수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01.①	02.⑤	03.⑤	04.④	05.③
06.①	07.④	08.②	09.③	10.③
11.④	12.②	13.②	14.⑤	15.①
16. 2	17. 8	18. 9	19. 11	
20. 21	21. 192	22. 108		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\times 3^{-\frac{7}{4}}$

$=3^{-\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{7}{4}}$

$=3^{-\frac{1}{4}+\left(-\frac{7}{4}\right)}$

$=3^{-2}=\frac{1}{9}$

정답 ①

2. **출제의도** : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+4x+5$에서

$f'(x)=6x^2+4$

이므로

$f'(1)=6+4=10$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2a_4=36$

에서 $a_1=2$이므로

$2r\times 2r^3=36$

즉, $r^4=9$

따라서

$\frac{a_7}{a_3}=\frac{a_1r^6}{a_1r^2}=r^4=9$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$

이 성립해야 한다. 이때,

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}(2x+a)=-2+a$

$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}(x^2-5x-a)=6-a$

$f(-1)=-2+a$

이므로

$-2+a=6-a$

따라서 $a=4$

정답 ④

5. **출제의도** : 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12$

$\quad =6(x+2)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=1$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값
$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$
을 갖고, $x=1$에서 극솟값
$m=f(1)=2+3-12+1=-6$
을 갖는다.
따라서 $M+m=15$

정답 ③

6. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$$

에서

$$\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=4$$

$$\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4$$

$$\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$$

$$1-\cos^2\theta=2\cos^2\theta$$

따라서

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답 ①

7. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$$

이때, $\frac{1}{a_{n+1}}=-\frac{1}{n}-\frac{1}{4}$이므로 $n=12$를 대입하면

$$\frac{1}{a_{13}}=-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$$

즉, $a_{13}=-3$

정답 ④

8. **출제의도** : 함수의 극한값을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to0$이면
(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$이어야 한다.
따라서 $f(0)=0$

같은 방법으로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서
$f(1)=0$
따라서 삼차함수 $f(x)$를
$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)
로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$$

이므로
$b=-1$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(ax+b)=a+b$$

이므로

$a+b=1$

따라서 $a=2$이므로

$f(x)=x(x-1)(2x-1)$

따라서 $f(2)=2\times1\times3=6$

정답 ②

[다른 풀이]

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to0$이면

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=0$

이때

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=1$

같은 방법으로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서

$f(1)=0,\ f'(1)=1$

함수 $f(x)$는 삼차함수이고

$f'(0)=f'(1)=1$이므로

$f'(x)=ax(x-1)+1$, 즉

$f'(x)=ax^2-ax+1$

이라 놓으면

$f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=0$에서 $C=0$

$f(1)=0$에서 $\frac{a}{3}-\frac{a}{2}+1=0$

$a=6$이므로 $f(x)=2x^3-3x^2+x$

$\therefore\ f(2)=6$

9. **출제의도** : 도함수를 활용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=-4t^3+12t^2$

이므로

$a(t)=v'(t)=-12t^2+24t$

시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12이므로

$-12k^2+24k=12$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$k=1$

한편, $v(t)=-4t^3+12t^2=-4t^2(t-3)$이므로 $3\le t\le4$일 때 $v(t)\le0$이다.

따라서 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_3^4|v(t)|dt&=\int_3^4\left|-4t^3+12t^2\right|dt\\&=\int_3^4(4t^3-12t^2)dt\\&=\left[t^4-4t^3\right]_3^4\\&=0-(-27)=27\end{aligned}$$

정답 ③

10. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

이므로 두 점 A,B의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2b},a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2b},a\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5$, $\frac{a}{b}=5$

$a=5b\cdots$ ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}$

$=2ab\times\frac{2ab}{5}$

$=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16}$, $ab=\frac{5}{4}\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ 이므로

$a+b=3$

정답 ③

11. **출제의도** : 정적분과 미분과의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$ $\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a+0$

이므로

$f(1)=2+4a$ $\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=3a+\int_1^0 f(t)\,dt$

즉,

$0=3a-\int_0^1 f(t)\,dt$

이므로

$\int_0^1 f(t)dt=3a$ $\cdots$ ㉢

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$이므로 ㉡, ㉢에서

$2+4a=3a$

즉, $a=-2$, $f(1)=-6$

㉠의 양변을 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2+2ax+f(x)$

이므로

$f'(x)=6x+2a=6x-4$

따라서

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=3x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=3-4+C=-6$에서

