2024학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가
수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 2023.06.05.(월)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ④	03. ②	04. ②	05. ①
06. ④	07. ③	08. ③	09. ①	10. ②
11. ③	12. ⑤	13. ①	14. ③	15. ②
16. 3	17. 33	18. 6	19. 8	20. 39
21. 110	22. 380			

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3\times 2^{-1}$$
$$=3\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 다항함수의 미분과 미분계수의 정의를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2-2x+3$

에서

$f'(x)=2x-2$

이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$$
$$=2\times 3-2$$
$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\times 10$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k+30$$

따라서

$$2\sum_{k=1}^{10}a_k+30=60$$

이므로

$$2\sum_{k=1}^{10}a_k=30$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=15$$

정답 ②

4. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉,

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$$

에서

$f(1)=4-f(1)$

$2f(1)=4$
따라서 $f(1)=2$

정답 ②

5. 출제의도 : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$g(x)=(x^3+1)f(x)$
이므로
$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$
이때 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이므로
$$\begin{aligned}g'(1)&=3f(1)+2f'(1)\\&=3\times2+2\times3\\&=12\end{aligned}$$

정답 ①

6. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이해하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
이므로
$\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$
에서
$\cos\theta=-7\sin\theta$
이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
$\sin^2\theta+49\sin^2\theta=1$
$\sin^2\theta=\frac{1}{50}$
한편, $\cos\theta<0$이므로
$\sin\theta=-\frac{1}{7}\cos\theta>0$
따라서
$\sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

정답 ④

7. 출제의도 : 로그함수의 점근선을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$이다.
곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$와 직선 $x=a$가 만나는 점 A의 좌표는
$\left(a,\ \log_2\frac{a}{4}\right)$
곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 직선 $x=a$가 만나는 점 B의 좌표는
$\left(a,\ \log_{\frac{1}{2}}a\right)$
한편, $a>2$에서
$\log_2\frac{a}{4}>\log_2\frac{2}{4}=-1$,
$\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}2=-1$
이므로
$\log_2\frac{a}{4}>\log_{\frac{1}{2}}a$
이때,
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\log_2\frac{a}{4}-\log_{\frac{1}{2}}a\\&=(\log_2 a-2)+\log_2 a\\&=2\log_2 a-2\end{aligned}$$
이고,
$\overline{\mathrm{AB}}=4$

이므로

$2\log_2 a-2=4$

$\log_2 a=3$

따라서 $a=2^3=8$

정답 ③

8. **출제의도** : 함수의 그래프의 개형을 이용하여 두 곡선이 두 점에서 만나도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면

방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉

$-x^3+3x^2-1=k \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+3x^2-1$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

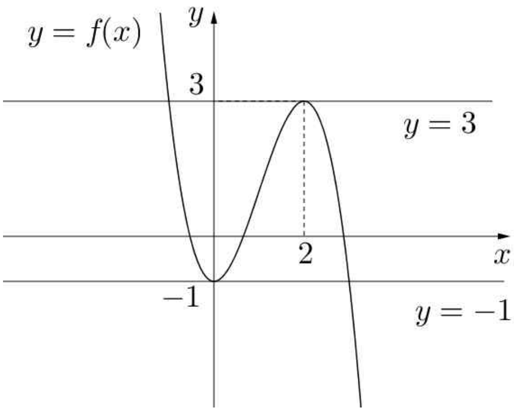
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값

$f(0)=-1$을 갖고, $x=2$에서 극댓값

$f(2)=3$을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k의 값은 3이다.

정답 ③

9. **출제의도** : 주어진 조건을 이용하여 분수꼴로 나타낸 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$에서

$n=1$일 때

$\frac{1}{a_1}=3$이므로

$a_1=\frac{1}{3}$

$n\geq 2$일 때

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)a_k}$$
$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=2n+1$$

이므로 $(2n-1)a_n=\frac{1}{2n+1}$에서

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

이때 $n=1$일 때 $a_1 = \frac{1}{3}$이므로

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (n \geq 1)$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots \right. \\ &\qquad \left. +\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{20}{21} \\ &= \frac{10}{21}\end{aligned}$$

정답 ①

10. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선과 좌표축으로 둘러싸인 두 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2, 0)$, $(3, 0)$이다.

