2023학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01.④	02.①	03.②	04.①	05.③
06.⑤	07.⑤	08.①	09.③	10.④
11.②	12.②	13.⑤	14.⑤	15.③
16. 7	17. 16	18. 13	19. 4	
20. 80	21. 220	22. 58		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}=\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}$$

$$=2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=2^{3-1}=2^2=4$$

정답 ④

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2+5$에서

$f'(x)=4x$

이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

$$=4\times 2=8$$

정답 ①

3. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 탄젠트 함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

이므로

$$\sin\theta=\frac{5}{13}$$

이때

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$=1-\frac{25}{169}$$

$$=\frac{144}{169}$$

$$=\left(\frac{12}{13}\right)^2$$

이고, 주어진 조건에 의하여 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\frac{12}{13}$$

따라서

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}$$

$$=-\frac{5}{12}$$

정답 ②

4. **출제의도** : 함수가 연속이 되도록 하는 모든 상수의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉,

$f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$

가 성립해야 한다.

$f(a)=-2a+a=-a$,

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(-2x+a)$

$=-2a+a=-a$,

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(ax-6)=a^2-6$

이므로 $f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$에서

$-a=a^2-6$,

$a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$(-3)+2=-1$

정답 ①

5. **출제의도** : 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=2a_5=2(a_1+4d)$

$a_1+8d=0\cdots㉠$

$a_8+a_{12}=(a_1+7d)+(a_1+11d)$

$=2a_1+18d=-6$

$a_1+9d=-3\cdots㉡$

㉠, ㉡에서 $a_1=24$, $d=-3$ 이므로

$a_2=a_1+d=21$

정답 ③

6. **출제의도** : 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값이 9이므로

$f(0)=k=9$

따라서

$f(x)=x^3-3x^2+9$

이고 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)$이므로 구하는 극솟값은

$f(2)=2^3-3\times2^2+9=5$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}S_k=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

한편,

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = S_{10} = \frac{1}{10\times 11} = \frac{1}{110}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k) = \sum_{k=1}^{10} S_k - \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= \frac{10}{11} - \frac{1}{110} = \frac{99}{110} = \frac{9}{10}$$

정답 ⑤

[다른 풀이]

$k=1$**이면** $S_k - a_k = S_1 - a_1 = 0$

$k \ge 2$**이면** $S_k - a_k = S_{k-1} = \dfrac{1}{(k-1)k}$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k) = (S_1 - a_1) + \sum_{k=2}^{10}(S_k - a_k)$$

$$= 0 + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(k-1)k}$$

$$= \sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

8. **출제의도** : 두 곡선에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y = x^3 - 4x + 5$에서

$y' = 3x^2 - 4$

이므로 점 $(1,2)$에서의 접선의 방정식은

$y - 2 = -(x-1)$

$y = -x + 3 \cdots$ ㉠

또한, $y = x^4 + 3x + a$ 에서

$y' = 4x^3 + 3$

이고 곡선 $y = x^4 + 3x + a$와 직선 ㉠이 접하므로 접점의 x좌표는

$4x^3 + 3 = -1$, $x^3 = -1$

$x = -1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 4)$ 이고 이 점은 곡선 $y = x^4 + 3x + a$ 위의 점이므로

$4 = 1 - 3 + a$

$a = 6$

정답 ①

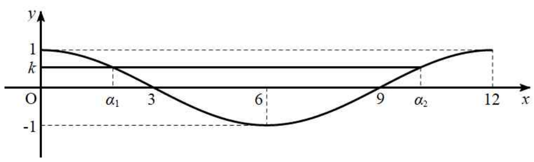
9. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = f(x)$의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$$

이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위 그림과 같이 일반성을 잃지 않고

$\alpha_1 < \alpha_2$

라 하면

$\alpha_1 + \alpha_2 = 12$

주어진 조건에 의하여

$\alpha_2 - \alpha_1 = 8$

이므로

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 10$

그러므로

$$k = \cos\left(\frac{\pi\times 2}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

한편,

$$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$$

에서

$$\cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$$

$0\le x\le 12$에서 $0\le\frac{\pi x}{6}\le 2\pi$이므로

$\frac{\pi x}{6}=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{\pi x}{6}=\frac{4}{3}\pi$

즉, $x=4$ 또는 $x=8$

따라서

$|\beta_1-\beta_2|=|4-8|=4$

정답 ③

10. 출제의도 : 정적분을 이용하여 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=2$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(3t^2+at)dt$$

$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^2$$

$$=8+2a$$

점 $\mathrm{P}(8+2a)$와 점 $\mathrm{A}(6)$ 사이의 거리가 10이려면 $|(8+2a)-6|=10$, 즉

$2a+2=\pm 10$

이어야 하므로 양수 a의 값은

$2a+2=10$에서

$a=4$

정답 ④

11. 출제의도 : 실수인 거듭제곱근을 이해하고 조건을 만족시키는 $f(n)$의 값을 지수법칙을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}$, $-\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}$

이므로

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}\times\left(-\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}\right)$$

$$=-\sqrt{3}^{\frac{1}{4}f(n)}\times\sqrt{3}^{\frac{1}{4}f(n)}$$

$$=-3^{\frac{1}{8}f(n)}\times 3^{\frac{1}{8}f(n)}$$

$$=-3^{\frac{1}{8}f(n)+\frac{1}{8}f(n)}$$

$$=-3^{\frac{1}{4}f(n)}=-9$$

따라서,

$$3^{\frac{1}{4}f(n)}=3^2$$

이므로

$\frac{1}{4}f(n)=2$, $f(n)=8\cdots$㉠

이때, 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$의 그래프의 대칭축은 $x=2$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2이기 위해서는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,8)$을 지나야 한다.

