2019학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 [나형] •

정 답

1	③	2	③	3	④	4	④	5	③
6	⑤	7	①	8	③	9	②	10	②
11	②	12	④	13	①	14	④	15	③
16	②	17	①	18	⑤	19	①	20	⑤
21	①	22	16	23	15	24	3	25	11
26	32	27	6	28	34	29	5	30	75

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$(\sqrt[3]{3})^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3$

2. [출제의도] 지수 계산하기

$8^{\frac{1}{3}} \times 16^{\frac{1}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2 \times 2 = 4$

3. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 계산하기

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 이므로 $-\frac{\pi}{6} \le x - \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{3}$ 이다.

$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ 에서 $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$x = \frac{\pi}{3}$ 이다.

4. [출제의도] 로그 계산하기

$$\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 12 = \log_2\left(\frac{4}{3} \times 12\right) = \log_2 16 = 4$$

5. [출제의도] 상용로그표 이해하기

$$\log 312 = \log(3.12 \times 10^2) = 0.4942 + 2 = 2.4942$$

수	0	1	2	3	$\cdots$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	$\cdots$
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	$\cdots$
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	$\cdots$

6. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$$(\sqrt[3]{7})^n = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^n = 7^{\frac{n}{3}}$$

$7^{\frac{n}{3}}$ 이 자연수가 되도록 하려면 n은 3의 배수가 되어야 한다. $1 \le n \le 15$ 이므로 n은 3, 6, 9, 12, 15 이고 개수는 5 이다.

7. [출제의도] 로그함수 이해하기

$f^{-1}(5) = k$라 하면 $f(k) = 5$이다.
$f(k) = \log_3(k+12) + 2 = 5$이므로 $\log_3(k+12) = 3$ 이다. 따라서 $k + 12 = 3^3 = 27$ 이므로 $k = 15$ 이다.

8. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin\frac{5}{6}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$$\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right) = \cos\frac{8}{3}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

이므로 $\sin\frac{5}{6}\pi + \cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ 이다.

9. [출제의도] 로그함수 이해하기

함수 $f(x) = \log_5(x+1) - 2$는 증가한다.
따라서 $0 \le x \le 4$에서 함수 $f(x) = \log_5(x+1) - 2$는 $x = 4$에서 최댓값 $f(4) = \log_5 5 - 2 = -1$을 갖는다.

10. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$\sqrt{(-2)^6} = \sqrt{2^6} = 8$,
$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = 3 - 2 = 1$이므로
$\sqrt{(-2)^6} + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = 9$ 이다.

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y = 2^{x-a} + b$의 그래프의 점근선이 $y = 3$이므로 $b = 3$이다. 함수 $y = 2^{x-a} + 3$의 그래프가 점 $(3, 5)$를 지나므로 $5 = 2^{3-a} + 3$에서 $a = 2$이다.
따라서 $a + b = 5$이다.

12. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$이다. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin\theta < 0$이므로 $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$이다. 따라서

$\tan\theta - \sin\theta = 2\sqrt{2} - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ 이다.

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 최댓값 문제 해결하기

함수 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4x+1}$ 은 $x^2 - 4x + 1$이 최솟값을 가질 때, 최댓값을 갖는다.
$x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3 \ge -3$ 이므로
함수 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4x+1}$ 은 $x = 2$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125$를 갖는다.
따라서 $a + M = 2 + 125 = 127$ 이다.

14. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y = a\sin bx + c$의 최댓값과 최솟값이 각각 2, -4이고 $a > 0$이므로
$a + c = 2$, $-a + c = -4$에서 $a = 3$, $c = -1$이다.
함수 $y = a\sin bx + c$의 주기는 π이고 $b > 0$이므로
$\frac{2\pi}{b} = \pi$에서 $b = 2$이다.
따라서 $2a + b + c = 6 + 2 + (-1) = 7$이다.

15. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활 문제 해결하기

$$B_1 = \frac{kI_0 r_1^2}{2(x_1^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$B_2 = \frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2 + (3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{kI_0 \times 9r_1^2}{2(9x_1^2 + 9r_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{9kI_0 r_1^2}{2 \times 9^{\frac{3}{2}}(x_1^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{kI_0 r_1^2}{6(x_1^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}B_1$$

이므로 $\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{3}$ 이다.

16. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 문제 해결하기

조건 (가)에서 $(\log_2 a)(\log_b 3) = 0$이므로
$\log_2 a = 0$ 또는 $\log_b 3 = 0$이다.
$\log_b 3 = 0$을 만족시키는 b는 존재하지 않는다.
따라서 $\log_2 a = 0$이므로 $a = 1$이다.
조건 (나)에서 $\log_b 3 = 2$이므로 $b^2 = 3$이다.
그러므로 $a^2 + b^2 = 1 + 3 = 4$ 이다.