이때

$$(A\text{의 넓이}) = \int_0^2 f(x)dx,$$

$$(B\text{의 넓이}) = \int_2^3 \{-f(x)\}dx$$

이므로

$$\begin{aligned}&(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이}) \\ &= \int_0^2 f(x)dx - \int_2^3 \{-f(x)\}dx \\ &= \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ &= \int_0^3 f(x)dx = 3\end{aligned}$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)dx &= k\int_0^3 (x^3-5x^2+6x)dx \\ &= k\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3 \\ &= k\left(\frac{81}{4} - 45 + 27\right) \\ &= \frac{9}{4}k\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{9}{4}k = 3$$

따라서

$$k = \frac{4}{3}$$

정답 ②

11. 출제의도 : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 좌표를 (s, s^2)이라 하면 점 P에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선의 기울기가 $2t$가 되어야 한다.

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

이므로

$2s=2t$
에서
$s=t$
즉, $\mathrm{P}(t,\, t^2)$
이때 직선 OP의 방정식은 $y=tx$이므로
$tx=2tx-1$
에서
$x=\dfrac{1}{t}$
즉, 점 Q의 좌표는
$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\, 1\right)$
따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}&=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}\\&=\lim_{t\to1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}}{1-t}\\&=\lim_{t\to1-}(1+t)\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

정답 ③

12. 출제의도 : 등차수열의 정의와 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq0)$이라 하자.
$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})\\&=a_{n+2}-a_n\\&=2d\end{aligned}$$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.
(i) $d>0$일 때,
$a_1=a_2-d=-4-d<0$
$a_2=-4<0$
이므로
$b_1=a_1+a_2=-8-d<a_1$
$n(A\cap B)=3$이려면
$b_2=a_1$ 또는 $b_3=a_1$
이어야 한다.
① $b_2=a_1$일 때,
$b_3=a_3,\ b_4=a_5$
이므로
$n(A\cap B)=3$
이다.
한편, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로
$b_2=a_1$에서
$-8+d=-4-d$
$2d=4$
$d=2$
따라서

$$\begin{aligned}a_{20}&=a_2+18d\\&=-4+18\times2\\&=32\end{aligned}$$

② $b_3=a_1$일 때,
$b_4=a_3,\ b_5=a_5$
이므로
$n(A\cap B)=3$
이다.
한편, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로
$b_3=a_1$에서
$-8+3d=-4-d$
$4d=4$
$d=1$
따라서
$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times 1$

$=14$

(ⅱ) $d<0$일 때,

③ $a_1>0$이면 $a_2<b_1<a_1$이므로

$n(A\cap B)=0$

④ $a_1=0$이면 $b_1=a_2$, $b_2=a_4$이므로

$n(A\cap B)=2$

⑤ $a_1<0$이면 $b_1<a_2$이므로

$n(A\cap B)\le 2$

③, ④, ⑤에서

$d<0$이면 주어진 조건을 만족하지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$

정답 ⑤

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq 0)$이라 하자.

$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})$

$=a_{n+2}-a_n$

$=2d$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

$n(A\cap B)=3$이려면

$A\cap B=\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_i,\ b_{i+1},\ b_{i+2}\}$

(단, $i=1,\ 2,\ 3$)

이어야 한다.

(ⅰ) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$인 경우

$a_1=b_1$

이어야 한다.

이때, $b_1=a_1+a_2=a_1-4$이므로

$a_1=a_1-4$

즉, a_1의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_2,\ b_3,\ b_4\}$인 경우

$a_1=b_2$

이어야 한다.

이때, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로

$a_1=b_2$에서

$-4-d=-8+d$

$2d=4$

$d=2$

따라서

$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times 2$

$=32$

(ⅲ) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_3,\ b_4,\ b_5\}$인 경우

$a_1=b_3$

이어야 한다.

이때, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로

$a_1=b_3$에서

$-4-d=-8+3d$

$4d=4$

$d=1$

따라서

$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times 1$

$=14$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$

13. 출제의도 : 사인법칙, 코사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle\mathrm{BCD}=\alpha$, $\angle\mathrm{DAB}=\beta$ $\left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$,

$\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=b$라 하자.

삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$, $\cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=9+4-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=17$$

그러므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2-2ab\cos\beta=17$ ……㉠

한편, 점 E가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 두 삼각형 $\mathrm{AP_1P_2}$, $\mathrm{CQ_1Q_2}$의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, $2r$로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin\beta}=2r,\quad \frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin\alpha}=4r$$

이므로

$$\sin\alpha:\sin\beta=\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{4r}:\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{2r}$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}:3$$

즉, $\sin\beta=\frac{6\sin\alpha}{5\sqrt{2}}$

이때

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\sin\beta=\frac{6}{5\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{5}$$

$\cos\beta<0$이므로

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}$$
$$=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}$$
$$=-\sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$=-\frac{3}{5}$$

삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2}ab\sin\beta=2$$

에서

$$\frac{1}{2}ab\times\frac{4}{5}=2$$

$ab=5$

㉠에서

$$a^2+b^2-2\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=17$$

$a^2+b^2=11$

따라서

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=11+2\times5=21$

이므로

$a+b=\sqrt{21}$

정답 ①

14. 출제의도 : 정적분을 활용하여 위치의 변화량의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a\neq0$, $a\neq\frac{1}{2}$, $a\neq1$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 세 번 바꾼다.

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $a=0$일 때

$v(t)=-t^3(t-1)$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t^3(t-1)dt=\int_0^2(-t^4+t^3)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+4$$

$$=-\frac{12}{5}$$

(ⅱ) $a=\frac{1}{2}$일 때

$v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=\frac{1}{2}$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2dt$$

$$=\int_0^2 -\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)(t^2-2t+1)dt$$

$$=\int_0^2\left(-t^4+\frac{5}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+10-\frac{16}{3}+1$$

$$=-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}+11$$

$$=\frac{(-96)+(-80)+165}{15}$$

$$=-\frac{11}{15}$$

(ⅲ) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$

이때 점 P는 출발 후 운동방향을 $t=2$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$

$$=\int_0^2 -t(t^2-2t+1)(t-2)dt$$

$$=\int_0^2(-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4$$

$$=-\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+20$$

$$=\frac{(-96)+(-200)+300}{15}$$

$$=\frac{4}{15}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$ 이므로 a_3, a_4, a_5, a_6은 어느 것도 0이 될 수 없다.

$a_1 = k > 0$이므로

$a_2 = a_1 - 2 - k = -2 < 0$

$a_3 = a_2 + 4 - k = 2 - k$

(i) $a_3 = 2 - k > 0$인 경우

$2 - k > 0$에서 $k < 2$ 즉 $k = 1$이므로

$a_4 = a_3 - 6 - k = -6 < 0$

$a_5 = a_4 + 8 - k = 1 > 0$

$a_6 = a_5 - 10 - k = -10 < 0$

따라서 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a_3 = 2 - k < 0$인 경우

즉 $k > 2$ 이므로

$a_4 = a_3 + 6 - k = 8 - 2k$

① $a_4 = 8 - 2k > 0$인 경우

즉 $k < 4$ 이므로 $2 < k < 4$에서 $k = 3$일 때

$a_4 = 8 - 6 = 2$

$a_5 = a_4 - 8 - k = -9 < 0$

$a_6 = a_5 + 10 - k = -2 < 0$

따라서 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

② $a_4 = 8 - 2k < 0$인 경우

즉 $k > 4$ 이므로

$a_5 = a_4 + 8 - k = 16 - 3k$

㉠ $a_5 = 16 - 3k > 0$인 경우

즉 $k < \frac{16}{3}$에서 $4 < k < \frac{16}{3}$ 이므로

$k = 5$

$a_5 = 16 - 15 = 1$

$a_6 = a_5 - 10 - k = -14 < 0$

따라서 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이므로 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_5 = 16 - 3k < 0$인 경우

즉 $k > \frac{16}{3}$이므로 $k \geq 6$인 경우이다.

이때

$a_6 = a_5 + 10 - k = 26 - 4k$

이고 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이기 위해서는

$a_6 > 0$이어야 하므로

$a_6 = 26 - 4k > 0$

$k < \frac{13}{2}$

즉 $6 \leq k < \frac{13}{2}$ 에서 $k = 6$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합은

$3 + 5 + 6 = 14$

정답 ②

16. 출제의도 : 지수부등식을 만족시키는 자연수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = (2^{-2})^x = 2^{-2x}$이므로 주어진 부등식은

$2^{x-6} \leq 2^{-2x}$

양변의 밑 2가 1보다 크므로

$x - 6 \leq -2x$

$3x \leq 6$

$x \leq 2$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$1 + 2 = 3$

정답 3

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (8x^3-1)\,dx$$
$$=2x^4-x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서

$f(x)=2x^4-x+3$이므로

$f(2)=32-2+3=33$

정답 33

18. 출제의도 : 도함수를 활용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(1)=-2$

에서

$a+b+a=-2$

$2a+b=-2$ ……㉠

또, $f'(x)=3ax^2+b$이고 $f'(1)=0$이어야 하므로

$3a+b=0$ ……㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a=2,\ b=-6$

그러므로

$f(x)=2x^3-6x+2$

이고

$$f'(x)=6x^2-6$$
$$=6(x+1)(x-1)$$

이때 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 6을 갖는다.