$f(1)=-1+k=8$

$k=9$

정답 ②

12. 출제의도 : 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 주어진 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후, 함수의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 좌표를 각각

$\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$

이라 하면 x에 대한 이차방정식

$x^2-x-t=0$

의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-t$

그러므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=a-b$$
$$=\sqrt{(a-b)^2}$$
$$=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$$
$$=\sqrt{1+4t}$$

또, 점 C의 좌표가 $\mathrm{C}(-a,\ a^2)$이므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=b-(-a)$$
$$=b+a=1$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1+4t)-1}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$$
$$=\frac{4}{1+1}=2$$

정답 ②

13. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 CDE에서 $\angle\mathrm{CED}=\frac{\pi}{4}$이므로

코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{CE}}^2+\overline{\mathrm{ED}}^2-2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{ED}}\times\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=10$$

이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$

$\angle\mathrm{CDE}=\theta$라 하면 삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{ED}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{CE}}^2}{2\times\overline{\mathrm{ED}}\times\overline{\mathrm{CD}}}$$
$$=\frac{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-4^2}{2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{10}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\overline{\mathrm{AC}}=x$, $\overline{\mathrm{AE}}=y$라 하면 삼각형 ACE에서 코사인법칙에 의하여

$$x^2=y^2+4^2-2\times y\times4\times\cos\frac{3}{4}\pi,$$
$$x^2=y^2+16-2\times y\times4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$x^2=y^2+4\sqrt{2}y+16\ \cdots\ ㉠$$

한편, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{x}{\sin\theta}=2R,\ 즉\ \frac{x}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=2R$$

에서

$$2R=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\angle\mathrm{CAB}=\alpha$라 하면

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{x}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}x} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

이등변삼각형 AOC에서

$\angle\mathrm{ACO} = \angle\mathrm{CAO} = \alpha$

이므로 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{x}{\sin\frac{3}{4}\pi} = \dfrac{y}{\sin\alpha}$, 즉 $\dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{y}{\frac{\sqrt{5}}{5}}$에서

$\sqrt{2}x = \sqrt{5}y$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{5}{2}y^2 = y^2 + 4\sqrt{2}y + 16$,

$\dfrac{3}{2}y^2 - 4\sqrt{2}y - 16 = 0$,

$3y^2 - 8\sqrt{2}y - 32 = 0$

$(3y+4\sqrt{2})(y-4\sqrt{2}) = 0$에서

$y = 4\sqrt{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{AC}} = x = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{5}$

따라서

$\overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{CD}} = 4\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 20\sqrt{2}$

정답 ⑤

[다른 풀이]

삼각형 CED에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{CE}}^2 + \overline{\mathrm{DE}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\cos\dfrac{\pi}{4}$

$= 16 + 18 - 2\times4\times3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= 34 - 24 = 10$

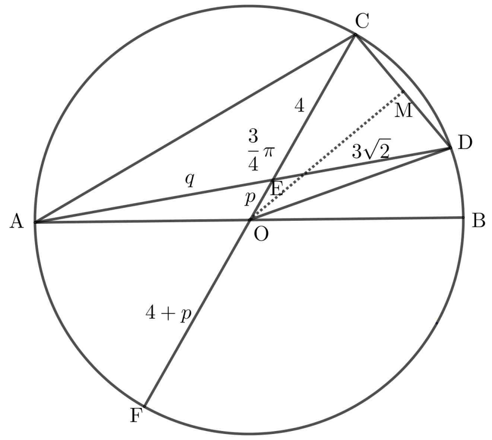
이므로

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{10}$

직선 OC가 원과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 F라 하고, $\overline{\mathrm{OE}} = p$, $\overline{\mathrm{AE}} = q$라 하면

$\overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{EO}} + \overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{EO}} + \overline{\mathrm{OC}}$

$= p + (p+4) = 2(p+2)$



따라서 원의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}} \times \overline{\mathrm{FE}} = \overline{\mathrm{AE}} \times \overline{\mathrm{DE}}$

이므로

$4\times2(p+2) = q\times3\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

한편,

$\angle\mathrm{CAD}$는 호 CD의 원주각이고, $\angle\mathrm{COD}$는 호 CD의 중심각이므로 $\angle\mathrm{CAD} = \theta$라 하면

$\angle\mathrm{COD} = 2\times\angle\mathrm{CAD} = 2\theta$

$\overline{\mathrm{CO}} = \overline{\mathrm{DO}}$이므로 선분 CD의 중점을 M이라 하면

$\angle\mathrm{COM} = \dfrac{1}{2}\times\angle\mathrm{COD} = \dfrac{1}{2}\times2\theta = \theta$