[다른 풀이]

$\log_2 a$와 $\log_b 3$을 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2 - (\log_2 a + \log_b 3)x + (\log_2 a)(\log_b 3) = 0$ 이다.

$x^2 - 2x = 0$
$x = 0,\ 2$

따라서 $\log_2 a = 0$, $\log_b 3 = 2$ 또는 $\log_2 a = 2$, $\log_b 3 = 0$이다. $\log_b 3 = 0$을 만족시키는 b는 존재하지 않으므로 $\log_2 a = 0$, $\log_b 3 = 2$이다.
그러므로 $a = 1$, $b^2 = 3$이고 $a^2 + b^2 = 4$ 이다.

17. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 추론하기

$3 + 2\sin^2\theta = t$로 놓으면

$$3 + 2\sin^2\theta + \frac{1}{3 - 2\cos^2\theta} = t + \frac{1}{\boxed{t-2}}$$

이다. $0 < \theta < 2\pi$에서 $t \ge 3$이므로
$\boxed{t-2} > 0$이다.

$$t + \frac{1}{\boxed{t-2}} = t - 2 + \frac{1}{\boxed{t-2}} + 2 \ge 4$$

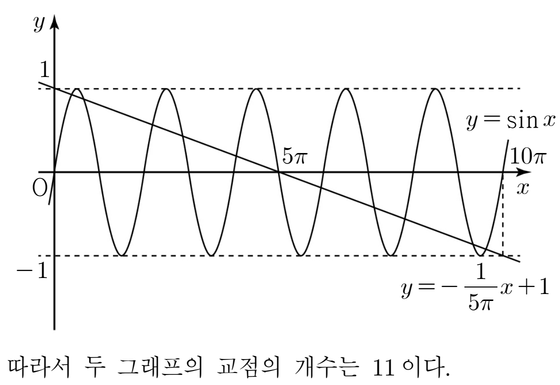
이다. (단, 등호는 $t - 2 = \frac{1}{t-2}$ 에서 $t = \boxed{3}$ 일 때 성립한다.)
따라서 $3 + 2\sin^2\theta = t = 3$ 일 때 $\theta = \boxed{\pi}$이고,
이때 $3 + 2\sin^2\theta + \frac{1}{3 - 2\cos^2\theta}$ 은 최솟값 4를 갖는다.
$f(t) = t - 2$, $p = 3$, $q = \pi$이므로

$$f(p) + \tan^2\left(q + \frac{\pi}{3}\right) = f(3) + \tan^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 3 = 4$$

이다.

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프 문제 해결하기

직선 $y = -\frac{1}{5\pi}x + 1$과 함수 $y = \sin x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 개수는 11 이다.

19. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$$\log_2 ab = \log_2\left(2^{\frac{1}{n}} \times 2^{\frac{1}{n+1}}\right)$$
$$= \log_2 2^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1},$$
$$(\log_2 a)(\log_2 b) = \left(\log_2 2^{\frac{1}{n}}\right)\left(\log_2 2^{\frac{1}{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}$$

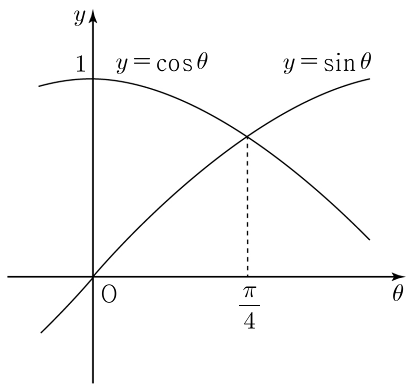
이다. 지수법칙에 의하여

$$\left\{\frac{3^{\log_2 ab}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}}\right\}^5 = \left\{\frac{3^{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)}}{3^{\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\right)}}\right\}^5$$
$$= \left\{3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}}\right\}^5$$
$$= 3^{\frac{10}{n+1}}$$

이다. $3^{\frac{10}{n+1}}$ 이 자연수가 되도록 하려면 $n+1$ 은 10 의 약수가 되어야 한다. 그러므로 자연수 n 의 값은 1, 4, 9 이고 모든 자연수 n의 값의 합은 14 이다.

