출제의도** : 로그함수의 점근선을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$이다.

곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$와 직선 $x=a$가 만나는 점 A의 좌표는

$\left(a,\ \log_2\frac{a}{4}\right)$

곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 직선 $x=a$가 만나는 점 B의 좌표는

$\left(a,\ \log_{\frac{1}{2}}a\right)$

한편, $a>2$에서

$\log_2\frac{a}{4}>\log_2\frac{2}{4}=-1$,

$\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}2=-1$

이므로

$\log_2\frac{a}{4}>\log_{\frac{1}{2}}a$

이때,

$\overline{AB}=\log_2\frac{a}{4}-\log_{\frac{1}{2}}a$

$=(\log_2a-2)+\log_2a$

$=2\log_2a-2$

이고,

$\overline{AB}=4$

이므로

$2\log_2 a - 2 = 4$

$\log_2 a = 3$

따라서 $a = 2^3 = 8$

**정답 ③**

8. **출제의도** : 함수의 그래프의 개형을 이용하여 두 곡선이 두 점에서 만나도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

두 곡선 $y = 2x^2 - 1$, $y = x^3 - x^2 + k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면

방정식 $2x^2 - 1 = x^3 - x^2 + k$, 즉

$-x^3 + 3x^2 - 1 = k$ …… ㉠

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y = -x^3 + 3x^2 - 1$과 직선 $y = k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$이라 하면

$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$

$f'(x) = 0$에서

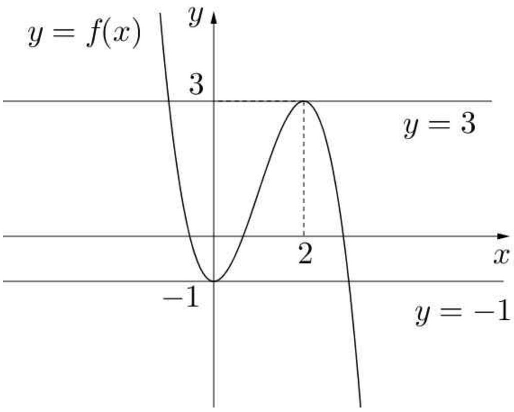
$x = 0$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극솟값 $f(0) = -1$을 갖고, $x = 2$에서 극댓값 $f(2) = 3$을 갖는다.

이때 함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




따라서 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 $k$의 값은 3이다.

**정답 ③**

9. **출제의도** : 주어진 조건을 이용하여 분수꼴로 나타낸 수열의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$에서

$n = 1$일 때

$\frac{1}{a_1} = 3$이므로

$a_1 = \frac{1}{3}$

$n \geq 2$일 때

$$\frac{1}{(2n-1)a_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)a_k}$$
$$= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$$
$$= 2n + 1$$

이므로 $(2n-1)a_n = \frac{1}{2n+1}$에서

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

이때 $n=1$일 때 $a_1=\frac{1}{3}$이므로

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\ (n\geq 1)$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}a_n&=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}\\&=\frac{10}{21}\end{aligned}$$

**정답** ①

10. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선과 좌표축으로 둘러싸인 두 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2,0)$, $(3,0)$이다.

이때

$$(A\text{의 넓이})=\int_0^2 f(x)dx,$$

$$(B\text{의 넓이})=\int_2^3\{-f(x)\}dx$$

이므로

$(A$의 넓이$)-(B$의 넓이$)$

$$\begin{aligned}&=\int_0^2 f(x)dx-\int_2^3\{-f(x)\}dx\\&=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx\\&=\int_0^3 f(x)dx=3\end{aligned}$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)dx&=k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx\\&=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3\\&=k\left(\frac{81}{4}-45+27\right)\\&=\frac{9}{4}k\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{9}{4}k=3$$

따라서

$$k=\frac{4}{3}$$

**정답** ②

11. **출제의도** : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

**정답풀이** :

점 P의 좌표를 $(s,s^2)$이라 하면 점 P에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선의 기울기가 $2t$가 되어야 한다.