직각삼각형 OMC에서

$$\sin\theta = \frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{OC}}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{p+4} = \frac{\sqrt{10}}{2(p+4)}$$

따라서 삼각형 AEC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\theta} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{3}{4}\pi}, \text{ 즉}$$

$$\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{2(p+4)}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}} = \frac{8(p+4)}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4(p+4)}{\sqrt{5}} \quad \cdots \text{㉡}$$

삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AE}}^2 + \overline{\mathrm{CE}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\cos\frac{3}{4}\pi$$

$$= q^2 + 16 - 2\times q\times 4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= q^2 + 4\sqrt{2}q + 16 \quad \cdots \text{㉢}$$

㉡, ㉢에서

$$\left\{\frac{4(p+4)}{\sqrt{5}}\right\}^2 = q^2 + 4\sqrt{2}q + 16$$

이때 ㉠에서

$$4(p+2) = \frac{3\sqrt{2}}{2}q$$

이므로

$$\left(\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}q+8}{\sqrt{5}}\right)^2 = q^2 + 4\sqrt{2}q + 16,$$

$$\frac{9}{2}q^2 + 24\sqrt{2}q + 64 = 5(q^2 + 4\sqrt{2}q + 16),$$

$$9q^2 + 48\sqrt{2}q + 128 = 10q^2 + 40\sqrt{2}q + 160,$$

$$q^2 - 8\sqrt{2}q + 32 = 0,$$

$$(q - 4\sqrt{2})^2 = 0$$

$$q = 4\sqrt{2}$$

그러므로 ㉢에서

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 32 + 32 + 16 = 80$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

따라서

$$\overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{CD}} = 4\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 20\sqrt{2}$$

14. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x) = x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)⋯㉠

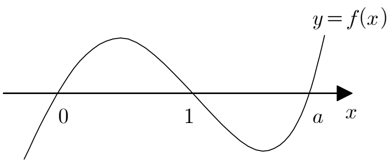
라 하자.

ㄱ. $g(0) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx = 0$

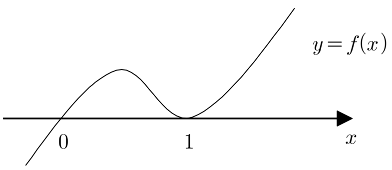
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 |f(x)|dx$$

따라서 $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \ge 0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(i) $a > 1$일 때



(ii) $a = 1$일 때



(i), (ii)에 의하여

$\int_{-1}^{0} f(x)dx < 0$

이므로

$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx < 0$

이다. (참)

ㄴ. $g(-1) > 0$이면 $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$ 이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$

$$= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x(x-1)(x-a)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\}dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \{-(a+1)x^2\}dx$$

$$= 2\left[-\frac{a+1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= -\frac{2(a+1)}{3} > 0$$

즉, $a < -1$ 이므로 $f(k) = 0$을 만족시키는 $k < -1$인 실수 k가 존재한다. (참)

ㄷ. $g(-1) = -\frac{2(a+1)}{3} > 1$ 에서

$a < -\frac{5}{2}$

$0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$ 이므로

$$g(0) = \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$

$$= \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\}dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}a - \frac{1}{6} < -1 \quad \text{(참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항과 조건을 만족시키는 항의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 $a_4 = r$, $a_8 = r^2$

조건 (나)에 의하여

$a_4 = r$이고 $0 < |r| < 1$에서 $|a_4| < 5$이므로

$a_5 = r + 3$

$|a_5| < 5$이므로

$a_6 = a_5 + 3 = r + 6$

$|a_6| \ge 5$이므로

$a_7 = -\frac{1}{2}a_6 = -\frac{r}{2} - 3$

$|a_7| < 5$이므로

$a_8 = a_7 + 3 = -\frac{r}{2}$

그러므로

$r^2 = -\frac{r}{2}$

$r \ne 0$이므로 $r = -\frac{1}{2}$

즉, $a_4 = -\frac{1}{2}$

이때 $|a_3|<5$이면 $a_3=-\frac{1}{2}-3=-\frac{7}{2}$이고 이것은 조건을 만족시키며, $|a_3|\geq 5$이면 $a_3=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$인데 이것은 조건을 만족시키지 않으므로

$a_3=-\frac{7}{2}$

또, $|a_2|<5$이면 $a_2=-\frac{7}{2}-3=-\frac{13}{2}$인데 이것은 조건을 만족시키지 않고, $|a_2|\geq 5$이면 $a_2=-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=7$이고 이것은 조건을 만족시키므로

$a_2=7$

또, $|a_1|<5$이면 $a_1=7-3=4$이고, $|a_1|\geq 5$이면 $a_1=-2\times 7=-14$인데 조건 (나)에 의하여 $a_1<0$이므로

$a_1=-14$

따라서

$a_1=-14$, $a_2=7$, $a_3=-\frac{7}{2}$, $a_4=-\frac{1}{2}$,

$a_5=-\frac{1}{2}+3$, $a_6=-\frac{1}{2}+6$, $a_7=\frac{1}{4}-3$, $a_8=\frac{1}{4}$,

$a_9=\frac{1}{4}+3$, $a_{10}=\frac{1}{4}+6$, $a_{11}=-\frac{1}{8}-3$, $a_{12}=-\frac{1}{8}$,

$\cdots$

이와 같은 과정을 계속하면

$|a_1|\geq 5$이고, 자연수 k에 대하여 $|a_{4k-2}|\geq 5$임을 알 수 있다.