20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기

ㄱ. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 에서 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $0<\sin\theta<\cos\theta<1$이다. (참)
ㄴ. $0<\sin\theta<1$ 이므로 함수 $f(x)=\log_{\sin\theta}x$는 감소한다. $\sin\theta<\cos\theta<1$이므로
$\log_{\sin\theta}1<\log_{\sin\theta}\cos\theta<\log_{\sin\theta}\sin\theta$ 이다.
따라서 $0<\log_{\sin\theta}\cos\theta<1$이다. (참)
ㄷ. $0<\sin\theta<\cos\theta$ 이므로
$(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}$이다.
$0<\cos\theta<1$이므로 함수 $f(x)=(\cos\theta)^x$은 감소한다.
$\sin\theta<\cos\theta$이므로 $(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$ 이다.
따라서 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$ 이다. (참)
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[ㄷ의 다른 풀이]

ㄷ. $\sin\theta<\cos\theta$ 이고 $\log_{\sin\theta}\cos\theta>0$ 이므로

$$\sin\theta\times\log_{\sin\theta}\cos\theta<\cos\theta\times\log_{\sin\theta}\cos\theta$$
$$\log_{\sin\theta}(\cos\theta)^{\sin\theta}<\log_{\sin\theta}(\cos\theta)^{\cos\theta}$$

이다. $0<\sin\theta<1$이므로 $(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$ 이다. $\log_{\sin\theta}\cos\theta<1$ 이므로

$$\log_{\sin\theta}\cos\theta<\log_{\sin\theta}\sin\theta$$
$$\cos\theta\times\log_{\sin\theta}\cos\theta<\cos\theta\times\log_{\sin\theta}\sin\theta$$
$$\log_{\sin\theta}(\cos\theta)^{\cos\theta}<\log_{\sin\theta}(\sin\theta)^{\cos\theta}$$

이다. $0<\sin\theta<1$이므로 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}$ 이다.
따라서 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$ 이다. (참)

21. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

함수 $y=\cos\frac{\pi x}{4}$ 의 주기가 8 이고 함수 $y=\tan\frac{(2x+1)\pi}{4}$ 의 주기가 2 이므로 다음과 같이 8 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $n=8k$ (k는 음이 아닌 정수)일 때
$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos 2k\pi=1$ 이고
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{1}{4}\right)\pi=1$ 이다.
$(a^2+b^2+2ab-4)+(b^2+ab+2)=0$ 이므로
$a^2+2b^2+3ab-2=0$ 이다. 따라서
$(a+b)(a+2b)=2$ 이고 $a+b\le a+2b$ 이므로
$a+b=1$, $a+2b=2$ 이다. 그러므로 $a=0$, $b=1$ 인데 이것은 $a\ge b$ 라는 조건에 맞지 않다.

(ii) $n=8k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때
$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{3}{4}\right)\pi=-1$ 이므로
$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$ 이다.
$b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(iii) $n=8k+2$ (k는 음이 아닌 정수)일 때
$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi=0$ 이고
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{5}{4}\right)\pi=1$ 이므로
$b^2+ab+2=0$ 이다. $b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(iv) $n=8k+3$ (k는 음이 아닌 정수)일 때
$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{7}{4}\right)\pi=-1$ 이므로
$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$ 이다.
$b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(v) $n=8k+4$ (k는 음이 아닌 정수)일 때
$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos(2k+1)\pi=-1$ 이고
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{9}{4}\right)\pi=1$ 이다.
$-(a^2+b^2+2ab-4)+(b^2+ab+2)=0$ 이므로
$a^2+ab-6=0$ 이다.
따라서 $a(a+b)=6$ 이고 $a\le a+b$ 이므로
$a=1$, $a+b=6$ 또는 $a=2$, $a+b=3$ 이다.
그러므로 $a=1$, $b=5$ 또는 $a=2$, $b=1$ 이다.
$a\ge b$ 이므로 $a=2$, $b=1$ 이다.

(vi) $n=8k+5$ (k는 음이 아닌 정수)일 때
$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{5}{4}\right)\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{11}{4}\right)\pi=-1$ 이므로
$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$ 이다.
$b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(vii) $n=8k+6$ (k는 음이 아닌 정수)일 때
$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi=0$ 이고
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{13}{4}\right)\pi=1$ 이므로
$b^2+ab+2=0$ 이다. $b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(viii) $n=8k+7$ (k는 음이 아닌 정수)일 때
$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{7}{4}\right)\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{15}{4}\right)\pi=-1$ 이므로
$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$ 이다.
$b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

따라서 $n=8k+4$ (k는 음이 아닌 정수)이고 $a=2$, $b=1$ 이다. 그러므로

$$a+b+\sin^2\frac{n}{8}\pi=2+1+\sin^2\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi=4$$

이다.

22. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식 계산하기

$\log_2 x=4$에서 $x=2^4=16$

23. [출제의도] 로그 계산하기

진수 조건에 의해 $6-x>0$ 이므로 $x<6$ 이다.
따라서 자연수 x 의 값은 1, 2, 3, 4, 5 이고, 모든 자연수 x 의 값의 합은 15 이다.

24. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$
$$2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$$

따라서 $8\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}\times 4=3$이다.

25. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{6}+k=2+k=7$이므로 $k=5$ 이다.
따라서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}+5=6+5=11$이다.

26. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식 이해하기

$$\left(\log_2\frac{x}{2}\right)(\log_2 4x)=4$$
$$(\log_2 x-1)(\log_2 x+2)=4$$

$\log_2 x=X$로 놓으면

$$(X-1)(X+2)=4$$
$$X^2+X-6=0$$
$$(X-2)(X+3)=0$$
$$X=2,\ -3$$

이므로 $\alpha\beta=2^2\times 2^{-3}=2^{-1}$이다. 따라서
$64\alpha\beta=64\times 2^{-1}=32$ 이다.

27. [출제의도] 로그함수의 최댓값과 최솟값 문제 해결하기

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 에서 $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}$ 이고
함수 $g(x)=3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 는 증가하므로

$$3\tan\frac{\pi}{6}\le 3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 3\tan\frac{\pi}{3}$$
$$\sqrt{3}\le 3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 3\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}\le g(x)\le 3\sqrt{3}$$

이다. $g(x)=t$로 놓으면 $\sqrt{3}\le t\le 3\sqrt{3}$ 이다.
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=\log_3 t+2$ 이고
함수 $f(t)=\log_3 t+2$ 도 증가하므로

$$\frac{1}{2}+2\le\log_3 t+2\le\frac{3}{2}+2$$
$$\frac{5}{2}\le(f\circ g)(x)\le\frac{7}{2}$$

이다. 따라서 $M=\frac{7}{2}$, $m=\frac{5}{2}$ 이다.

그러므로 $M+m=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$ 이다.

28. [출제의도] 로그함수의 그래프 문제 해결하기

곡선 $y=\log_2 x$를 원점에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=-\log_2(-x)$이고, 이것을 다시 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 곡선은

$$y=-\log_2\left\{-\left(x-\frac{5}{2}\right)\right\}=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$$

이다. 따라서 $f(x)=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 두 실수 α, β는 방정식 $\log_2 x=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$의 해다. 따라서

$$\log_2 x=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$$
$$\log_2 x+\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)=0$$
$$\log_2\left\{x\left(-x+\frac{5}{2}\right)\right\}=0$$
$$x\left(-x+\frac{5}{2}\right)=1$$
$$2x^2-5x+2=0$$
$$(2x-1)(x-2)=0$$
$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=2$$

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\,-1\right)$, $\mathrm{B}(2,\,1)$이고, 직선 AB의 기울기는 $\frac{q}{p}=\frac{1-(-1)}{2-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$이다.

따라서 $10p+q=34$이다.

29. [출제의도] 삼각함수의 그래프 문제 해결하기

함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 그래프에서

(i) $k=0$일 때

$y=-6$이므로 함수의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k>0$일 때

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $k+\left(k^2-6\right)$이고, 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$$k+\left(k^2-6\right)\le 0$$
$$k^2+k-6\le 0$$
$$(k-2)(k+3)\le 0$$
$$-3\le k\le 2$$

따라서 $0<k\le 2$이다.

(iii) $k<0$일 때

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은

$-k+\left(k^2-6\right)$이고, 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$$-k+\left(k^2-6\right)\le 0$$
$$k^2-k-6\le 0$$
$$(k+2)(k-3)\le 0$$
$$-2\le k\le 3$$

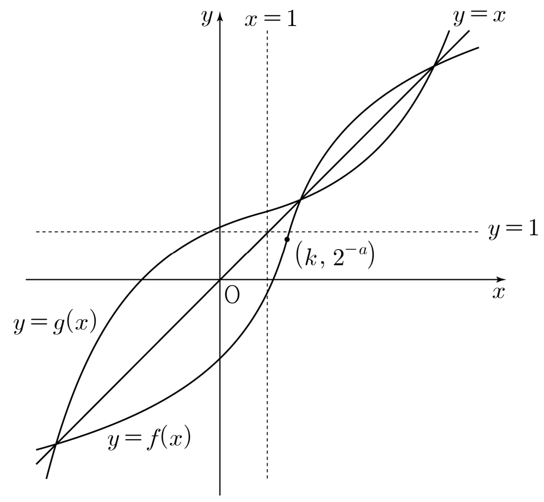
따라서 $-2\le k<0$이다.