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

이므로

$2s=2t$
에서
$s=t$
즉, $\mathrm{P}(t,\, t^2)$
이때 직선 OP의 방정식은 $y=tx$이므로
$tx=2tx-1$
에서
$x=\dfrac{1}{t}$
즉, 점 Q의 좌표는
$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\, 1\right)$
따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}&=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}\\&=\lim_{t\to 1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}\\&=\lim_{t\to 1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

**정답** ③

**12. 출제의도** : 등차수열의 정의와 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq 0)$이라 하자.
$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})\\&=a_{n+2}-a_n\\&=2d\end{aligned}$$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.
( i ) $d>0$일 때,
$a_1=a_2-d=-4-d<0$
$a_2=-4<0$
이므로
$b_1=a_1+a_2=-8-d<a_1$
$n(A\cap B)=3$이려면
$b_2=a_1$ 또는 $b_3=a_1$
이어야 한다.
① $b_2=a_1$일 때,
$b_3=a_3$, $b_4=a_5$
이므로
$n(A\cap B)=3$
이다.
한편, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로
$b_2=a_1$에서
$-8+d=-4-d$
$2d=4$
$d=2$
따라서

$$\begin{aligned}a_{20}&=a_2+18d\\&=-4+18\times 2\\&=32\end{aligned}$$

② $b_3=a_1$일 때,
$b_4=a_3$, $b_5=a_5$
이므로
$n(A\cap B)=3$
이다.
한편, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로
$b_3=a_1$에서
$-8+3d=-4-d$
$4d=4$
$d=1$
따라서
$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times1$

$=14$

(ii) $d<0$일 때,

③ $a_1>0$이면 $a_2<b_1<a_1$이므로

$n(A\cap B)=0$

④ $a_1=0$이면 $b_1=a_2$, $b_2=a_4$이므로

$n(A\cap B)=2$

⑤ $a_1<0$이면 $b_1<a_2$이므로

$n(A\cap B)\le 2$

③, ④, ⑤에서

$d<0$이면 주어진 조건을 만족하지 못한다.

(i), (ii)에서

$a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 $a_{20}$의 값의 합은

$32+14=46$

**정답 ⑤**

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq0)$이라 하자.

$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})$

$=a_{n+2}-a_n$

$=2d$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

$n(A\cap B)=3$이려면

$A\cap B=\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_i,\ b_{i+1},\ b_{i+2}\}$

(단, $i=1,\ 2,\ 3$)

이어야 한다.

(i) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$인 경우

$a_1=b_1$

이어야 한다.

이때, $b_1=a_1+a_2=a_1-4$이므로

$a_1=a_1-4$

즉, $a_1$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_2,\ b_3,\ b_4\}$인 경우

$a_1=b_2$

이어야 한다.

이때, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로

$a_1=b_2$에서

$-4-d=-8+d$

$2d=4$

$d=2$

따라서

$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times2$

$=32$

(iii) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_3,\ b_4,\ b_5\}$인 경우

$a_1=b_3$

이어야 한다.

이때, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로

$a_1=b_3$에서

$-4-d=-8+3d$

$4d=4$

$d=1$

따라서

$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times1$

$=14$

(i), (ii), (iii)에서

$a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 $a_{20}$의 값의 합은

$32+14=46$

13. **출제의도** : 사인법칙, 코사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$\angle\mathrm{BCD}=\alpha$, $\angle\mathrm{DAB}=\beta\ \left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$,

$\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=b$라 하자.

삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$, $\cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=9+4-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=17$$

그러므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2-2ab\cos\beta=17$ ……㉠

한편, 점 E가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 두 삼각형 $\mathrm{AP_1P_2}$, $\mathrm{CQ_1Q_2}$의 외접원의 반지름의 길이를 각각 $r$, $2r$로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin\beta}=2r$, $\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin\alpha}=4r$

이므로

$$\sin\alpha:\sin\beta=\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{4r}:\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{2r}$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}:3$$

즉, $\sin\beta=\frac{6\sin\alpha}{5\sqrt{2}}$

이때

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\sin\beta=\frac{6}{5\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{5}$$

$\cos\beta<0$이므로

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}$$
$$=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}$$
$$=-\sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$=-\frac{3}{5}$$

삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}ab\sin\beta=2$

에서

$\frac{1}{2}ab\times\frac{4}{5}=2$

$ab=5$

㉠에서

$a^2+b^2-2\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=17$

$a^2+b^2=11$

따라서

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=11+2\times5=21$

이므로

$a+b=\sqrt{21}$

**정답** ①

**14. 출제의도** : 정적분을 활용하여 위치의 변화량의 최댓값을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$a\neq0$, $a\neq\frac{1}{2}$, $a\neq1$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 세 번 바꾼다.