$C=-5$

따라서

$f(3)=27-12-5=10$

이므로

$a+f(3)=-2+10=8$

정답 ④

12. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BAC})}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{\mathrm{BC}}=\sin\frac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의

길이도 $2\sqrt{7}$이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BCD})}=4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{\mathrm{BD}}=\sin(\angle\mathrm{BCD})\times 4\sqrt{7}$$
$$=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times 4\sqrt{7}=8$$

한편, $\angle\mathrm{BDC}=\pi-\angle\mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times 8\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$x^2+8x-20=0$

$(x-2)(x+10)=0$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{\mathrm{CD}}=2$

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}=8+2=10$

정답 ②

13. **출제의도** : 등차수열의 성질과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=-45<0$ 이고 $d>0$이므로

조건(가)를 만족시키기 위해서는

$a_m<0$, $a_{m+3}>0$

즉, $-a_m=a_{m+3}$ 에서 $a_m+a_{m+3}=0$

따라서,

$\{-45+(m-1)d\}+\{-45+(m+2)d\}=0$

$-90+(2m+1)d=0$

$(2m+1)d=90\cdots$㉠

이고 $2m+1$은 1보다 큰 홀수이므로 d는 짝수이다.

그런데, $90=2\times 3^2\times 5$ 이므로 ㉠을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{2\times(-45)+(n-1)d\}}{2}>-100$$

$n\{-90+(n-1)d\}>-200\cdots$㉡

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉡을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d의 값의 합은

$18+30=48$

정답 ②

14. **출제의도** : 다항함수의 미분과 정적분을 활용하여 주어진 명제의 참과 거짓을 판정할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

이다.

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=x^3-3x^2+C\ (C\text{는 적분상수})$$

따라서

$f(x)-f(0)=x^3-3x^2$

이고

$f(x+p)-f(p)$

$=(x+p)^3-3(x+p)^2+C-(p^3-3p^2+C)$

$=x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\le 0)\\ x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x & (x>0)\end{cases}$$

이다.

ㄱ. $p=1$이면

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\le 0)\\ x^3-3x & (x>0)\end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & (x<0)\\ 3x^2-3 & (x>0)\end{cases}$$

따라서 $g'(1)=3-3=0$ (참)

ㄴ.

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x\to 0-} g'(x)=\lim_{x\to 0-}(3x^2-6x)=0$$

$$\lim_{x\to 0+} g'(x)$$

$$=\lim_{x\to 0+}\{3x^2+2(3p-3)x+(3p^2-6p)\}$$

$$=3p^2-6p$$

이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$3p^2-6p=0$

이어야 한다.

따라서 양수 p의 값은 $p=2$뿐이므로 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ.

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{5}{4}$$

이고,

$$\int_{0}^{1} g(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}\{x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+(p-1)x^3+\frac{3p^2-6p}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}+(p-1)+\frac{3p^2-6p}{2}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

이므로

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0} g(x)\,dx+\int_{0}^{1} g(x)\,dx$$

$$=\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-2$$

$$=\frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

따라서 $p\ge 2$일 때 $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx\ge 0$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

[다른 풀이]

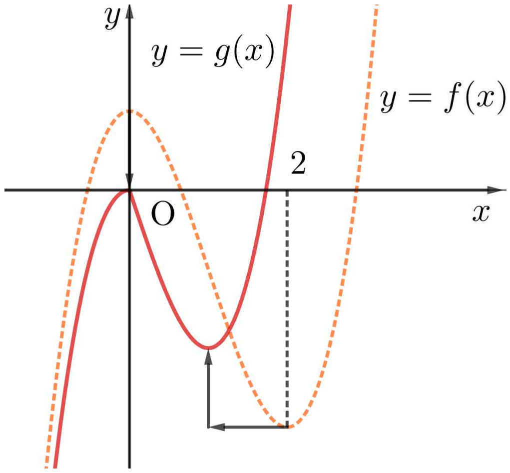
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고

$f'(0)=f'(2)=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=2$에서 극소이다.

이때, 곡선 $y=f(x)-f(0)$은 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-f(0)$만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=f(x+p)-f(p)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼, y축의 방향으로 $-f(p)$만큼 평행이동한 것이다.

