정답 및 해설

수학 영역

나형 정답

1	②	2	④	3	③	4	④	5	④
6	①	7	③	8	⑤	9	②	10	②
11	③	12	⑤	13	③	14	⑤	15	⑤
16	②	17	①	18	⑤	19	③	20	①
21	④	22	9	23	243	24	12	25	640
26	2	27	25	28	11	29	13	30	125

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

2. [출제의도] 등차수열 계산하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$d = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$

$a_4 = 3 + 3 \times 2 = 9$

3. [출제의도] 로그 계산하기

$\log 10^3 = 3\log 10 = 3$

4. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$\tan\frac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

5. [출제의도] 호도법을 활용하여 부채꼴의 호의 길이 계산하기

부채꼴의 호의 길이는

$3 \times \frac{2}{3}\pi = 2\pi$

6. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

모든 실수 x에 대하여 $-1 \le \cos x \le 1$

$-1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \le 1$

$-2 \le 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \le 2$

$1 \le 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \le 5$이므로

함수 $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$의 최솟값은 1

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(0) = 1$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$이므로

$f(0) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 1 + 2 = 3$

8. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = 5^{x-2} + 3$은

x의 값이 증가함에 따라 함숫값이 증가한다.

$\{x \mid 1 \le x \le 3\}$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(3) = 5^{3-2} + 3 = 5 + 3 = 8$

9. [출제의도] $\sum$의 성질을 활용하여 수열의 합 이해하기

$\sum_{n=1}^{10}(2a_n - b_n) = 7$, $\sum_{n=1}^{10}(a_n + b_n) = 5$이므로

$\sum_{n=1}^{10}\{(2a_n - b_n) + (a_n + b_n)\} = 7 + 5$

$\sum_{n=1}^{10} 3a_n = 12$

$\sum_{n=1}^{10} a_n = 4$, $\sum_{n=1}^{10} b_n = 1$이므로

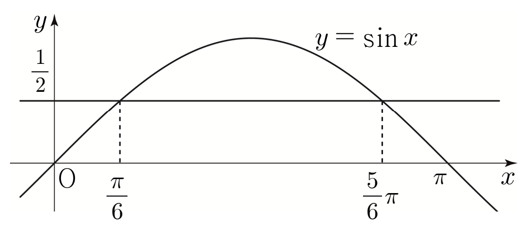
$\sum_{n=1}^{10}(a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{10} a_n - 2\sum_{n=1}^{10} b_n = 2$

(다른 풀이)

$\sum_{n=1}^{10}(2a_n - b_n) = 7$, $\sum_{n=1}^{10}(a_n + b_n) = 5$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{10}\{(2a_n - b_n) - (a_n + b_n)\}$$
$$= 7 - 5 = 2$$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기



$\sin x = \frac{1}{2}$ $(0 \le x \le \pi)$이므로

$x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi$

11. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기

$x_n = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$이므로

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{2}(n^2 + 1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{8} n^2 + \sum_{n=1}^{8} 1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8 \times 9 \times 17}{6} + 8\right)$$
$$= 106$$

12. [출제의도] 사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{5}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2R$이므로 $R = 5$

13. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항 추론하기

$a_1 = 3$

$a_2 = a_1 + 3 = 3 + 3 = 6$

$a_3 = 2a_2 = 2 \times 6 = 12$

$a_4 = a_3 + 3 = 12 + 3 = 15$

$a_5 = 2a_4 = 2 \times 15 = 30$

$a_6 = a_5 + 3 = 30 + 3 = 33$

14. [출제의도] 등비수열의 성질 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

일반항 $a_n = ar^{n-1}$이므로

$a_1 a_9 = a^2 r^8 = 16$

$a_3 a_7 + a_4 a_6 = a^2 r^8 + a^2 r^8 = 16 + 16 = 32$

(다른 풀이)

등비수열 $\{a_n\}$에서 등비중항의 성질에 의하여

$a_1 a_9 = a_3 a_7 = a_4 a_6 = (a_5)^2$이므로

$a_3 a_7 + a_4 a_6 = 16 + 16 = 32$

15. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$a_n = {}_{n+1}\mathrm{C}_2 = \frac{(n+1)n}{2}$이므로

$\frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

따라서

$$\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{a_n} = 2\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$= \frac{9}{5}$$

16. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

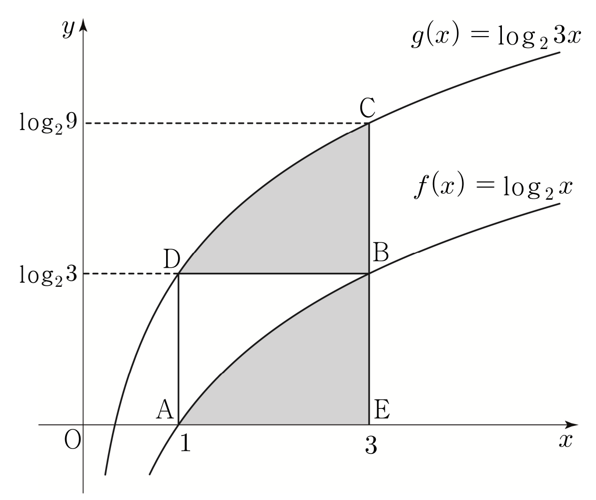
$g(x) = \log_2 3x = \log_2 x + \log_2 3$

$= f(x) + \log_2 3$이므로

함수 $g(x) = \log_2 3x$의 그래프는

함수 $f(x) = \log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로

$\log_2 3$만큼 평행이동한 것이다.



점 $(3, 0)$을 E라 하자.

함수 $y = g(x)$의 그래프와 선분 DB, 선분 BC로

둘러싸인 부분의 넓이는

함수 $y = f(x)$의 그래프와 선분 AE, 선분 EB로

둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 선분 AD, 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이는 사각형 AEBD의 넓이와 같다.

$\overline{\mathrm{AD}}=\log_2 3$, $\overline{\mathrm{AE}}=2$이므로

넓이는 $2\times\log_2 3=2\log_2 3$

17. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제 해결하기

$$\log_n 4\times\log_2 9=\frac{\log 2^2}{\log n}\times\frac{\log 3^2}{\log 2}=\frac{4\log 3}{\log n}=4\log_n 3$$

$4\log_n 3=m$ (m은 자연수)이라 하자.

$n=(3^4)^{\frac{1}{m}}$ 이므로

$m=1$일 때, $n=81$

$m=2$일 때, $n=9$

$m=4$일 때, $n=3$

따라서 모든 n의 값의 합은

$81+9+3=93$

18. [출제의도] 수학적 귀납법을 활용하여 추론하기

일반항이 $a_n=n^2$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+1)S_n-\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}k^3 \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=2S_1-S_1=1$, (우변)$=1$이므로
($*$)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 ($*$)이 성립한다고 가정하면
$(m+1)S_m-\sum_{k=1}^{m}S_k=\sum_{k=1}^{m}k^3$이다.
$n=m+1$일 때 ($*$)이 성립함을 보이자.

$$(m+2)S_{m+1}-\sum_{k=1}^{m+1}S_k$$
$$=(m+2)S_{m+1}-\left(\sum_{k=1}^{m}S_k+S_{m+1}\right)$$
$$=\boxed{(m+1)}S_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}S_k$$
$$=(m+1)(S_m+a_{m+1})-\sum_{k=1}^{m}S_k$$
$$=\boxed{(m+1)}S_m+\boxed{(m+1)^3}-\sum_{k=1}^{m}S_k$$
$$=\sum_{k=1}^{m}k^3+(m+1)^3$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}k^3 \text{ 이다.}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 식은
모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$f(m)=m+1$, $g(m)=(m+1)^3$

$f(2)+g(1)=11$

19. [출제의도] 지수함수의 성질을 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)=a^{x-k}$ ($a>0$, $a\neq 1$)이므로

조건에 의하여

$$f(2+x)f(2-x)=a^{2+x-k}\times a^{2-x-k}=a^{4-2k}=1$$

$4-2k=0$, $k=2$이므로

함수 $f(x)=a^{x-2}$ ($a>0$, $a\neq 1$)

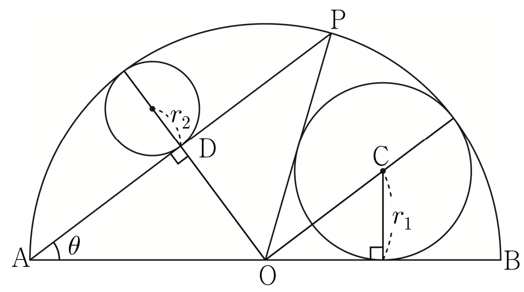
ㄱ. $f(2)=a^0=1$ (참)

ㄴ. $0<a<1$일 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. $\{f(t+2)-f(t+1)\}-\{f(t+1)-f(t)\}$
$=f(t+2)-2f(t+1)+f(t)$
$=a^t-2a^{t-1}+a^{t-2}$
$=a^{t-2}(a^2-2a+1)$
$=a^{t-2}(a-1)^2>0$
이므로 $f(t+1)-f(t)<f(t+2)-f(t+1)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기



반지름의 길이가 r_1인 원의 중심을 C, 선분 AP의 중점을 D라 하자.