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $a=0$일 때

$v(t)=-t^3(t-1)$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t^3(t-1)dt=\int_0^2(-t^4+t^3)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+4$$

$$=-\frac{12}{5}$$

(ⅱ) $a=\frac{1}{2}$일 때

$v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=\frac{1}{2}$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2dt$$

$$=\int_0^2 -\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)(t^2-2t+1)dt$$

$$=\int_0^2\left(-t^4+\frac{5}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+10-\frac{16}{3}+1$$

$$=-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}+11$$

$$=\frac{(-96)+(-80)+165}{15}$$

$$=-\frac{11}{15}$$

(ⅲ) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$

이때 점 P는 출발 후 운동방향을 $t=2$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$

$$=\int_0^2 -t(t^2-2t+1)(t-2)dt$$

$$=\int_0^2(-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4$$

$$=-\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+20$$

$$=\frac{(-96)+(-200)+300}{15}$$

$$=\frac{4}{15}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

**정답 ③**

**15. 출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$ 이므로 $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$은 어느 것도 0이 될 수 없다.

$a_1=k>0$이므로

$a_2=a_1-2-k=-2<0$

$a_3=a_2+4-k=2-k$

( i ) $a_3=2-k>0$인 경우

$2-k>0$에서 $k<2$ 즉 $k=1$이므로

$a_4=a_3-6-k=-6<0$

$a_5=a_4+8-k=1>0$

$a_6=a_5-10-k=-10<0$

따라서 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

( ii ) $a_3=2-k<0$인 경우

즉 $k>2$ 이므로

$a_4=a_3+6-k=8-2k$

① $a_4=8-2k>0$인 경우

즉 $k<4$ 이므로 $2<k<4$에서 $k=3$일 때

$a_4=8-6=2$

$a_5=a_4-8-k=-9<0$

$a_6=a_5+10-k=-2<0$

따라서 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

② $a_4=8-2k<0$인 경우

즉 $k>4$ 이므로

$a_5=a_4+8-k=16-3k$

㉠ $a_5=16-3k>0$인 경우

즉 $k<\frac{16}{3}$에서 $4<k<\frac{16}{3}$ 이므로

$k=5$

$a_5=16-15=1$

$a_6=a_5-10-k=-14<0$

따라서 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_5=16-3k<0$인 경우

즉 $k>\frac{16}{3}$이므로 $k\geq 6$인 경우이다.

이때

$a_6=a_5+10-k=26-4k$

이고 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이기 위해서는

$a_6>0$이어야 하므로

$a_6=26-4k>0$

$k<\frac{13}{2}$

즉 $6\leq k<\frac{13}{2}$ 에서 $k=6$

( i ), ( ii )에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 $k$의 값의 합은

$3+5+6=14$

**정답** ②

**16. 출제의도** : 지수부등식을 만족시키는 자연수의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(2^{-2}\right)^x=2^{-2x}$이므로 주어진 부등식은

$2^{x-6}\leq 2^{-2x}$

양변의 밑 2가 1보다 크므로

$x-6\leq -2x$

$3x\leq 6$

$x\leq 2$

따라서 모든 자연수 $x$의 값의 합은

$1+2=3$

**정답** 3

**17. 출제의도** : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$f(x)=\int f'(x)dx$

$\quad =\int (8x^3-1)dx$

$\quad =2x^4-x+C$ ($C$는 적분상수)

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서

$f(x)=2x^4-x+3$이므로

$f(2)=32-2+3=33$

**정답 33**

18. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 $-2$를 가지므로

$f(1)=-2$

에서

$a+b+a=-2$

$2a+b=-2$ ……㉠

또, $f'(x)=3ax^2+b$이고 $f'(1)=0$이어야 하므로

$3a+b=0$ ……㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a=2$, $b=-6$

그러므로

$f(x)=2x^3-6x+2$

이고

$f'(x)=6x^2-6$

$\quad =6(x+1)(x-1)$

이때 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $6$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 6을 갖는다.