정답 6

19. 출제의도 : 사인함수의 최댓값, 최솟값 및 주기를 이해하고, 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 최솟값이

$-a+8-a=8-2a$

이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$8-2a\geq 0$

즉, $a\leq 4$이어야 한다.

그런데, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$일 때는 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

그러므로 $a=4$

이때 $f(x)=4\sin bx+4$이고 이 함수의 주기는 $\dfrac{2\pi}{b}$이므로 $0\leq x\leq \dfrac{2\pi}{b}$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

그러므로 $0\leq x<2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면

$$\frac{15\pi}{2b}<2\pi\leq\frac{19\pi}{2b}$$

이어야 한다.

즉, $\dfrac{15}{4}<b\leq\dfrac{19}{4}$이고 b는 자연수이므로

$b=4$

따라서 $a+b=4+4=8$

정답 8

20. 출제의도 : 정적분의 성질을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$F'(x)=f(x)$

이고

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$
$$=F(x)-F(0)$$

이므로

$g'(x)=f(x)$

그러므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

조건에서 $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1,\ \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉠

즉, $g'(4)=f(4)=0$이므로

$f(x)=(x-4)(x-a)$ (a는 상수) … ㉡

로 놓을 수 있다.

(ⅰ) $g(4)\geq 0$인 경우

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)\geq 0$이므로 이 범위에서

$|g(x)|=g(x)$

이다.

조건에서 $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|\geq |g(3)|$, 즉 $g(x)\geq g(3)$이어야 한다. … ㉢

그런데 ㉠에서 $g(3)>g(4)$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $g(4)<0$인 경우

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|\geq |g(3)|$이려면

$g(3)=0$ … ㉣

이어야 한다.

㉡에서 $f(x)=x^2-(a+4)x+4a$이므로

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax+C$ (단, C는 적분상수)

그러므로

$$g(x)=F(x)-F(0)$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax$$

㉣에서

$$g(3)=9-\frac{9}{2}(a+4)+12a=0$$

$$\frac{15}{2}a=9$$

$$a=\frac{6}{5}$$

따라서 $f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$이므로

$$f(9)=(9-4)\left(9-\frac{6}{5}\right)$$
$$=5\times\frac{39}{5}=39$$

정답 39

[다른 풀이]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt \quad \cdots ㉠$$

는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

㉠에서

$g(0)=0$ … ㉡

조건에서 $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉢

그러므로 $g'(4)=0$ … ㉣

(ⅰ) $g(4) \geq 0$인 경우

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4) \geq 0$이므로 이 범위에서

$|g(x)|=g(x)$

이다.

조건에서 $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)| \geq |g(3)|$, 즉 $g(x) \geq g(3)$이어야 하므로 $g(3)=g(4)$이어야 한다.

이는 ㉢에 모순이다.

(ⅱ) $g(4)<0$인 경우

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)| \geq |g(3)|$이려면

$g(3)=0$ … ㉤

이어야 한다.

㉡, ㉤에서

$$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x+a)$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{a-3}{3}x^2-ax \text{ (}a\text{는 상수)}$$

로 놓을 수 있다.

$$g'(x)=x^2+\frac{2(a-3)}{3}x-a$$

㉣에서

$$g'(4)=16+\frac{8}{3}(a-3)-a=8+\frac{5}{3}a=0,$$

$$a=-\frac{24}{5}$$

㉠에서

$$f(x)=g'(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$$

이므로

$$f(9)=81-\frac{234}{5}+\frac{24}{5}$$

$$=81-\frac{210}{5}=39$$

21. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선 $y=\log_2 x$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

또, 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

그러므로 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$은 한 점에서 만난다.

$t=1$일 때, 곡선 $y=1-\log_2 x$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

또, 곡선 $y=2^{x-1}$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

그러므로

$f(1)=1$

$t=2$일 때, 곡선 $y=2-\log_2 x$는 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.

또, 곡선 $y=2^{x-2}$은 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.

그러므로

$f(2)=2$

이 명제가 참이므로

$A=100$

ㄴ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선

$y=-\log_2 x$를 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이다. 이때 t의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표는 증가한다.

이때 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 t의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$의 교점의 x좌표는 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표보다 커진다.