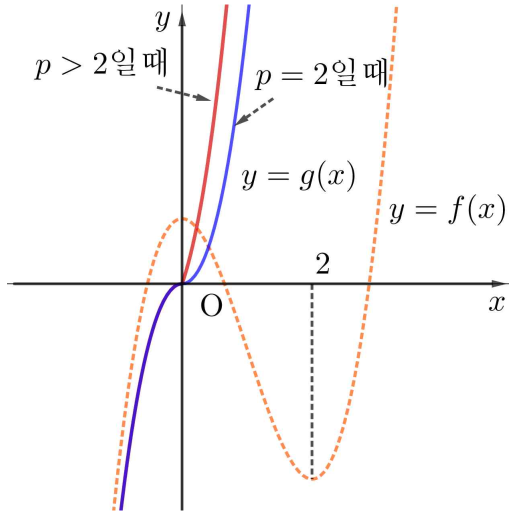
따라서 두 곡선 $y=f(x)-f(0)$, $y=f(x+p)-f(p)$는 모두 원점을 지나고 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $g'(1)=0$이다. (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0+} g(x) = g(0) = 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
이때
$\lim\limits_{x\to 0-} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0-} (3x^2-6x) = 0$
이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$\lim\limits_{x\to 0+} g'(x) = 0$
이어야 한다.
그런데 $f'(x)=0$인 양수 x의 값은 2뿐이므로 양수 p의 값은 2뿐이다.
따라서 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $p \ge 2$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$p=2$일 때,
함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로
$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$
$p>2$일 때, 모든 실수 x 에 대하여
$f(x+p)-f(p) \ge f(x+2)-f(2)$
이므로
$\int_{-1}^{1} g(x)dx \ge 0$
따라서 $p \ge 2$일 때 $\int_{-1}^{1} g(x)dx \ge 0$ (참)

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
먼저 a_5의 값을 구해 보자.
$-1 \le a_5 < -\frac{1}{2}$이면 $a_6 = -2a_5 - 2$이므로
$a_5 + a_6 = 0$에서 $-a_5 - 2 = 0$
즉, $a_5 = -2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.
$-\frac{1}{2} \le a_5 \le \frac{1}{2}$이면 $a_6 = 2a_5$이므로

$a_5+a_6=0$에서 $3a_5=0$

즉, $a_5=0$

$\frac{1}{2}<a_5\le 1$이면 $a_6=-2a_5+2$이므로

$a_5+a_6=0$에서 $-a_5+2=0$

즉, $a_5=2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_5=0$이고 이때 $a_4=-1$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=1$이다.

한편 $0\le a_{n+1}\le 1$일 때

$a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$ 또는 $a_n=1-\frac{1}{2}a_{n+1}$

(ⅰ) $a_4=-1$인 경우

$a_3<0$, $a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_4=0$인 경우

㉠ $a_3=-1$인 경우

$a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3=0$인 경우

$a_2=0$ 또는 $a_2=1$이고,

$a_2=0$일 때 $a_1=1$이면 조건을 만족시키고, $a_2=1$일 때 $a_1=\frac{1}{2}$이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_3=1$인 경우

$a_2=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$이며, 이것은 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $a_4=1$인 경우

$a_3=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_2=\frac{1}{4}$ 또는 $a_2=\frac{3}{4}$

㉠ $a_2=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_2=\frac{3}{4}$인 경우

$a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{2}$$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2 100-2\log_2 5$

$=\log_2 100-\log_2 25$

$=\log_2 \frac{100}{25}$

$=\log_2 4$

$=\log_2 2^2$

$=2$

정답 2

17. 출제의도 : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (8x^3-12x^2+7)dx$

$=2x^4-4x^3+7x+C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0)=3$이므로

$C=3$

따라서

$f(x)=2x^4-4x^3+7x+3$

이므로

$f(1)=2-4+7+3=8$

정답 8

18. **출제의도** : 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=45 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$3\sum_{k=1}^{10}b_k=42$

즉, $\sum_{k=1}^{10}b_k=14$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{10}b_k-10\times\frac{1}{2}$$
$$=14-5=9$$

정답 9

19. **출제의도** : 평균변화율과 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{64-96+20}{4}=-3$$

또한, $f'(x)=3x^2-12x+5$ 이므로

$3a^2-12a+5=-3$, $3a^2-12a+8=0 \cdots ㉠$

㉠을 만족시키는 모든 실수 a는 $0<a<4$를 만족시키므로 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$ 이다.

따라서 $p=3$, $q=8$ 이므로

$p+q=11$

정답 11

20. **출제의도** : 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$를

$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$

라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (f(x)<-x)\\ 2f(x)-5x & (f(x)\geq -x)\end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은

$g(x)=k$와 같다.