그러므로 $-2\le k\le 2$이고 모든 정수 k의 개수는 5이다.

30. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 추론하기

(i) $k>1$일 때

$0<\frac{1}{k}<1$이고 $0<2^{-a}<1<k$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

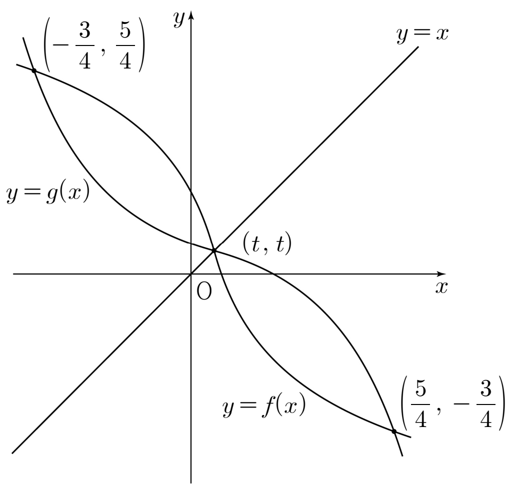


방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 세 교점의 x좌표이다. 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(k,\,2^{-a}\right)$을 지나며 $1<k<t$이므로 $0<t<1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<k<1$일 때

$\frac{1}{k}>1$이고 방정식 $f(x)=g(x)$의 해가 $-\frac{3}{4}$, t, $\frac{5}{4}$이므로 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$, $f(t)=t$, $f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$이다.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$$2\log_{\frac{1}{k}}\left(\frac{7}{4}+k\right)+2^{-a}=\frac{5}{4}\ \cdots\ ㉠$$
$$2\log_k\left(\frac{9}{4}-k\right)+2^{-a}=-\frac{3}{4}\ \cdots\ ㉡$$

㉡ − ㉠에서

$$2\log_k\left(\frac{9}{4}-k\right)\left(\frac{7}{4}+k\right)=-2$$
$$\left(\frac{9}{4}-k\right)\left(\frac{7}{4}+k\right)=\frac{1}{k}$$
$$16k^3-8k^2-63k+16=0$$
$$\begin{aligned}16k^3-8k^2-63k+16&\\ &=16k^3-8k^2+k-64k+16\\ &=\left(16k^3-8k^2+k\right)-(64k-16)\\ &=k(4k-1)^2-16(4k-1)\\ &=(4k-1)\left(4k^2-k-16\right)\\ &=0\end{aligned}$$
$$k=\frac{1}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{257}}{8}$$

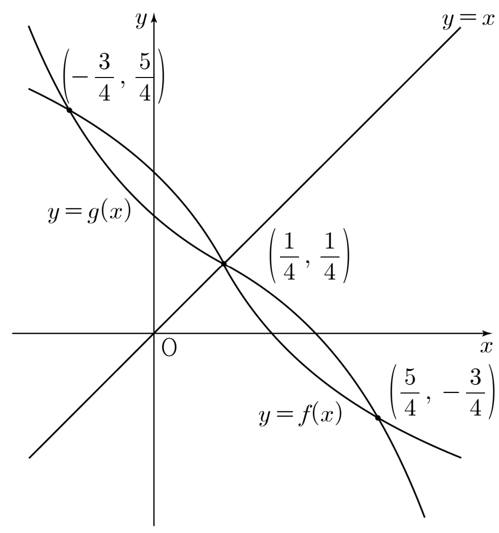
$0<k<1$이므로 $k=\frac{1}{4}$이고

$$f\left(\frac{5}{4}\right)=2\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}+1\right)+2^{-a}=-\frac{3}{4}$$

$2^{-a}=\frac{1}{4}$이므로 $a=2$이다. 따라서 함수

$$f(x)=\begin{cases}2\log_{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4} & \left(x\ge\frac{1}{4}\right)\\ 2\log_4\left(-x+\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4} & \left(x<\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이다. $y=f(x)$의 그래프는 $\left(\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}\right)$을 지나므로 $t=\frac{1}{4}$이다.



그러므로 $30(a+k+t)=30\times\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=75$이다.

[참고]

$$\begin{aligned}16k^3-8k^2-63k+16&\\ &=16k^3-4k^2-4k^2-63k+16\\ &=4k^2(4k-1)-\left(4k^2+63k-16\right)\\ &=4k^2(4k-1)-(4k-1)(k+16)\\ &=(4k-1)\left(4k^2-k-16\right)\end{aligned}$$