그러므로 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

이 명제가 참이므로 $B=10$

ㄷ. $g(x)=t-\log_2 x$, $h(x)=2^{x-t}$이라 하면 함수 $y=g(x)$는 감소함수이고, 함수 $y=h(x)$는 증가함수이므로 $f(t)\ge t$이기 위해서는

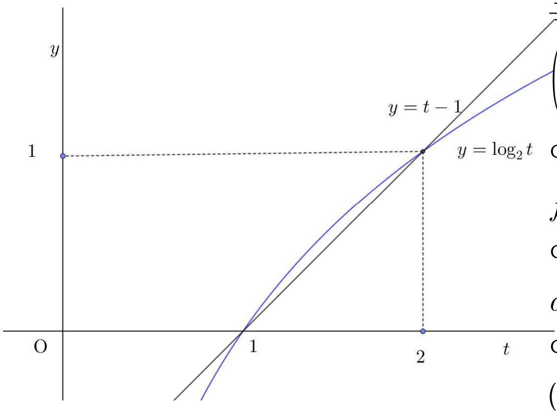
$g(t)\ge h(t)$

이어야 한다. 즉,

$t-\log_2 t\ge 2^{t-t}$

$t-1\ge \log_2 t$ ……㉠

이때 두 함수 $y=\log_2 t$, $y=t-1$의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(2, 1)$에서 만나고 다음 그림과 같다.



위에서 $1<t<2$일 때는 함수 $y=\log_2 t$의 그래프가 직선 $y=t-1$보다 위쪽에 있으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

즉, $1<t<2$일 때는 부등식

$f(t)\ge t$

를 만족시키지 못한다.

이 명제가 거짓이므로

$C=0$

이상에서 $A=100$, $B=10$, $C=0$이므로

$A+B+C=100+10+0$

$=110$

정답 110

22. 출제의도 : 도함수를 활용하고 함수의 극대, 극소를 고려하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 찾아 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

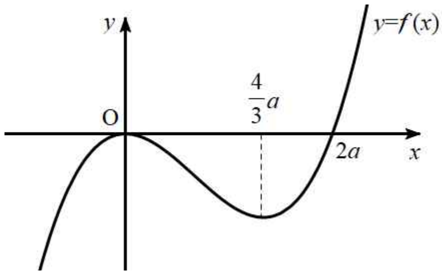
주어진 조건을 만족시키려면 열린구간 $\left(k, k+\dfrac{3}{2}\right)$에 두 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 x_1, x_2, x_3이 존재해야 하는데, 그러려면 극대 또는 극소가 되는 점이 구간 $\left(k, k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.

이때 $f(x)=x^3-2ax^2$에서

$f'(x)=3x^2-4ax$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $a>0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

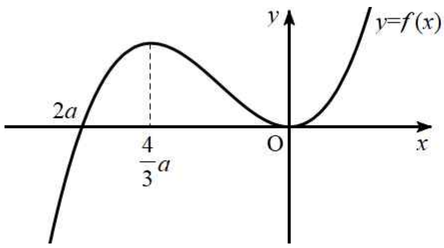
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=3$, $k=4$가 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<3$, $\frac{4}{3}a>4$

$3<a<\frac{27}{8}$

그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a<0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=-4$, $k=-3$이 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<-4$, $\frac{4}{3}a>-3$

$-\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$

즉, $a=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$이므로

$f(x)=x^3+4x^2$

$f'(x)=3x^2+8x$

따라서

$f'(10)=3\times10^2+8\times10=380$

정답 380

■ [선택: 기하]
23. ① 24. ④ 25. ② 26. ④ 27. ③
28. ⑤ 29. 80 30. 13

23. **출제의도** : 포물선의 방정식으로부터 포물선의 준선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
포물선 $y^2=-12x$의 준선의 방정식은
$x=3$
포물선 $y^2=-12(x-1)$은 포물선 $y^2=-12x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이므로 포물선 $y^2=-12(x-1)$의 준선은 직선 $x=3$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선이다.
따라서 $k=3+1=4$

정답 ①

24. **출제의도** : 벡터의 연산을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$2\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{BC}=q\overrightarrow{CA}$에서
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$이므로
$2\overrightarrow{AB}+p(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-q\overrightarrow{AC}$
$(2-p)\overrightarrow{AB}=-(p+q)\overrightarrow{AC}$
A, B, C가 서로 다른 세 점이므로
$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$
이때 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로
$2-p=-(p+q)=0$
이어야 한다.
따라서 $p=2$, $q=-2$이므로
$p-q=2-(-2)=4$