$f(x)=-x$에서

$\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=-x$,

$\frac{x}{2}(x^2-9x+22)=0$

이때 모든 실수 x에 대하여

$$x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는

오직 원점 (0,0)에서만 만난다.
따라서 함수 $h(x)$를

$$h(x)=2f(x)-5x$$
$$=x^3-9x^2+15x$$

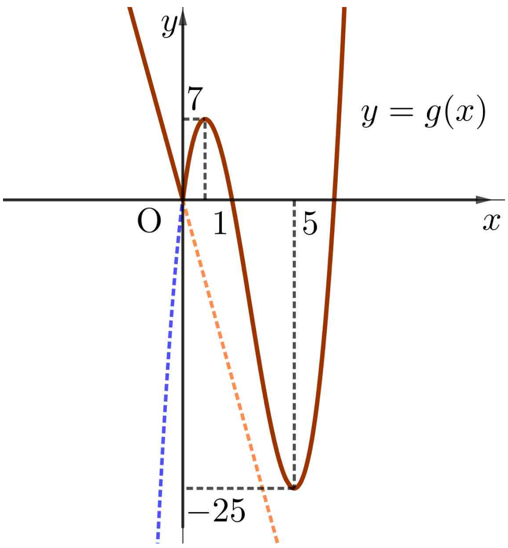
라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (x<0)\\ h(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다.

$$h'(x)=3x^2-18x+15$$
$$=3(x-1)(x-5)$$

이므로 $h'(x)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=5$
따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값
$h(1)=1-9+15=7$
을 갖고, $x=5$에서 극솟값
$h(5)=125-225+75=-25$
를 갖는다.
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k의 값의 범위는
$0<k<7$
이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은
$1+2+3+\cdots+6$

$$=\frac{6}{2}(1+6)=21$$

정답 21

21. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.
즉, 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{2}$이다.
점 A의 좌표를 $(k,\ -k+4)$라 하면

$$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\frac{5}{2}\right)^2=2$$

에서

$$k=\frac{3}{2}$$

즉, $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로

$$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$$

$$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$$

$$a=\frac{25}{4}$$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$ 이고, 점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

$$=\frac{96}{25}$$

이므로

$$50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$$

정답 192

22. 출제의도 : 함수의 연속성과 미분가능성 및 삼차함수의 그래프를 이해하고 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$i(x)=|f(x)|$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 x의 값에 대하여

$$\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h},\ \lim_{h\to 0-}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$$

의 값이 항상 존재한다.

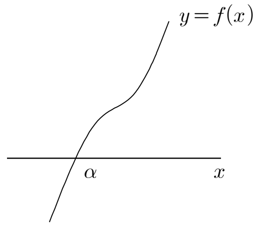
따라서,

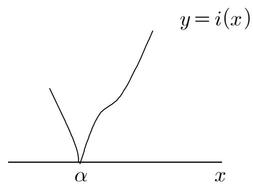
$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}$$

(i) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$인 경우





$g(x)$

$$=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$=f(x-3)\times$

$$\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ 0 & (x=\alpha) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

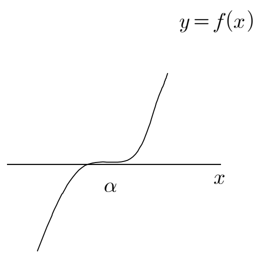
$$\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$$

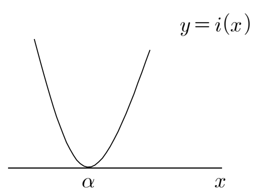
이어야 하므로

$$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$$

그런데 $f'(\alpha)\neq 0$, $f(\alpha-3)\neq 0$ 이므로 모순이다.

(ii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$인 경우





$g(x)$

$$=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$=f(x-3)\times$

$$\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ 0 & (x=\alpha) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$$

이어야 하고 $f'(\alpha)=0$ 이므로

$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}$

$=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

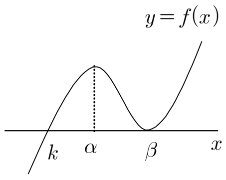
이 성립한다.