**정답 6**

19. **출제의도** : 사인함수의 최댓값, 최솟값 및 주기를 이해하고, 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

**정답풀이 :**

함수 $f(x)$의 최솟값이

$-a+8-a=8-2a$

이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$8-2a\geq 0$

즉, $a\leq 4$이어야 한다.

그런데, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$일 때는 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

그러므로 $a=4$

이때 $f(x)=4\sin bx+4$이고 이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로 $0\leq x\leq \frac{2\pi}{b}$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

그러므로 $0\leq x<2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면

$\frac{15\pi}{2b}<2\pi\leq\frac{19\pi}{2b}$

이어야 한다.

즉, $\frac{15}{4}<b\leq\frac{19}{4}$이고 $b$는 자연수이므로

$b=4$

따라서 $a+b=4+4=8$

**정답** 8

20. **출제의도** : 정적분의 성질을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$F'(x)=f(x)$

이고

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$
$$=F(x)-F(0)$$

이므로

$g'(x)=f(x)$

그러므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)\ge g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1,\ \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉠

즉, $g'(4)=f(4)=0$이므로

$f(x)=(x-4)(x-a)$ ($a$는 상수) … ㉡

로 놓을 수 있다.

(ⅰ) $g(4)\ge 0$인 경우

$x\ge 1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)\ge g(4)\ge 0$이므로 이 범위에서

$|g(x)|=g(x)$

이다.

조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $|g(x)|\ge|g(3)|$, 즉 $g(x)\ge g(3)$이어야 한다. … ㉢

그런데 ㉠에서 $g(3)>g(4)$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $g(4)<0$인 경우

$x\ge 1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $|g(x)|\ge|g(3)|$이려면

$g(3)=0$ … ㉣

이어야 한다.

㉡에서 $f(x)=x^2-(a+4)x+4a$이므로

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax+C$ (단, $C$는 적분상수)

그러므로

$$g(x)=F(x)-F(0)$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax$$

㉣에서

$$g(3)=9-\frac{9}{2}(a+4)+12a=0$$

$$\frac{15}{2}a=9$$

$$a=\frac{6}{5}$$

따라서 $f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$이므로

$$f(9)=(9-4)\left(9-\frac{6}{5}\right)$$
$$=5\times\frac{39}{5}=39$$

**정답** 39

**[다른 풀이]**

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt \qquad \cdots ㉠$$

는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

㉠에서

$g(0)=0$ … ㉡

조건에서 $x \geq 1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉢

그러므로 $g'(4)=0$ … ㉣

(ⅰ) $g(4) \geq 0$인 경우

$x \geq 1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x) \geq g(4) \geq 0$이므로 이 범위에서

$|g(x)|=g(x)$

이다.

조건에서 $x \geq 1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $|g(x)| \geq |g(3)|$, 즉 $g(x) \geq g(3)$이어야 하므로 $g(3)=g(4)$이어야 한다.

이는 ㉢에 모순이다.

(ⅱ) $g(4)<0$인 경우

$x \geq 1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $|g(x)| \geq |g(3)|$이려면

$g(3)=0$ … ㉤

이어야 한다.

㉡, ㉤에서

$$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x+a)$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{a-3}{3}x^2-ax \ (a\text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$g'(x)=x^2+\frac{2(a-3)}{3}x-a$$

㉣에서

$$g'(4)=16+\frac{8}{3}(a-3)-a=8+\frac{5}{3}a=0,$$

$$a=-\frac{24}{5}$$

㉠에서

$$f(x)=g'(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$$

이므로

$$f(9)=81-\frac{234}{5}+\frac{24}{5}$$

$$=81-\frac{210}{5}=39$$

**21. 출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 활용할 수 있는가?

**정답풀이** :

ㄱ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선 $y=\log_2 x$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 $t$만큼 평행이동한 것이므로 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

또, 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 $x$축의 방향으로 $t$만큼 평행이동한 것이므로 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

그러므로 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$은 한 점에서 만난다.

