제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. ${}_{9}\mathrm{C}_{7}$의 값은? [2점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

2. 함수 $f(x)=7+3\ln x$에 대하여 $f'(3)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+e^{3x}-2}{2x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A^{C}\cap B)=\frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^{C}은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

5. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^{x+3}\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{e^3}{2}$ ② e^3 ③ $\dfrac{3}{2}e^3$ ④ $2e^3$ ⑤ $\dfrac{5}{2}e^3$

6. 곡선 $x^2+xy+y^3=7$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

7. 같은 종류의 비어 있는 상자 3개가 있다. 같은 종류의 장난감 12개를 남김없이 이 3개의 상자에 빈 상자가 없도록 나누어 넣으려고 한다. 각 상자에 넣은 장난감의 개수가 모두 다르게 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

8. 포물선 $y^2-4y-ax+4=0$의 초점의 좌표가 $(3,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

9. 함수 $f(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(2)$의 값은? [3점]

(가) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+4h)-g(2)}{h}=8$

(나) 함수 $(f\circ g)(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는 10이다.

① 1 ② $\log_2 3$ ③ 2 ④ $\log_2 5$ ⑤ $\log_2 6$

10. $\displaystyle\int_1^e x^3 \ln x\, dx$의 값은? [3점]

① $\dfrac{3e^4}{16}$ ② $\dfrac{3e^4+1}{16}$ ③ $\dfrac{3e^4+2}{16}$ ④ $\dfrac{3e^4+3}{16}$ ⑤ $\dfrac{3e^4+4}{16}$

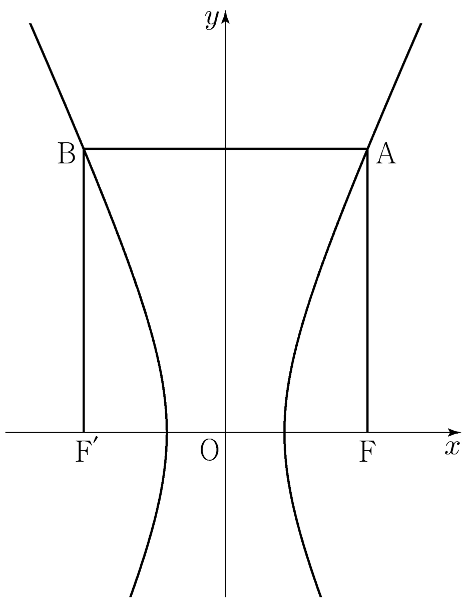
11. 함수 $f(x)=xe^x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 (a, b)일 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]

① $4e^2$ ② e ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{4}{e^2}$ ⑤ $\frac{9}{e^3}$

12. 함수 $f(x)=\sin(x+\alpha)+2\cos(x+\alpha)$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$일 때, $\tan\alpha$의 값은? (단, α는 상수이다.) [3점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

13. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선이 있다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 A, 점 F′을 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제2사분면에서 만나는 점을 B라 하자. 사각형 ABF′F가 정사각형일 때, 정사각형 ABF′F의 대각선의 길이는? [3점]



① $3+2\sqrt{2}$ ② $5+\sqrt{2}$ ③ $4+2\sqrt{2}$ ④ $6+\sqrt{2}$ ⑤ $5+2\sqrt{2}$

14. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a>b$이고 $a>c$일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{54}$ ② $\frac{55}{216}$ ③ $\frac{29}{108}$ ④ $\frac{61}{216}$ ⑤ $\frac{8}{27}$

15. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=2\sqrt{t+1}\,,\ y=t-\ln(t+1)$$

이다. 점 P의 속력의 최솟값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

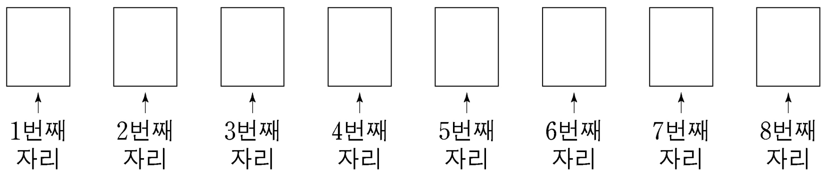
16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)\cos x}{e^x}$$

라 하자. $g'(\pi)=e^{\pi}g(\pi)$일 때, $\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$의 값은? (단, $f(\pi)\neq 0$) [4점]

① $e^{-2\pi}$ ② 1 ③ $e^{-\pi}+1$
④ $e^{\pi}+1$ ⑤ $e^{2\pi}$

17. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 8개의 자리에 각각 한 장씩 임의로 놓을 때, 8 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 k 이하인 사건을 A_k라 하자.



다음은 두 자연수 $m, n\,(1 \le m < n \le 8)$에 대하여 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

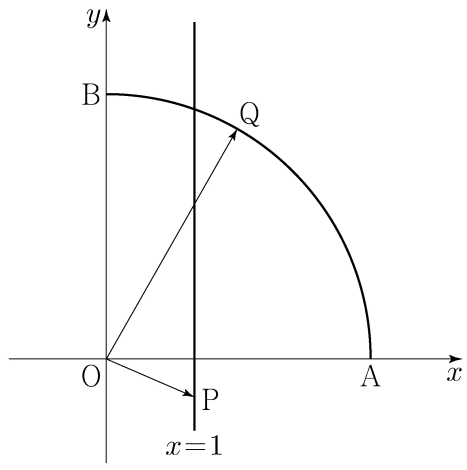
> A_k는 k번째 자리에 k 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $\mathrm{P}(A_k)=$ $\boxed{(가)}$
>
> 이다.
> $A_m \cap A_n\,(m<n)$은 m번째 자리에 m 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, n번째 자리에 n 이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m번째와 n번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $\mathrm{P}(A_m \cap A_n)=$ $\boxed{(나)}$
>
> 이다.
> 한편, 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이기 위해서는
>
> $\mathrm{P}(A_m \cap A_n)=\mathrm{P}(A_m)\mathrm{P}(A_n)$
>
> 을 만족시켜야 한다.
> 따라서 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $k=4$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $m=3$, $n=5$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $p \times q \times r$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

18. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(0, 3)$과 직선 $x=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, a)$가 있다. 점 Q가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(a)=5$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $-5\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$ ④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$



19. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는? [4점]

> (가) $n=1, 2, 3$일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$이다.
>
> (나) $x_4 \leq 12$

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)>0$
>
> (나) $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 할 때, $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 와 양의 실수 t 에 대하여 기울기가 t 인 직선이 곡선 $y=f(x)$ 에 접할 때 접점의 x 좌표를 $g(t)$ 라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 기울기가 a 일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $a\times g'(a)$ 의 값은? [4점]

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$ ④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

단답형

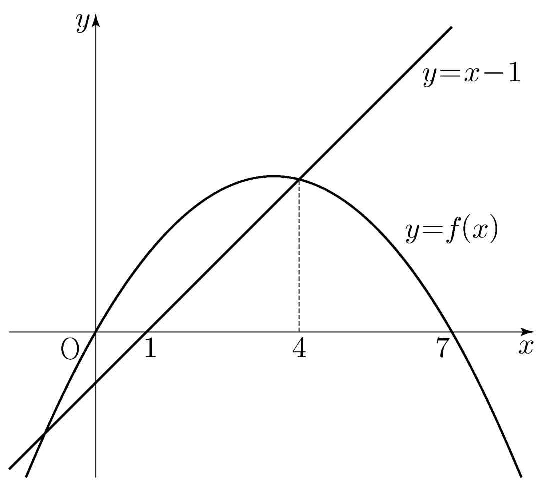
22. 벡터 $\vec{a}=(2,1)$ 에 대하여 벡터 $10\vec{a}$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

23. $\cos\theta=\dfrac{1}{7}$ 일 때, $\csc\theta\times\tan\theta$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. (단, $f(0)=f(7)=0$, $f(4)=3$) [3점]



25. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [3점]

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 4이다.
(나) $f(a)=a$인 X의 원소 a의 개수는 3이다.

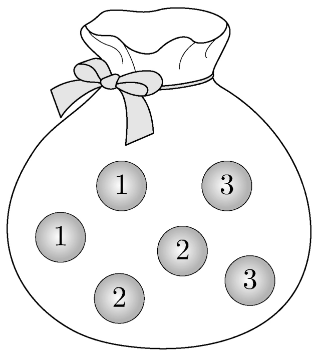
26. 좌표평면에서 $|\overrightarrow{OP}|=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 위의 점 $A(a, b)$에서의 접선을 l, 원점을 지나고 방향벡터가 $(1, 1)$인 직선을 m이라 하고, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$일 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $a>b>0$이다.) [4점]

27. 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때, $k\,(1 \le k \le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자. 두 자연수 m, n을

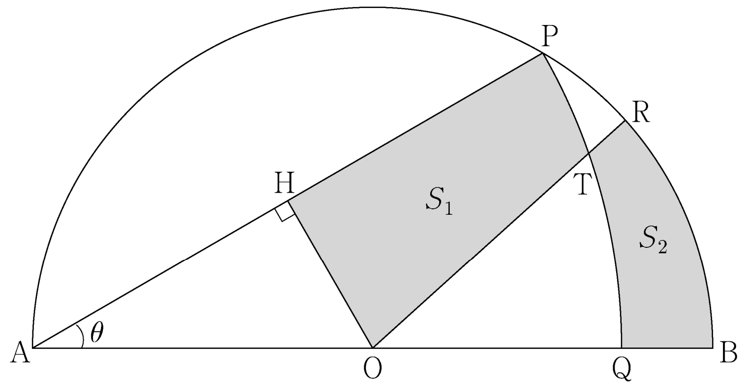
$$m = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3,$$

$$n = a_4 \times 100 + a_5 \times 10 + a_6$$

이라 할 때, $m > n$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.
호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3 : 7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.
세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 할 때,
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S_1 - S_2}{\overline{\mathrm{OH}}} = a$이다. $50a$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



29. 좌표평면에서 곡선 $C: y=\sqrt{8-x^2}\ (2 \le x \le 2\sqrt{2})$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=2$, $\angle \mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.
점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.
영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.) [4점]

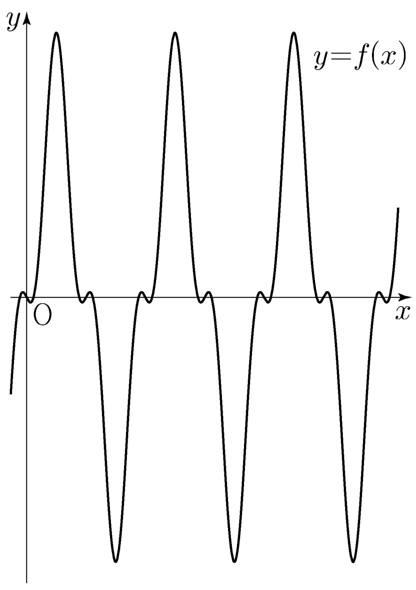
30. 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x+b\sin x$가

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 $t\ (1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)}\,dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101} c_n = p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.