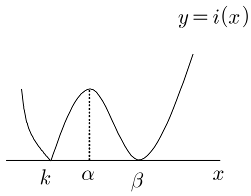
그런데, 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+3$으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<\beta)$ 인 경우



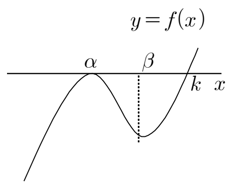


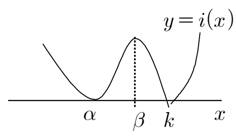
(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(v) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(l)=0$, $f(m)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<l<\beta<m)$ 인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(vi) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(\alpha<\beta<k)$ 인 경우





$g(x)$

$$=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$=f(x-3)\times$

$$\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<k) \\ 0 & (x=k) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>k) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$\lim_{x\to k-}g(x)=\lim_{x\to k+}g(x)=g(k)$$

이어야 하므로

$f(k-3)\times\{-2f'(k)\}=f(k-3)\times\{2f'(k)\}=0$

그런데 $f'(k)\neq 0$ 이므로 $f(k-3)=0$이고

$k-3=\alpha\cdots$㉠

즉, $k=\alpha+3$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은

$x<k$일 때 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

$x=k$일 때 $x=k$

$x>k$일 때 $x=k+3$

이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의 합이 4이므로

$\alpha+\beta+k+k+3=7$

$\alpha+\beta+2k=4 \cdots$ ㉡

또한,

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$

이고 $f'(x)=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$이므로

$f'(x)=0$에서

$\beta=\dfrac{\alpha+2k}{3}$

㉡에 대입하여 정리하면

$\alpha+2k=3$

㉠,㉡에서 $\alpha=-1$, $k=2$ 이므로

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

따라서

$f(5)=(5+1)^2(5-2)=36\times3=108$

정답 108

■ [선택: 기하]
23. ⑤ 24. ④ 25. ② 26. ③ 27. ①
28. ① 29. 40 30. 45

23. **출제의도** : 공간좌표에서 대칭점과 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 B는 점 $A(3, 0, -2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점이므로
$B(3, 0, 2)$
따라서 $C(0, 4, 2)$이므로
$\overline{BC} = \sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2+(2-2)^2}$
$= 5$

정답 ⑤

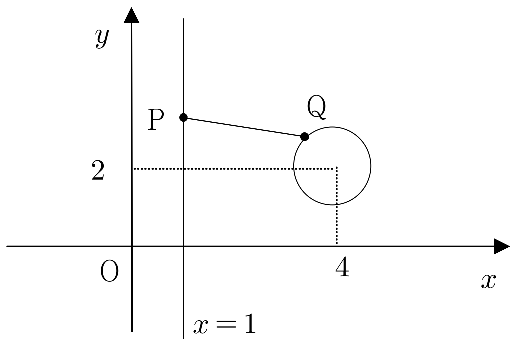
24. **출제의도** : 쌍곡선의 점근선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$의 점근선의 방정식은 $y = \pm\frac{4}{a}x$
이때, 점근선 중 하나의 기울기가 3이므로, $a > 0$이므로
$\frac{4}{a} = 3$
따라서 $a = \frac{4}{3}$

정답 ④

25. **출제의도** : 성분으로 나타낸 벡터의 연산을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\vec{p} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$에서
$\vec{a} \cdot \vec{p} = \vec{a} \cdot \vec{b}$
$\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$
이때, $\vec{a} = (3, 0)$, $\vec{b} = (1, 2)$이므로
점 $P(x, y)$에 대하여 $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$라 하면
$(3, 0) \cdot (x-1, y-2) = 0$
$3(x-1) = 0$
$x = 1$
그러므로 점 P는 직선 $x = 1$ 위의 점이다.
또, $|\vec{q} - \vec{c}| = 1$이고 $\vec{c} = (4, 2)$이므로
$\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$라 하면 점 Q는 중심이 $(4, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.



한편,
$|\vec{p} - \vec{q}| = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}|$
$= |\overrightarrow{QP}|$
$= \overline{PQ}$
따라서, 이 값의 최솟값은 원의 중심 $(4, 2)$와 직선 $x = 1$ 사이의 거리에서 반지름의 길이 1을 빼면 되므로
$3 - 1 = 2$

정답 ②

26. **출제의도** : 포물선의 정의를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 p의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