그러므로 $|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100이하의 자연수 m은

1, 2, 6, 10, $\cdots$, 98

이고, $2=4\times 1-2$, $98=4\times 25-2$이므로

$p=1+25=26$

따라서

$p+a_1=26+(-14)=12$

정답 ③

16. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에서

$x-4>0$이고 $x+2>0$이어야 하므로

$x>4$ $\cdots$ ㉠

$\log_3(x-4)=\log_{3^2}(x-4)^2=\log_9(x-4)^2$

이므로 주어진 방정식은

$\log_9(x-4)^2=\log_9(x+2)$,

$(x-4)^2=x+2$,

$x^2-8x+16=x+2$,

$x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$

따라서 $x=2$ 또는 $x=7$

㉠에서 구하는 실수 x의 값은 7이다.

정답 7

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int(6x^2-4x+3)dx$

$=2x^3-2x^2+3x+C$

(단, C는 적분상수)

이므로

$f(1)=2-2+3+C=3+C=5$

에서

$C=2$

따라서

$f(2)=16-8+6+2=16$

정답 16

18. 출제의도 : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값

을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = c\sum_{k=1}^{5} a_k$$
$$= c\times 10 = 10c$$

이고

$$\sum_{k=1}^{5} c = 5c$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

에서

$10c = 65 + 5c$

$5c = 65$

따라서

$c = 13$

정답 13

19. **출제의도** : 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$이라 하면

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$
$$= 12x(x^2 - x - 2)$$
$$= 12x(x+1)(x-2)$$

이므로 $f'(x) = 0$에서

$x = 0$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = 2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 사차함수 $f(x)$는

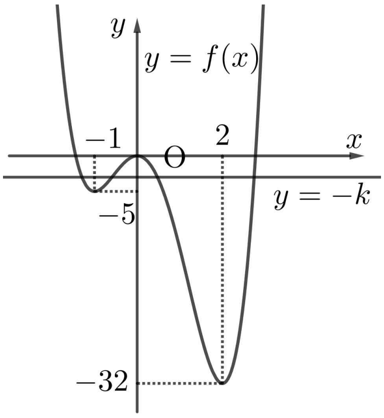
$x = 0$에서 극댓값 $f(0) = 0$을 갖고,

$x = -1$, $x = 2$에서 각각 극솟값

$f(-1) = 3 + 4 - 12 = -5$,

$f(2) = 48 - 32 - 48 = -32$

를 갖는다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -k$의 교점의 개수와 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건은 위의 그래프에서

$-5 < -k < 0$, 즉 $0 < k < 5$

이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는 4이다.

정답 4

20. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = x^3 + x^2 - x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$
$$= (3x-1)(x+1)$$

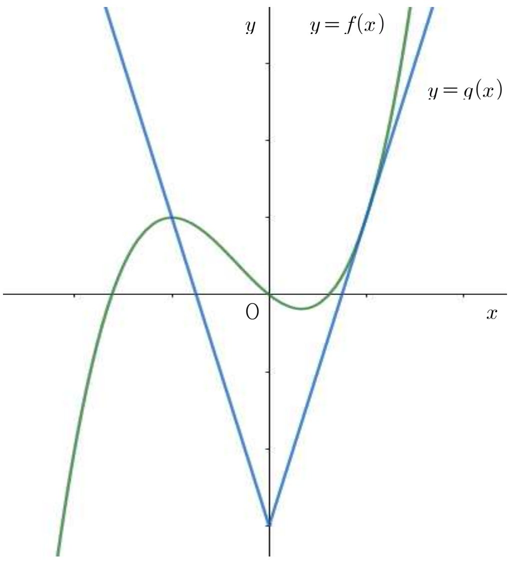
이므로 $f'(x) = 0$에서

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값이 $f(-1)=1$, $x=\frac{1}{3}$에서 극솟값이 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{27}$ 이므로 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2이기 위해서는 그림과 같이 $x>0$인 부분에서 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$의 그래프가 접해야 한다.