정답 ④

25. **출제의도** : 벡터의 내적을 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$이고 정사각형 ABCD에서
$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$이므로
$\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+3k(-\overrightarrow{AB})$
$=(1-3k)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$
이다.
$(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})$
$=(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot\{(1-3k)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\}$
$=(1-3k)|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
$+(k-3k^2)\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+k|\overrightarrow{BC}|^2$
$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=1$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로
$(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})$
$=(1-3k)+0+0+k=1-2k$
따라서 $1-2k=0$이므로
$k=\frac{1}{2}$

정답 ②

26. **출제의도** : 타원의 초점과 장축의 길이를 이용하여 조건을 만족시키는 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
타원 C의 장축의 길이가 24이고
$\overline{F'P}=\overline{F'F}=12-(-4)=16$이므로 타원의 정의에 의하여
$\overline{FP}+\overline{F'P}=\overline{FP}+16=24$
$\overline{FP}=8$

점 $F'(-4, 0)$이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점이고 이 타원의 중심은 원점이므로 나머지 한 초점은 $A(4, 0)$이다. 또한, 타원의 방정식에서

$a^2-b^2=4^2=16$ …… ㉠

이다.

점 Q는 선분 $F'P$의 중점이므로

$\overline{F'Q}=8$

이때

$\overline{AF'}:\overline{FF'}=\overline{QF'}:\overline{PF'}$이므로 삼각형 $QF'A$와 삼각형 $PF'F$는 닮음비가 $1:2$인 닮은 도형이다.

즉, $\overline{QA}:\overline{PF}=1:2$이고 $\overline{PF}=8$이므로

$\overline{QA}=4$

즉, $\overline{F'Q}+\overline{QA}=8+4=12$이므로

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 장축의 길이는 12이다.

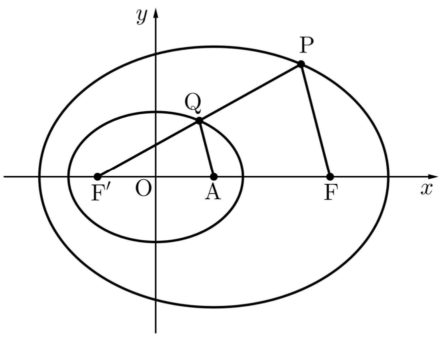
$2a=12$에서 $a=6$이므로 $a^2=36$

㉠에 대입하면 $b^2=20$

따라서 $\overline{PF}+a^2+b^2=8+36+20=64$

정답 ④

[참고] 점 P가 제1사분면에 있다고 가정하면 다음과 같이 그림으로 나타낼 수 있다.



27. 출제의도 :

포물선의 정의를 이용하여 거리의 합이 최소가 되는 점을 구할 수 있고 타원의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 y좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=8x$의 초점이 점 $(2, 0)$, 준선이 직선 $x=-2$이므로 포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$의 초점은 점 $A(0, 2)$, 준선은 직선 $x=-4$이다.

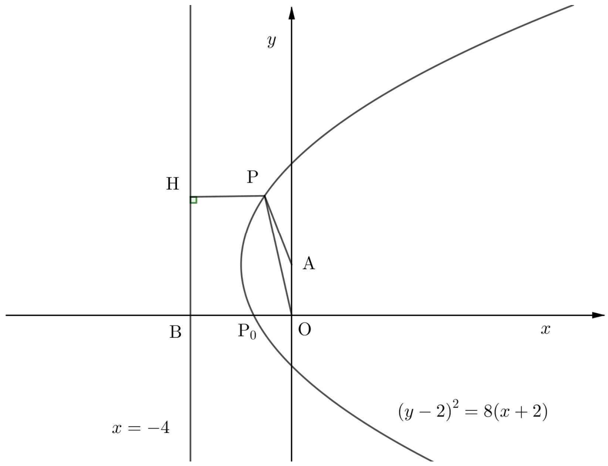
점 P에서 준선 $x=-4$에 내린 수선의 발을 H, 준선이 x축과 만나는 점을 B라 하면

$\overline{OP}+\overline{PA}$

$=\overline{OP}+\overline{PH}$

$\geq \overline{OB}$

이 값이 최소가 되는 점 P_0은 포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$와 x축이 만나는 점이다.



이때

$\overline{OQ}+\overline{QA}=\overline{OP_0}+\overline{P_0A}$ ---㉠

에서

$\overline{OP_0}+\overline{P_0A}=\overline{OB}=4$

이므로 ㉠은

$\overline{OQ}+\overline{QA}=4$

그러므로 점 Q는 두 점 A, O를 초점으로 하고 거리의 합이 4인 타원 위의 점이다.