$\angle\mathrm{BAP}=\theta$라 할 때,

$\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

(i) $\angle\mathrm{BOP}=2\theta$이므로 $\angle\mathrm{BOC}=\theta$

$$r_1+\overline{\mathrm{OC}}=r_1+\frac{r_1}{\sin\theta}=1$$

$$r_1=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{3}{8}$$

(ii) $2r_2+\overline{\mathrm{OD}}=2r_2+\sin\theta=1$

$$r_2=\frac{1-\sin\theta}{2}=\frac{1}{5}$$

따라서 $r_1r_2=\frac{3}{40}$

21. [출제의도] 등차수열의 합 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d ($d\neq 0$)라 하면

(가)에 의하여

$$\frac{5(2a_1+4d)}{2}=2\left|\frac{10(2a_1+9d)}{2}\right|$$

$a_1+2d=2|2a_1+9d|$

(i) $a_1+2d=4a_1+18d$일 때, $a_1=-\frac{16}{3}d$

$$a_3a_6=\left(-\frac{10}{3}d\right)\times\left(-\frac{d}{3}\right)=\frac{10}{9}d^2>0 \text{ 이므로}$$

(나)의 조건을 만족시킨다.

(ii) $a_1+2d=-4a_1-18d$일 때, $a_1=-4d$

$a_3a_6=(-2d)\times d=-2d^2<0$이므로

(나)의 조건에 모순이다.

따라서 $\frac{a_{21}}{a_1}=\frac{-\frac{16}{3}d+20d}{-\frac{16}{3}d}=-\frac{11}{4}$

22. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to 2}(x^2+5)=2^2+5=9$

23. [출제의도] 등비수열 이해하기

$a_5=a_2\times 3^3=9\times 27=243$

24. [출제의도] 등차수열의 성질 이해하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=24$

등차중항의 성질에 의하여 $k=\frac{\alpha+\beta}{2}$

따라서 $k=12$

25. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$\sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{a(2^5-1)}{2-1}=310$에서 $a=10$

따라서 $a_7=10\times 2^6=640$

26. [출제의도] 거듭제곱근과 지수법칙 이해하기

정사각형의 넓이가 $\sqrt[n]{64}$이므로

정사각형의 한 변의 길이

$f(n)=\sqrt{\sqrt[n]{64}}=2^{\frac{6}{2n}}=2^{\frac{3}{n}}$

따라서 $f(4)\times f(12)=2^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{1}{4}}=2$

27. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{BE}}=1$, $\overline{\mathrm{EC}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5}$

삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{10+45-25}{2\times\sqrt{10}\times 3\sqrt{5}}=\frac{30}{30\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $50\sin\theta\cos\theta=25$

(다른 풀이)

삼각형 AEC의 넓이는

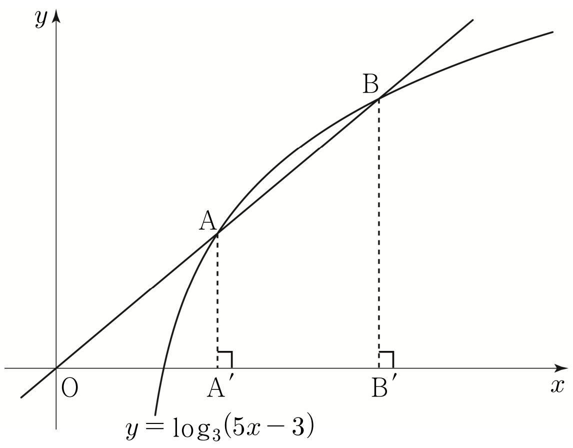
$\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 3\sqrt{5}\times\sin\theta=\frac{15}{2}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