$x>0$일 때 $g(x)=4x+k$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=4$

에서

$3x^2+2x-5=0$, $(3x+5)(x-1)=0$

즉, $x=1$ 이므로 접점의 좌표는 $(1,1)$이고

$g(1)=4+k=1$

따라서, $k=-3$

또한, $x<0$일 때 $g(x)=-4x-3$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2-x=-4x-3$, $x^3+x^2+3x+3=0$

$(x+1)(x^2+3)=0$

$x=-1$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$$

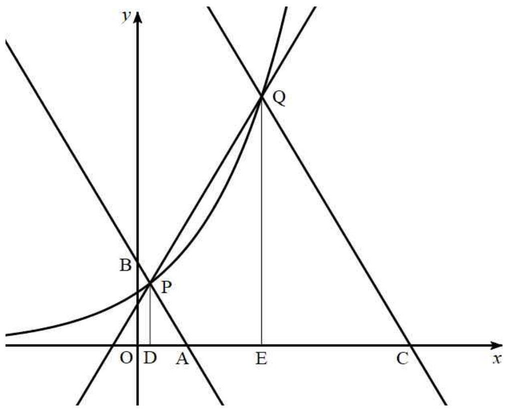
$$=\frac{19}{12}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3}$$

$30\times S=30\times\frac{8}{3}=80$

정답 80

21. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{PB}=k$라 하면

$\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{PB}$

$=4\overline{PB}-\overline{PB}$

$=3\overline{PB}=3k$

이고,

$\overline{CQ}=3\overline{AB}$

$=3\times4\overline{PB}$

$=12\overline{PB}=12k$

이므로 $\overline{AP}:\overline{CQ}=3k:12k=1:4$

이때 $\triangle PDA \backsim \triangle QEC$이므로

$\overline{PD}:\overline{QE}=\overline{AP}:\overline{CQ}=1:4$

즉, $2^a:2^b=1:4$이므로

$2^b=4\times2^a=2^{a+2}$

에서

$b=a+2$

즉,

$$m=\frac{2^b-2^a}{b-a}$$

$$=\frac{2^{a+2}-2^a}{(a+2)-a}$$

$$=\frac{3\times2^a}{2}$$

$$=3\times2^{a-1}$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$ ……㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$

$$x-a=\frac{2}{3}$$

$$x=a+\frac{2}{3}$$

즉, 점 A의 x좌표가 $a+\frac{2}{3}$이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle APD \backsim \triangle ABO$이므로

$\overline{AO}:\overline{DO}=\overline{AB}:\overline{PB}=4:1$

즉, $a+\frac{2}{3}:a=4:1$

$$a+\frac{2}{3}=4a$$

$$a=\frac{2}{9}$$

$$b=a+2=\frac{2}{9}+2=\frac{20}{9}$$

따라서

$$90\times(a+b)=90\times\left(\frac{2}{9}+\frac{20}{9}\right)$$

$$=90\times\frac{22}{9}$$

$$=220$$

정답 220

22. 출제의도 : 삼차함수의 그래프와 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t+}g(x)=g(t)=f(t)$$

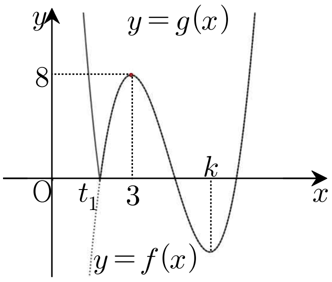
이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

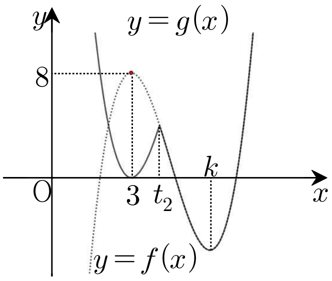
함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

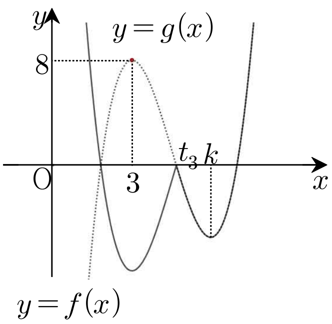
이때 함수 $y=-f(x)+2f(t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $2f(t)$만큼 평행이동한 것이다.

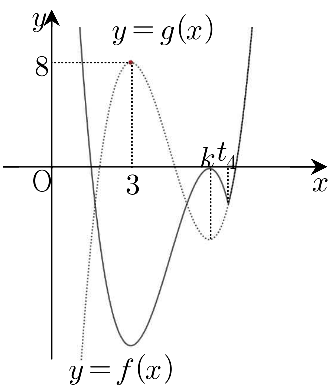
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축과의

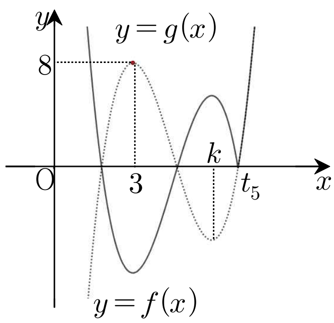
교점의 개수와 같으므로 $f(k)$의 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.
우선, $f(k)<0$인 경우를 생각해보면 함수 $y=g(x)$가 불연속일 때의 그래프는 다음과 같다.