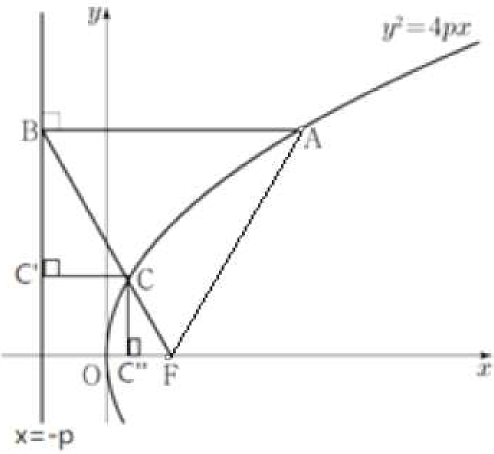
$\overline{AB}=x_1+p$

이때, $\overline{AB}=\overline{BF}$이므로

$\overline{BF}=x_1+p$ …… ㉠

한편, 점 C에서 포물선의 점근선에 내린 수선의 발을 C′이라 하면

$\overline{CF}=\overline{CC'}=x_2+p$ …… ㉡



이때, $\overline{BC}+3\overline{CF}=6$이므로 ㉠과 ㉡에서

$\overline{BC}+3\overline{CF}$

$=\overline{BF}+2\overline{CF}$

$=(x_1+p)+2(x_2+p)$

$=x_1+2x_2+3p$

$=6$ …… ㉢

한편, $\overline{AB}=\overline{BF}$이고 포물선의 정의에 의해 $\overline{AF}=\overline{AB}$이므로 삼각형 ABF는 정삼각형이다. 그러므로

$\angle OFB=60°$

이때,

$\overline{BF}\cos 60°=2p$

$\overline{CF}\cos 60°=p-x_2$

이므로

$(x_1+p)\times\dfrac{1}{2}=2p$,

$(x_2+p)\times\dfrac{1}{2}=p-x_2$

즉,

$x_1=3p$, $x_2=\dfrac{1}{3}p$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$3p+\dfrac{2}{3}p+3p=6$, $\dfrac{20}{3}p=6$

따라서

$p=\dfrac{9}{10}$

정답 ③

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이의 합의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P′이라 하면 $\overline{AD}\perp$(평면 BCD)이고 $\overline{AP'}\perp\overline{BC}$이므로

삼수선의 정리에 의해

$\overline{DP'}\perp\overline{BC}$이다.

이때,

$\overline{AP}+\overline{DP}\geq\overline{AP'}+\overline{DP'}$

이므로 구하는 최소의 길이는

$\overline{AP'}+\overline{DP'}$

이다. 한편, 직각삼각형 BCD에서

$\overline{BC}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{DC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DP'}$

$\overline{DB}\times\overline{DC}=\overline{BC}\times\overline{DP'}$

$2\times2\sqrt{3}=4\times\overline{DP'}$

$\overline{DP'}=\sqrt{3}$ …… ㉠

이때, 직각삼각형 ADP′에서

$$\overline{AP'}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DP'}^2}$$
$$=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}$$
$$=2\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡에서 구하는 최솟값은

$$\overline{AP'}+\overline{DP'}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}$$
$$=3\sqrt{3}$$

정답 ①

28. **출제의도** : 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있고 타원의 정의를 이용하여 삼각형의 변의 길이의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P(2, 3)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1$$

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$$

그러므로 점 S의 좌표는 (8, 0)이다

한편, $c=\sqrt{16-12}=2$이므로

F(2, 0), F′(−2, 0)

이때, 두 삼각형 F′FQ, F′SR는

$\angle QF'F=\angle RF'S$이고 $\overline{FQ}//\overline{SR}$이므로

닮은 삼각형이다.

한편, $\overline{F'F}=4$, $\overline{F'S}=10$이므로 두 삼각형 F′FQ, F′SR의 둘레의 길이의 비는

2 : 5

한편, 삼각형 F′FQ의 둘레의 길이는 타 타원의 정의에 의해

$$\overline{FQ}+\overline{QF'}=2\times4=8$$

이므로

$$\overline{FF'}+\overline{FQ}+\overline{QF'}=4+8=12$$

따라서, 구하는 삼각형 SRF′의 둘레의 길이를 l이라 하면

$12 : l=2 : 5$

이므로

$l=30$

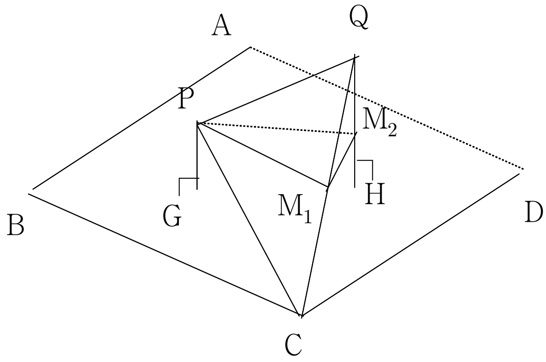
정답 ①

29. **출제의도** : 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이므로 점 P를 지나고 평면 ABCD와 평행한 평면이 두 선분 QC, QH와 만나는 점을 각각 M_1, M_2라 하면 두 점은 중점이다.