$t=1$일 때, 곡선 $y=1-\log_2 x$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

또, 곡선 $y=2^{x-1}$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

그러므로

$f(1)=1$

$t=2$일 때, 곡선 $y=2-\log_2 x$는 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.

또, 곡선 $y=2^{x-2}$은 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.

그러므로

$f(2)=2$

이 명제가 참이므로

$A=100$

ㄴ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선

$y=-\log_2 x$를 $y$축의 방향으로 $t$만큼 평행이동한 것이다. 이때 $t$의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 $x$좌표는 증가한다.

이때 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 $x$축의 방향으로 $t$만큼 평행이동한 것이므로 $t$의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$의 교점의 $x$좌표는 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 $x$좌표보다 커진다.

그러므로 $t$의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

이 명제가 참이므로 $B=10$

ㄷ. $g(x)=t-\log_2 x$, $h(x)=2^{x-t}$이라 하면 함수 $y=g(x)$는 감소함수이고, 함수 $y=h(x)$는 증가함수이므로

$f(t)\ge t$이기 위해서는

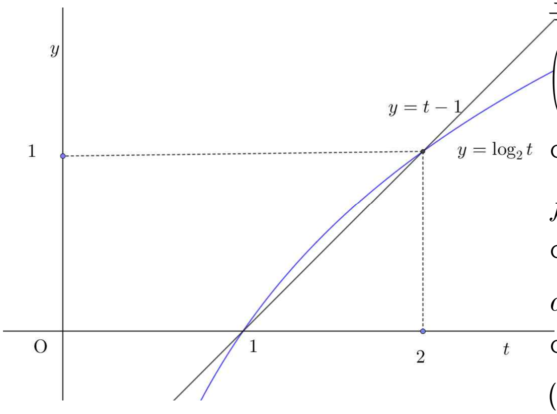
$g(t)\ge h(t)$

이어야 한다. 즉,

$t-\log_2 t \ge 2^{t-t}$

$t-1 \ge \log_2 t$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

이때 두 함수 $y=\log_2 t$, $y=t-1$의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(2, 1)$에서 만나고 다음 그림과 같다.




위에서 $1<t<2$일 때는 함수 $y=\log_2 t$의 그래프가 직선 $y=t-1$보다 위쪽에 있으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

즉, $1<t<2$일 때는 부등식

$f(t)\ge t$

를 만족시키지 못한다.

이 명제가 거짓이므로

$C=0$

이상에서 $A=100$, $B=10$, $C=0$이므로

$A+B+C=100+10+0$

$=110$

**정답** 110

**22. 출제의도** : 도함수를 활용하고 함수의 극대, 극소를 고려하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 찾아 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

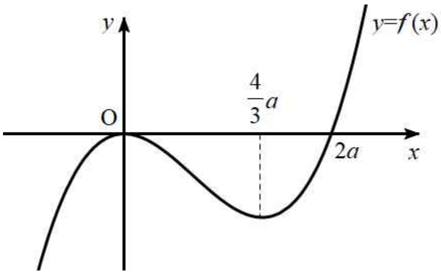
주어진 조건을 만족시키려면 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 두 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 $x_1$, $x_2$, $x_3$이 존재해야 하는데, 그러려면 극대 또는 극소가 되는 점이 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.