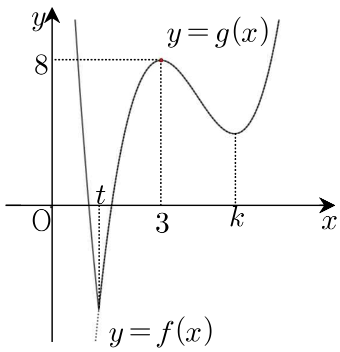




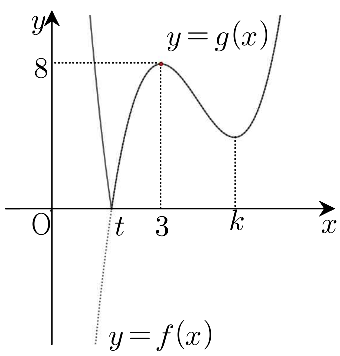




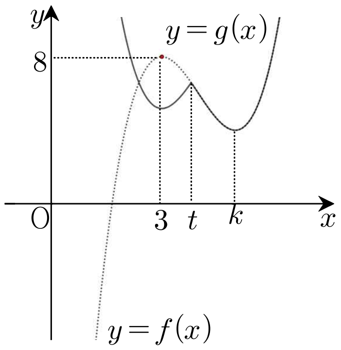
따라서 함수 $h(t)$는
$t=t_i$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$에서 불연속이므로 주어진 조건에 위배된다.
위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)$의 그래프에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개인 경우는 다음과 같이 $t=k$일 때 $g(3)=0$이 되는 경우뿐이다.



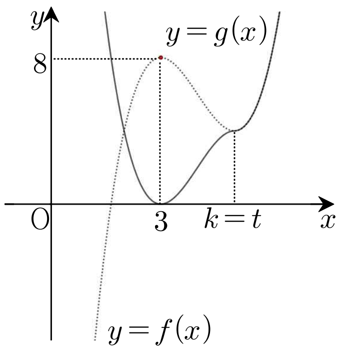
[교점 2개]



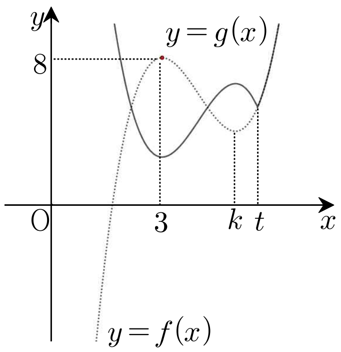
[교점 1개]



[교점 0개]



[교점 1개]



[교점 0개]

$t=k$일 때

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge k) \\ -f(x)+2f(k) & (x < k) \end{cases}$$

이고 이때 $g(3)=0$에서

$-f(3)+2f(k)=0$, 즉 $-8+2f(k)=0$

에서

$f(k)=4$

한편, 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 가지므로 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $k>3$이고

$$f'(x)=3(x-3)(x-k)$$
$$=3x^2-3(3+k)x+9k$$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(3)=8$이므로

$$27-\frac{27}{2}(3+k)+27k+C=8,$$

$$C=\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k$$

따라서

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k$$

이때 $f(k)=4$이므로

$$k^3-\frac{3}{2}(3+k)k^2+9k^2+\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k=4,$$

$$-\frac{k^3}{2}+\frac{9}{2}k^2-\frac{27}{2}k+\frac{35}{2}=0,$$

$$k^3-9k^2+27k-35=0,$$

$$(k-5)(k^2-4k+7)=0$$

모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+7>0$이므로

$k=5$

따라서

$f(x)=x^3-12x^2+45x-46$

이므로

$f(8)=512-768+360-46=58$

정답 58

■ [선택: 기하]

23. ④ 24. ② 25. ⑤ 26. ③ 27. ③
28. ① 29. 127 30. 17

23. 출제의도 : 공간좌표에서 선분의 중점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $\mathrm{A}(a,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-5,\ b,\ 3)$의 중점의 좌표가 $(8,\ 3,\ 1)$이므로

$\frac{a+(-5)}{2}=8$, $\frac{1+b}{2}=3$

따라서 $a=21$, $b=5$이므로

$a+b=21+5=26$

정답 ④

24. 출제의도 : 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a,\ \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2ax}{a^2}-\sqrt{3}y=1$

즉, $y=\frac{2}{\sqrt{3}a}x-\frac{1}{\sqrt{3}}$

이 접선과 직선 $y=-\sqrt{3}x+1$이 수직이므로

$\frac{2}{\sqrt{3}a}\times(-\sqrt{3})=-1$

따라서 $a=2$

정답 ②

25. 출제의도 : 타원의 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 $\mathrm{AF'F}$에서

$\overline{\mathrm{F'F}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AF'}}^2-\overline{\mathrm{AF}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

이므로 두 초점 F. F′은

$\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-2,\ 0)$

이다.

타원의 성질에 의해

$2^2=a^2-5$에서

$a^2=9$

$a>\sqrt{5}$이므로

$a=3$

따라서

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a=6$

이므로 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}=6+4=10$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 벡터의 내적의 성질을 이용하여 점 P가 나타내는 도형을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=5$에서

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=5$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=5$

$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{5}$

즉, 점 P가 타나내는 도형은 점 A(3, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다.

점 P가 나타내는 도형과 직선 $y = \frac{1}{2}x + k$가 오직 한 점에서 만나므로

점 A(3, 0)과 직선 $y = \frac{1}{2}x + k$, 즉 $x - 2y + 2k = 0$ 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.