이때, 구하는 평면이 이루는 각은 두 평면 PM_1M_2, PM_1Q가 이루는 각이다.



한편 점P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P′, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O_1이라 하면

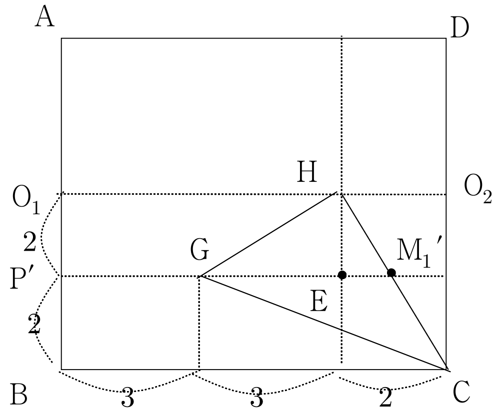
$$\overline{O_1P'}=4\cos 60^\circ=2$$

$$\overline{P'G}=\sqrt{\overline{PP'}^2-\overline{PG}^2}$$
$$=\sqrt{(4\sin 60^\circ)^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=3$$

또, 점 Q에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 Q′, 선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 O_2라 하면

$$\overline{HO_2}=\sqrt{\overline{QO_2}^2-\overline{QH}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}$$
$$=2$$

이때, 점 M_1의 평면 ABCD 위로 정사영시킨 점을 M_1'이라 M_1'은 선분 CH의 중점이므로 그림과 같다.



이때,

$\overline{GH}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\overline{HM_1'}=\frac{1}{2}\overline{HC}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$

또, 선분 GM_1'과 점 H를 지나고 선분 BC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하면

$\overline{GM_1'}=\overline{GE}+\overline{EM_1'}=3+1=4$

이때,

$\overline{PM_2}=\overline{GH}=\sqrt{13}$,

$\overline{M_1M_2}=\overline{HM_1'}=\sqrt{5}$,

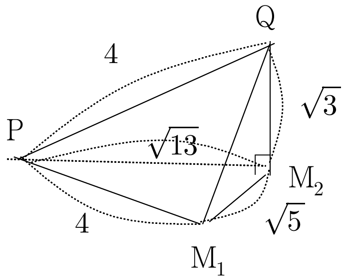
$\overline{PM_1}=\overline{GM_1'}=4$

이고

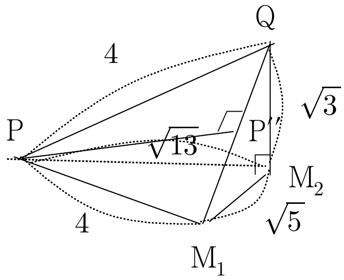
$\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2}=4$,

$\overline{QM_1}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{2}$

이므로 다음 그림과 같다.



점 P에서 선분 QM_1에 내린 수선의 발을 P''이라 하자.

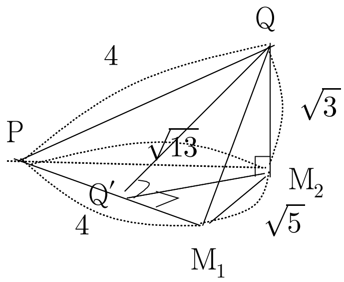


이때, $\angle PM_1Q=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overline{M_1P''}}{\overline{PM_1}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{M_1Q}}{\overline{PM_1}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

또, 점 Q에서 선분 PM_1에 내린 수선의 발을 Q'이라 하면 $\overline{QQ'}\perp\overline{PM_1}$이고 $\overline{QM_2}\perp$(평면PM_1M_2)이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{M_2Q'}\perp\overline{PM_1}$



이때,

$\overline{\mathrm{M_1Q'}}=\overline{\mathrm{QM_1}}\cos\alpha$

$=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$=1$

이므로

$\overline{\mathrm{QQ'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{QM_1}}^2-\overline{\mathrm{Q'M_1}}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}$

$=\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{M_2Q'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{M_2M_1}}^2-\overline{\mathrm{Q'M_1}}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