이때 $f(x)=x^3-2ax^2$에서

$f'(x)=3x^2-4ax$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 $a$의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $a>0$일 때




$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

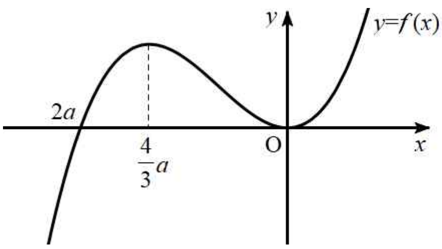
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 $k$의 값의 곱이 $-12$가 되려면 이 구간에 $k=3$, $k=4$가 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<3$, $\frac{4}{3}a>4$

$3<a<\frac{27}{8}$

그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 $a$는 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때




$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 $k$의 값의 곱이 $-12$가 되려면 이 구간에 $k=-4$, $k=-3$이 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<-4$, $\frac{4}{3}a>-3$

$-\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$

즉, $a=-2$

(i), (ii)에서 $a=-2$이므로

$f(x)=x^3+4x^2$

$f'(x)=3x^2+8x$

따라서

$f'(10)=3\times10^2+8\times10=380$

**정답** 380

■ **[선택: 확률과 통계]**
23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ① 27. ②
28. ⑤ 29. 25 30. 51

**23. 출제의도** : 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
구하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=5\times4\times3=60$

**정답 ③**

**24. 출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 두 사건에 대하여 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=1-\mathrm{P}(B^C)\\&=1-\frac{7}{18}\\&=\frac{11}{18}\end{aligned}$$
따라서
두 사건 $A\cap B^C$와 $B$는 서로소이므로
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{9}+\frac{11}{18}\\&=\frac{13}{18}\end{aligned}$$

**정답 ④**

**25. 출제의도** : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
흰색 손수건이 2장 이상인 사건을 $A$라 하면
$A^C$는 흰색 손수건이 없거나 1장인 사건이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C)&=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}+\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}\\&=\frac{1\times5}{126}+\frac{4\times10}{126}\\&=\frac{5}{14}\end{aligned}$$
따라서
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{5}{14}\\&=\frac{9}{14}\end{aligned}$$

**정답 ③**

**26. 출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
$(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.
(ⅰ) $(x-1)^6$의 전개식에서 $x^2$항은
${}_6\mathrm{C}_2x^2(-1)^4=15x^2$
$(2x+1)^7$의 전개식에서 상수항은
$1^7=1$
(ⅱ) $(x-1)^6$의 전개식에서 $x$항은
${}_6\mathrm{C}_1x^1(-1)^5=-6x$
$(2x+1)^7$의 전개식에서 $x$항은
${}_7\mathrm{C}_1(2x)1^6=14x$
(ⅲ) $(x-1)^6$의 전개식에서 상수항은
$(-1)^6=1$
$(2x+1)^7$의 전개식에서 $x^2$항은

${}_7\mathrm{C}_2(2x)^2 1^5 = 21\times 4x^2 = 84x^2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 $x^2$의 계수는

$15x^2\times 1+(-6x)\times 14x+1\times 84x^2$

$=15x^2-84x^2+84x^2$

$=15x^2$

이므로 $x^2$의 계수는 15이다.

**정답 ①**

**27. 출제의도** : 독립시행의 확률을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 $a\times b$가 4의 배수인 사건을 $A$, $a+b\le 7$인 사건을 $B$라 하면 구하는 확률을 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

(ⅰ) $a$, $b$가 모두 짝수일 확률은

${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(ⅱ) $a$, $b$ 중 하나는 4이고 다른 하나는 홀수일 확률은

${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

한편, 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수의 모든 순서쌍 $(a, b)$의 개수는 $6\times 6=36$이다.

(ⅲ) $a$, $b$가 모두 짝수인 동시에 $a+b\le 7$인 순서쌍 $(a, b)$는

$(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$

의 3개다.

(ⅳ) $a$, $b$ 중 하나는 4이고 다른 하나는 홀수인 동시에 $a+b\le 7$인 순서쌍 $(a, b)$는

$(4, 1)$, $(4, 3)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$

의 4개다.

(ⅲ), (ⅳ)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3+4}{36}=\frac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{12}}=\frac{7}{15}$

**정답 ②**

**28. 출제의도** : 중복순열을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

조건 (가)에서 $f(1), f(3), f(5)$의 값은 모두 홀수이다.