점 Q의 y좌표가 가장 큰 점은 이 타원이 y축의 양의 방향과 만나는 점이므로 이 점을 $Q_1(0, a)$라 하면

$\overline{OQ_1}+\overline{Q_1A}=4$

에서

$a+(a-2)=4$

$a=3$

또, 점 Q의 y좌표가 가장 작은 점은 이 타원이 y축의 음의 방향과 만나는 점이므로 이 점을 $Q_2(0, b)$라 하면

$\overline{OQ_2}+\overline{Q_2A}=4$

에서

$(0-b)+(2-b)=4$

$b=-1$

따라서 $M=3$, $m=-1$이므로

$M^2+m^2=3^2+(-1)^2=10$

정답 ③

28. 출제의도 : 벡터로 표현된 직선과 원의 방정식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점을 구할 수 있는가?

점 X의 좌표를 (x, y)라 하자.

조건 (가)에서

$(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OC}=0$ …… ㉠

또는

$|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}|-3=0$ …… ㉡

㉠에서 $\overrightarrow{DX}\cdot\overrightarrow{OC}=0$에서 $\overrightarrow{DX}\perp\overrightarrow{OC}$이므로 점 X는 점 D(8, 6)을 지나고 벡터 $\overrightarrow{OC}=(4, 4)$에 수직인 직선 위의 점이다.

즉, 점 X는 직선 $l: y=-x+14$ 위의 점이다.

㉡에서 $|\overrightarrow{CX}|=3$이므로 점 X는 점 C(4, 4)를 지나고 반지름의 길이가 3인 원, 즉

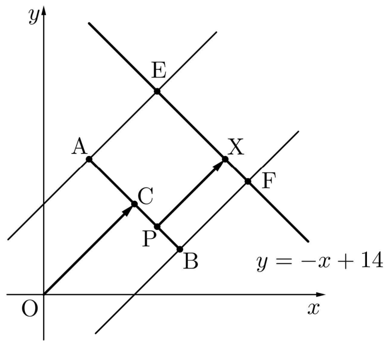
$(x-4)^2+(y-4)^2=9$

위의 점이다.

조건 (나)를 만족시키는 점 X를 다음과 같이 경우를 나누어 생각하자.

(i) 점 X가 직선 l 위에 있는 경우

점 A를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 E, 점 B를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 F라 하자.

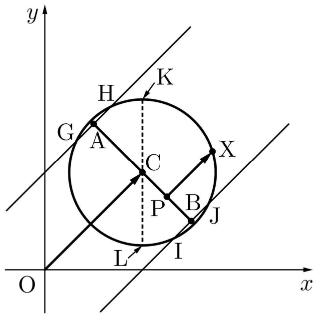


선분 EF 위의 임의의 점 X에 대하여 점 X를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 선분AB와 만나는 점을 X′이라 하면 점 P가 점 X′과 일치할 때 두 벡터 $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{OC}$는 평행하므로 조건 (나)를 만족시킨다. 직선 l 위의 점 중에서 선분 EF 위에 있지 않은 점 X에 대하여는 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{OC}$가 평행할 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 점 X의 y좌표가 최대인 경우는 점 X가 점 E(5, 9)와 일치하는 경우이고, 점 X의 y좌표가 최소인 경우는 점 X가

점 F(9, 5)와 일치하는 경우이다.

(ⅱ) 점 X가 원 $(x-4)^2+(y-4)^2=9$ 위에 있는 경우



그림과 같이 원이 점 A를 지나고 직선 OC와 평행한 직선과 만나는 두 점을 G, H라 하고, 원이 점 B를 지나고 직선 OC와 평행한 직선과 만나는 두 점을 I, J라 하자.

호 JH 또는 호 GI 위의 임의의 점 X에 대하여 점 X를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 X′이라 하면 점 P가 점 X′과 일치할 때 두 벡터 $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{OC}$는 평행하므로 조건 (나)를 만족시킨다. 원 위의 점 중에서 호 JH 위에도 있지 않고 호 GI 위에도 있지 않은 점 X에 대하여는 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{OC}$가 평행할 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 원 $(x-4)^2+(y-4)^2=9$ 위의 점 중에서 y좌표가 가장 큰 점을 K, y좌표가 가장 작은 점을 L이라 하면 점 X의 y좌표가 최대인 경우는 점 X가 점 K(4, 7)과 일치하는 경우이고, 점 X의 y좌표가 최소인 경우는 점 X가 점 L(4, 1)과 일치하는 경우이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 점 Q, R는 각각

Q(5, 9), R(4, 1)

이다. 따라서

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=(5,\ 9)\cdot(4,\ 1)$$
$$=5\times4+9\times1$$
$$=29$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 초점이 일치하는 두 쌍곡선 위의 점이 조건을 만족시킬 때, 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

쌍곡선 $C_1 : x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$의 주축의 길이는 2,

쌍곡선 $C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{21}=1$의 주축의 길이는 4,

두 쌍곡선 C_1, C_2의 초점은 모두 F(5, 0), F′(−5, 0)이다.