$\frac{|3 - 2 \times 0 + 2k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$에서

$|2k + 3| = 5$

$2k + 3 = 5$ 또는 $2k + 3 = -5$

$k = 1$ 또는 $k = -4$

$k > 0$이므로

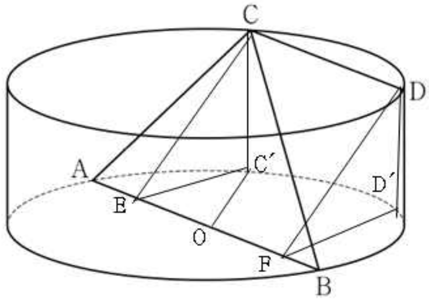
$k = 1$

정답 ③

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 C, D에서 두 점 A, B를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이라 하고, 두 점 C′, D′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$\overline{CC'} \perp$(평면ABD′C′), $\overline{C'E} \perp \overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{CE} \perp \overline{AB}$

이다.

조건 (가)에서

삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CE} = 16$

$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{CE} = 16$

$\overline{CE} = 4$

직각삼각형 CC′E에서

$\overline{CC'} = 3$

이므로

$\overline{C'E} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{CC'}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

선분 AB의 중점을 O라 하면

직각삼각형 OC′E에서

$\overline{OE} = \sqrt{\overline{OC'}^2 - \overline{C'E}^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$

마찬가지 방법으로

$\overline{OF} = 3$

조건 (나)에서

두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로

$\overline{CD} = \overline{EF} = \overline{OE} + \overline{OF} = 3 + 3 = 6$

정답 ③

28. **출제의도** : 포물선의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $C_1 : y^2 = 4x$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}_1(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

점 A의 x좌표를 x_1이라 하자.

점 A에서 포물선 C_1의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

포물선의 성질에 의해

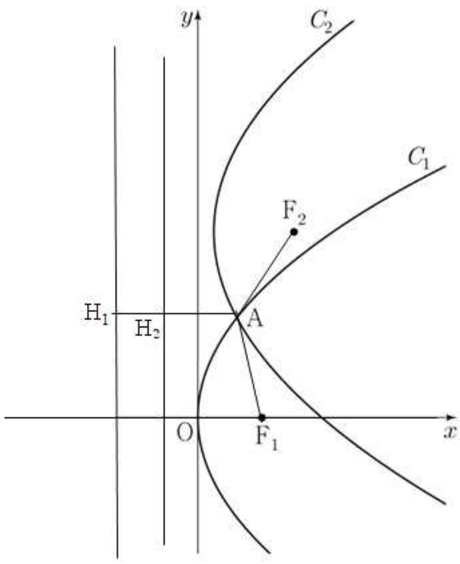
$\overline{\mathrm{AF}_1} = \overline{\mathrm{AH}_1} = x_1 + 1$ …… ㉠

포물선 $C_2 : (y-3)^2 = 4p\{x - f(p)\}$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}_2(p+f(p),\ 3)$이고 준선의 방정식은 $x=-p+f(p)$이다.

점 A에서 포물선 C_2의 준선 $x=-p+f(p)$에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

포물선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{AF}_2} = \overline{\mathrm{AH}_2} = x_1 + p - f(p)$ …… ㉡



이때, $\overline{\mathrm{AF}_1} = \overline{\mathrm{AF}_2}$이므로

㉠, ㉡에서

$x_1 + 1 = x_1 + p - f(p)$

$f(p) - p + 1 = 0$

$f(x) = (x+a)^2$이므로

$(p+a)^2 - p + 1 = 0$

$p^2 + (2a-1)p + (a^2+1) = 0$ …… ㉢

p에 대한 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하자.

(i) $D<0$일 때

㉢을 만족시키는 실수 p의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $D=0$일 때,

$D = (2a-1)^2 - 4(a^2+1) = 0$에서

$a = -\dfrac{3}{4}$

$a = -\dfrac{3}{4}$을 ㉢에 대입하면

$p^2 - \dfrac{5}{2}p + \dfrac{25}{16} = 0$

$\left(p - \dfrac{5}{4}\right)^2 = 0$

$p = \dfrac{5}{4} \geq 1$

(iii) $D>0$일 때,

$D = (2a-1)^2 - 4(a^2+1) > 0$에서

$a < -\dfrac{3}{4}$

$g(p) = p^2 + (2a-1)p + (a^2+1)$이라 하면

$g(1) = (a+1)^2 \geq 0$

p에 대한 이차방정식 ㉢의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha + \beta = 1 - 2a > 0$

$\alpha\beta = a^2 + 1 \geq 1$

이때, $1 \leq \alpha < \beta$이므로 $p \geq 1$인 p가 두 개 존재한다.