(ⅰ) 함수 $f$의 치역에 홀수가 1개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

이때 $f(2)=2, f(4)=4$이므로

구하는 함수 $f$의 개수는

3

(ⅱ) 함수 $f$의 치역에 홀수가 2개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

① 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 1이면

$f(1), f(3), f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2$

$f(2), f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2$

② 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 2이면

$f(1), f(3), f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3-2=6$

$f(2), f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times2=4$

이상에서 구하는 함수 $f$의 개수는

$3\times(2\times2+6\times4)=84$

(ⅲ) 함수 $f$의 치역에 홀수가 3개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

① 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 1이면

$f(1), f(3), f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3$

$f(2), f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$1$

② 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 2이면

$f(1), f(3), f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3C_2\times({}_2\Pi_3-2)=18$

$f(2), f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2$

③ 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 3이면

$f(1), f(3), f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3!=6$

$f(2), f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

이상에서 구하는 함수 $f$의 개수는

$1\times(3\times1+18\times2+6\times3)=57$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

구하는 함수 $f$의 개수는

$3+84+57=144$

**정답 ⑤**

**29. 출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

검은색 카드의 왼쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 $a$, 두 검은색 카드의 사이에 있는 흰색 카드의 장수를 $b$, 검은색 카드의 오른쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 $c$라 하면

$a+b+c=8$

조건 (나)와 조건 (다)에서

$b\ge2$이고, 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가 모두 3의 배수가 아닌 경우를 제외해야 한다.

음이 아닌 정수 $b'$에 대하여

$b=b'+2$으로 놓으면

$a+(b'+2)+c=8$

$a+b'+c=6$

방정식 $a+b'+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a, b', c$의 모든 순서쌍 $(a, b', c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{6}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=28$
이때 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가
1, 2인 경우, 4, 5인 경우, 7, 8인 경우를 제외해야 한다.
따라서 구하는 경우의 수는
$28-3=25$

**정답 25**

[다른 풀이]
( i ) 왼쪽의 검은색 카드가 1이 적힌 카드의 왼쪽에 있는 경우
오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 3이 적힌 카드의 오른쪽이므로
경우의 수는 6
( ii ) 왼쪽의 검은색 카드가 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드의 사이에 있는 경우
오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 3이 적힌 카드의 오른쪽이므로
경우의 수는 6
(iii) 왼쪽의 검은색 카드가 2가 적힌 카드와 3이 적힌 카드의 사이에 있는 경우
오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 4가 적힌 카드의 오른쪽이므로
경우의 수는 5
(iv) 왼쪽의 검은색 카드가 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드의 사이에 있는 경우
오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 6이 적힌 카드의 오른쪽이므로
경우의 수는 3
( v ) 왼쪽의 검은색 카드가 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드의 사이에 있는 경우
오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 6이 적힌 카드의 오른쪽이므로
경우의 수는 3
(vi) 왼쪽의 검은색 카드가 5가 적힌 카드와 6이 적힌 카드의 사이에 있는 경우
오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 7이 적힌 카드의 오른쪽이므로
경우의 수는 2
( i )~(vi)에서 구하는 경우의 수는
$6+6+5+3+3+2=25$

30. **출제의도** : 경우의 수를 이용하여 수학적 확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
( i ) 꺼낸 두 공이 서로 다른 색인 경우
얻는 점수가 12이므로 조건을 만족시킨다.
이 경우의 확률은
$$\frac{{}_{4}C_{1}\times{}_{4}C_{1}}{{}_{8}C_{2}}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$$
( ii ) 꺼낸 두 공이 서로 같은 색인 경우
8개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_{8}C_{2}=28$
( ii -1) 꺼낸 두 공의 색이 모두 흰 색인 경우
두 공에 적힌 수의 곱이 짝수이면 조건을 만족시키므로 이 경우의 수는
${}_{4}C_{2}-{}_{2}C_{2}=6-1=5$
( ii -2) 꺼낸 두 공이 모두 검은 색인 경우
두 공에 적힌 수의 집합이
$\{4,\ 5\}$, $\{4,\ 6\}$
이어야 하므로 이 경우의 수는 2이다.

그러므로 꺼낸 두 공이 서로 같은 색이고 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률은
$$\frac{5+2}{28}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{7}+\frac{1}{4}=\frac{23}{28}$$

이므로

$p+q=28+23=51$

**정답** 51