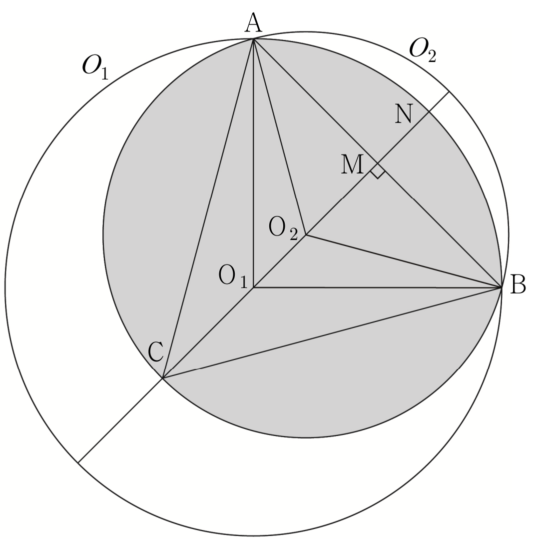
따라서 $50\sin\theta\cos\theta=25$

28. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제 해결하기



두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을
각각 A′, B′이라 하자.
삼각형 AOA′과 삼각형 BOB′은 닮음이므로
$\overline{OA'} : \overline{OB'} = \overline{AA'} : \overline{BB'} = 1 : 2$
점 A의 좌표를 $(a,\ \log_3(5a-3))$이라 하면
점 B의 좌표는 $(2a,\ \log_3(10a-3))$
$2\log_3(5a-3) = \log_3(10a-3)$
$25a^2 - 30a + 9 = 10a - 3$
$25a^2 - 40a + 12 = (5a-2)(5a-6) = 0$이므로
$a = \frac{2}{5}$ 또는 $a = \frac{6}{5}$
$a > \frac{3}{5}$이므로 $a = \frac{6}{5}$
점 A의 좌표는 $\left(\frac{6}{5},\ 1\right)$
직선 AB의 기울기는 직선 OA의 기울기와 같다.
직선 OA의 기울기 $\frac{q}{p} = \frac{1-0}{\frac{6}{5}-0} = \frac{5}{6}$
따라서 $p+q = 11$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기



원 O_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 원 O_2의 중심을 $\mathrm{O_2}$,
직선 $\mathrm{O_1O_2}$가 선분 AB와 만나는 점을 M이라 하고,
직선 $\mathrm{O_1O_2}$가 원 O_1과 만나는 두 점 중에서
점 M에 가까운 점을 N이라 하자.
$\overline{\mathrm{O_1A}} = 6$, $\overline{\mathrm{AM}} = 3\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{O_1A}} : \overline{\mathrm{AM}} = \sqrt{2} : 1$이므로 $\angle \mathrm{MO_1A} = \frac{\pi}{4}$

원 O_1에서
점 B를 포함하지 않는 부채꼴 $\mathrm{O_1NA}$의 넓이는
$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{9}{2}\pi$ …… ㉠
$\angle \mathrm{MO_2A} = \frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{O_2A}} = 2\sqrt{6}$
원 O_2에서
점 B를 포함하지 않는 부채꼴 $\mathrm{O_2AC}$의 넓이는
$\frac{1}{2} \times (2\sqrt{6})^2 \times \frac{2}{3}\pi = 8\pi$ …… ㉡
$\overline{\mathrm{O_1O_2}} = \overline{\mathrm{O_1M}} - \overline{\mathrm{O_2M}} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$이므로
삼각형 $\mathrm{AO_1O_2}$의 넓이는
$\frac{1}{2} \times 6 \times (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \times \sin\frac{\pi}{4}$
$= 9 - 3\sqrt{3}$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의하여
$p + q\sqrt{3} + r\pi = 2 \times \left\{\frac{9}{2}\pi + 8\pi - (9 - 3\sqrt{3})\right\}$
$= -18 + 6\sqrt{3} + 25\pi$
따라서 $p+q+r = 13$

30. [출제의도] 수열 추론하기

함수 $f(x) = x^2 + n$의 그래프와 직선 $y = mx$가
만나기 위해서는
이차방정식 $x^2 - mx + n = 0$의 판별식
$D = m^2 - 4n \geq 0$에서 $m^2 \geq 4n$
$n = 1$이면 $m^2 \geq 4$이므로 $a_1 = 2$
$n = 2$이면 $m^2 \geq 8$이므로 $a_2 = 3$
$n = 3$이면 $m^2 \geq 12$이므로 $a_3 = 4$
$n = 4$이면 $m^2 \geq 16$이므로 $a_4 = 4$

이를 바탕으로 추론하면
$4 \times 5 < 5^2 < 4 \times 7$이므로
$a_n = 5$를 만족시키는 n은 5, 6
$4 \times 7 < 6^2 \leq 4 \times 9$이므로
$a_n = 6$을 만족시키는 n은 7, 8, 9
⋮
$4 \times 26 < 11^2 < 4 \times 31$이므로
$a_n = 11$을 만족시키는
n은 26, 27, 28, 29, 30
$4 \times 31 < 12^2 \leq 4 \times 36$이므로
$a_n = 12$를 만족시키는
n은 31, 32, 33, 34, 35, 36

$a_n < a_{n+1}$을 만족시키는
33 이하의 모든 n의 값은
1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30
따라서 모든 n의 값의 합은 125