따라서,

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{Q'M_2}}}{\overline{\mathrm{QQ'}}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

이므로

$70\times\cos^2\theta=70\times\dfrac{4}{7}=40$

정답 40

30. 출제의도 : 벡터의 내적의 정의를 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1$이므로 점 P는 중심이 $\mathrm{A}(-3, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

또, $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=2$이므로 점 Q는 중심이 $\mathrm{B}(0, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

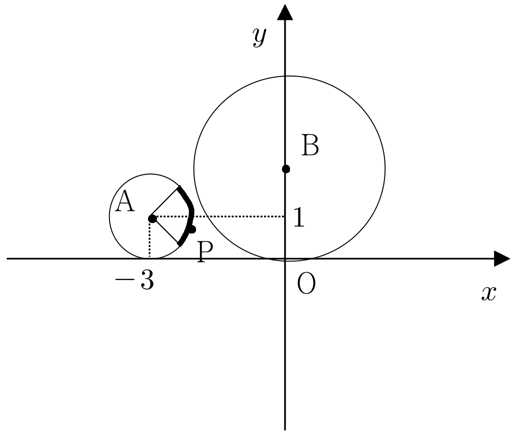
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$

그러므로 점 P를 나타내면 그림과 같다.



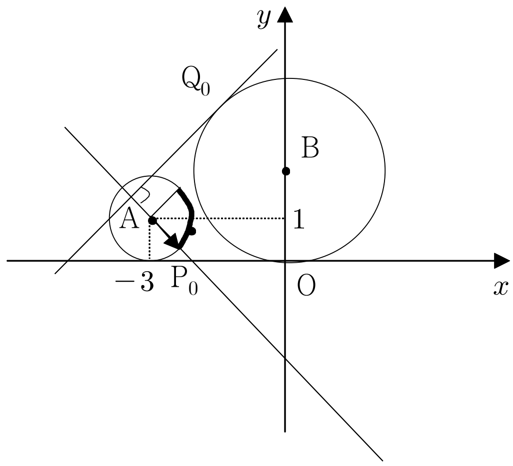
또, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$가 이루는 각의 크기를 θ'이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cos\theta'$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cos\theta'$

그러므로 이 값이 최소이기 위해서는 점 P는 A를 지나고 직선 기울기가 -1인 직선 위의 점이어야 하고, 점 Q는 이 직선과 수직이면서 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 접하는 점 중 제 2사분면의 점이어야 한다.



한편, $\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ_0}}\ge1$에서 두 벡터

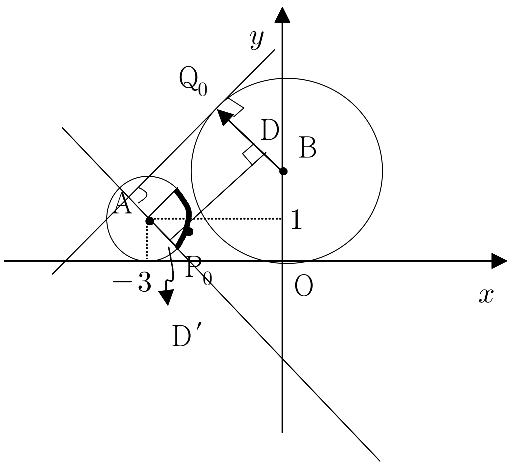
$\overrightarrow{\mathrm{BX}}, \overrightarrow{\mathrm{BQ_0}}$가 이루는 각의 크기를 θ''이라 하면

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BX}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BQ_0}}\right|\cos\theta'' \geq 1$

$2\left|\overrightarrow{\mathrm{BX}}\right|\cos\theta'' \geq 1$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BX}}\right|\cos\theta'' \geq \dfrac{1}{2}$

그러므로 선분 $\mathrm{BQ_0}$위의 점 D를 $\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{2}$가 되도록 잡은 후, 점 D에서 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 점 X는 선분 AD′위의 점이다.



따라서, $\left|\overrightarrow{\mathrm{Q_0X}}\right|$의 최댓값은 X가 D′일 때 가지므로 $\left|\overrightarrow{\mathrm{Q_0X}}\right|^2$의 최댓값은

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Q_0D'}}^2 &= \overline{\mathrm{Q_0D}}^2+\overline{\mathrm{DD'}}^2\\ &=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2\\ &=\frac{9}{4}+8\\ &=\frac{41}{4}\end{aligned}$$

그러므로

$p+q=4+41=45$

정답 45

EBS