점 P는 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점이므로

$\overline{PF}=\overline{PF'}+2$ …… ㉠

점 Q는 쌍곡선 C_2 위에 있는 제2사분면 위의 점이므로

$\overline{QF}=\overline{QF'}+4$ …… ㉡

$\overline{PQ}+\overline{QF}$, $2\overline{PF'}$, $\overline{PF}+\overline{PF'}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의하여

$4\overline{PF'}=(\overline{PQ}+\overline{QF})+(\overline{PF}+\overline{PF'})$

이때 ㉡에 의하여

$$\overline{PQ}+\overline{QF}=\overline{PQ}+\overline{QF'}+4$$
$$=\overline{PF'}+4$$

이므로

$4\overline{PF'}=\overline{PF'}+4+\overline{PF}+\overline{PF'}$

$2\overline{PF'}=4+\overline{PF}$

㉠을 대입하면

$2\overline{PF'}=4+(\overline{PF'}+2)$

즉, $\overline{\mathrm{PF'}}=6$

삼각형 $\mathrm{PF'F}$는 $\overline{\mathrm{PF'}}=6$, $\overline{\mathrm{FF'}}=10$, $\overline{\mathrm{PF}}=8$인 직각삼각형이므로

$$\tan(\angle \mathrm{PF'F})=\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}}=\frac{4}{3}$$

따라서 직선 PQ의 기울기 m도 $\frac{4}{3}$이다.

$$60m=60\times\frac{4}{3}=80$$

정답 80

30. 출제의도 :

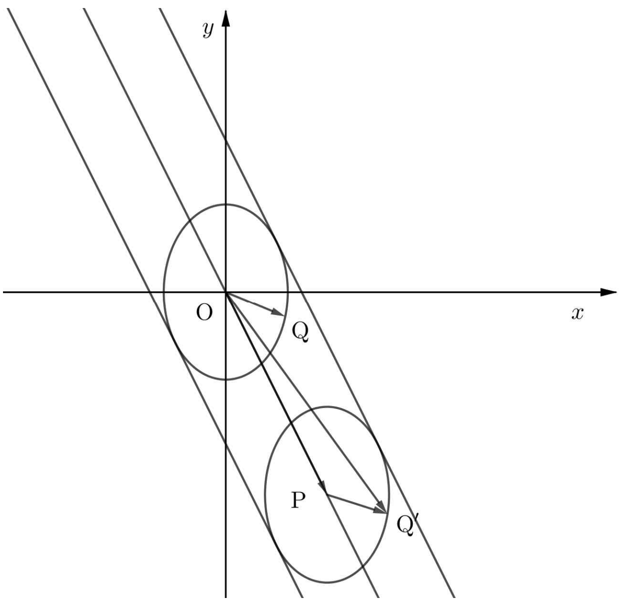
벡터의 합을 이용하여 점 X가 나타내는 영역을 나타낼 수 있고 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}$이 되는 점을 잡으면 점 Q′은 타원 $2x^2+y^2=3$을 중심이 P가 되도록 평행이동시킨 타원 위의 점이다.

이때,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}\end{aligned}$$



한편, 타원 $2x^2+y^2=3$에 접하고 직선 $2x+y=0$에 평행한 접선의 방정식은

$$y=-2x\pm\sqrt{\frac{3}{2}\times(-2)^2+3}$$

$$y=-2x\pm3$$

그러므로 점 X가 나타내는 점은 직선 $y=-2x+3$ 또는 이 직선의 아래쪽 부분과 직선 $y=-2x-3$ 또는 이 직선의 위쪽 부분의 공통부분이다.

그러므로 x좌표와 y좌표가 모두 0이상인 모든 점 X가 나타내는 영역은 직선 $y=-2x+3$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분이다.

이때 직선 $y=-2x+3$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 3)$이므로 구하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3=\frac{9}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=9$이므로

$$p+q=4+9=13$$

정답 13