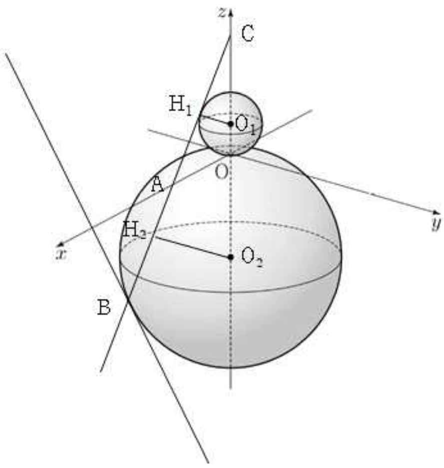
(ⅰ) ~ (ⅲ)에서

$a=-\frac{3}{4}$

정답 ①

29. 출제의도 : 좌표공간에서 구와 평면이 만나서 생기는 도형의 다른 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하면

$O_1(0,\ 0,\ 2)$, $O_2(0,\ 0,\ -7)$

이고, 두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이는 각각

2, 7

이다.

두 점 O_1, O_2에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고, 평면 α와 z축이 만나는 점을 C라 하자.

직각삼각형 O_1CH_1에서

$\overline{O_1C}=k(k>0)$이라 하면

$\overline{CH_1}=\sqrt{\overline{O_1C}^2-\overline{O_1H_1}^2}=\sqrt{k^2-2^2}=\sqrt{k^2-4}$

원점을 O라 하면

$\triangle O_1CH_1 \backsim \triangle ACO$

이고, $\overline{OC}=2+k$이므로

$(k+2):\sqrt{k^2-4}=\sqrt{5}:2$에서

$k^2-16k-36=0$

$(k-18)(k+2)=0$

$k>0$이므로

$k=18$

$\triangle O_1CH_1 \backsim \triangle O_2CH_2$

이고, $\overline{O_1C}=18$, $\overline{O_2C}=27$이므로

$18:2=27:\overline{O_2H_2}$에서

$\overline{O_2H_2}=3$

평면 α와 구 S_2가 만나서 생기는 원 C의 중심은 H_2이고 반지름의 길이는 $\overline{BH_2}$이다. 이때,

$\overline{BH_2}=\sqrt{\overline{O_2B}^2-\overline{O_2H_2}^2}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

이므로 원 C의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{10})^2=40\pi$

한편, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle BO_2H_2$이므로

$\cos\theta=\frac{3}{7}$

원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$40\pi\times\frac{3}{7}=\frac{120}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=120$이므로

$p+q=7+120=127$

정답 127

30. 출제의도 : 벡터의 연산의 성질을 이용하여 점이 나타내는 도형의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

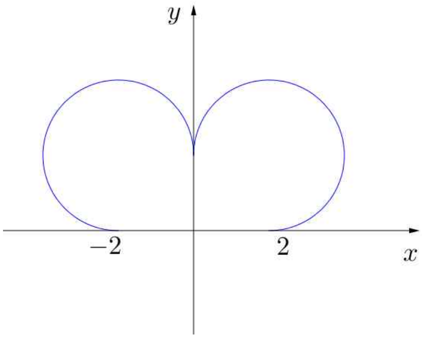
$(|\overrightarrow{AX}|-2)(|\overrightarrow{BX}|-2)=0$에서

$|\overrightarrow{AX}|=2$ 또는 $|\overrightarrow{BX}|=2$

점 X는 점 $A(-2,\ 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 또는 점 $B(2,\ 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

이때, $|\overrightarrow{OX}|\geq 2$이므로

점 X가 나타내는 도형은 다음 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\vec{u}$가 이루는 각의 크기를 θ_1, 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$, $\vec{u}$가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

조건 (가)에서

$(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u})(\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{u})\geq 0$

즉 $|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta_1\cos\theta_2\geq 0$이므로

두 점 P, Q는 [그림 1]에서 제1사분면, x축, y축에 있거나 제2사분면, x축, y축에 있어야 한다.

(i) 두 점 P, Q가 [그림 1]에서 제1사분면 또는 x축 또는 y축 위에 있을 때,

선분 PQ의 중점을 M이라 하면

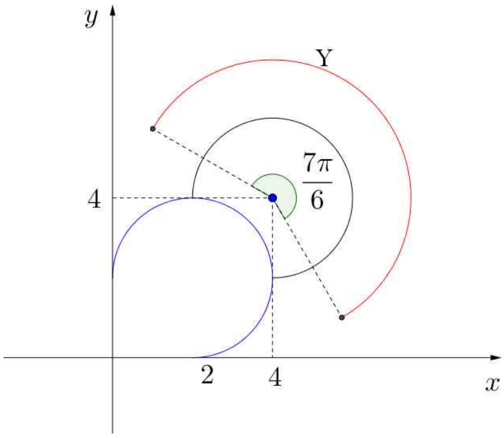
$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BM}$

이때,

$|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2-|\overrightarrow{PM}|^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

이므로

점 Y의 집합이 나타내는 도형은 중심이 $(4,\ 4)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$, 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 호이다.



따라서 점 Y가 나타내는 도형의 길이는

$2\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

(ii) 두 점 P, Q가 [그림 1]에서 제2사분면 또는 x축 또는 y축 위에 있을 때,

(i)과 마찬가지 방법으로

점 Y가 나타내는 도형의 길이는

$2\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

(i), (ii)에서

점 Y가 나타내는 도형의 길이는

$2\times\frac{7\sqrt{3}}{3}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

따라서 $p=3$, $q=14$이므로

$p+q=3+14=17$

정답 17