2019학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ①	02. ③	03. ③	04. ⑤	05. ④
06. ②	07. ①	08. ④	09. ⑤	10. ④
11. ②	12. ②	13. ①	14. ①	15. ②
16. ⑤	17. ①	18. ③	19. ②	20. ③
21. ④	22. 9	23. 13	24. 5	25. 6
26. 10	27. 80	28. 12	29. 8	30. 40

1. **출제의도** : 지수가 유리수인 실수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$27^{\frac{1}{3}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3^{3\times\frac{1}{3}}=3^1=3$$

정답 ①

2. **출제의도** : 집합의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$A-B=\{3,7\}$

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$3+7=10$

정답 ③

3. **출제의도** : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 4^n+2^n}{4^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{3}{4^n}}$$

$$=\frac{3+0}{1+0}=3$$

정답 ③

4. **출제의도** : 역함수의 값을 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$2\to 5$이므로

$f(2)=5$

$3\to 3$이므로

$f^{-1}(3)=3$

따라서 $f(2)+f^{-1}(3)=5+3=8$

정답 ⑤

5. **출제의도** : 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$A\cap B=A-(A\cap B^C)$이고,

$A\cap B^C\subset A$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

정답 ④

6. **출제의도** : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to 2+}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)=1+1=2$$

정답 ②

7. **출제의도** : 충분조건에 대하여 이해할 수 있는가?

정답풀이 :
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\left\{1+\frac{a}{2}\right\}$

$Q=\left\{x \,\middle|\, \frac{3}{2} \le x \le \frac{13}{2}\right\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로

$\frac{3}{2} \le 1+\frac{a}{2} \le \frac{13}{2}$, 즉 $\frac{1}{2} \le \frac{a}{2} \le \frac{11}{2}$이어야 한다.

따라서 $1 \le a \le 11$이므로 자연수 a의 개수는 11이다.

정답 ①

8. **출제의도** : 정적분의 계산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3x^2+2x)dx &= \left[x^3+x^2\right]_0^2 \\ &= 2^3+2^2 \\ &= 12\end{aligned}$$

정답 ④

9. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$(x+a)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r a^{5-r} x^r$

x^3의 계수는 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3 a^2 = 40$

$10a^2 = 40$

$a^2 = 4$

x의 계수는 $r=1$일 때이므로

${}_5C_1 a^4 = 5 \times 4^2 = 80$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 무리함수의 그래프의 평행이동에 대하여 이해할 수 있는가?

정답풀이 :
곡선 $y=\sqrt{3x}$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y-2=\sqrt{3(x-1)}$

즉, $y=\sqrt{3x-3}+2$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여

$\sqrt{3x+a}+b=\sqrt{3x-3}+2$

가 성립해야 하므로

$a=-3$, $b=2$

따라서 $a+b=(-3)+2=-1$

정답 ④

11. **출제의도** : 수열의 귀납적 정의를 이해하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$a_n a_{n+1} = 2n$ ……㉠

㉠에 $n=2$를 대입하면 $a_2 a_3 = 4$이므로

$a_2 = \frac{4}{a_3} = \frac{4}{1} = 4$

㉠에 $n=3$을 대입하면 $a_3 a_4 = 6$이므로

$a_4 = \frac{6}{a_3} = \frac{6}{1} = 6$

㉠에 $n=4$를 대입하면 $a_4 a_5 = 8$이므로

$a_5 = \frac{8}{a_4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

따라서

$a_2 + a_5 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

정답 ②

12. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

전체 학생이 100명이므로 축구를 선택한 학생은 70명, 야구를 선택한 학생은 30명이다.

이 학교 전체 학생을 여학생과 남학생, 축구를 선택한 학생과 야구를 선택한 학생으로 나누어 표로 나타내면 다음과 같다.

	축구	야구	계
여학생	a	b	40
남학생	c	d	60
계	70	30	100

이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명이 여학생인 사건을 A라 하면 남학생인 사건은 A^C이고, 축구를 선택한 학생인 사건을 B라 하면 야구를 선택한 학생인 사건은 B^C이다. 이때 임의로 뽑은 1명이 축구를 선택한 남학생일 확률이 $\frac{2}{5}$이므로

$P(B \cap A^C) = \frac{c}{100} = \frac{2}{5}$

에서 $c = 40$

$a + c = 70$에서 $a = 30$

$c + d = 60$에서 $d = 20$

$a + b = 40$에서 $b = 10$

따라서 이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명이 야구를 선택한 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은

$$P(A \mid B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)}$$

$$= \frac{\frac{10}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{1}{3}$$

정답 ②

13. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

공차를 d라 하자.

$a_1 = -15$이고 $a_4 = |a_3| \geq 0$이므로

$a_1 + 3d = -15 + 3d \geq 0$

따라서 $d \geq 5$ $\cdots$ ㉠

$|a_3| = a_4$에서 $|a_1 + 2d| = a_1 + 3d$이므로

$a_1 + 2d = a_1 + 3d$ 또는

$a_1 + 2d = -(a_1 + 3d)$

(i) $a_1 + 2d = a_1 + 3d$이면

$d = 0$이므로 ㉠에 모순이다.

(ii) $a_1 + 2d = -(a_1 + 3d)$이면

$d = -\frac{2}{5}a_1 = -\frac{2}{5} \times (-15) = 6$이므로 ㉠을 만족시킨다.

따라서 $d = 6$이므로

$a_7 = a_1 + 6d$

$= -15 + 6 \times 6 = -15 + 36 = 21$

정답 ①

14. 출제의도 : 도함수를 활용하여 속도에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+a$

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면 실수 t $(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\geq 0$이거나 항상 $v\leq 0$이어야 한다.

이때

$v=3\left(t-\dfrac{5}{3}\right)^2+a-\dfrac{25}{3}$

이므로 실수 t $(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\leq 0$일 수는 없다. 즉, 실수 t $(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\geq 0$이어야 하므로

$a-\dfrac{25}{3}\geq 0$

따라서 $a\geq \dfrac{25}{3}$이므로 조건을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 9이다.

정답 ①

15. 출제의도 : 다항함수의 미분법을 방정식에 응용하여 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^3-3x^2-9x=k$에서

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

주어진 방정식의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f'(x)=3x^2-6x-9$

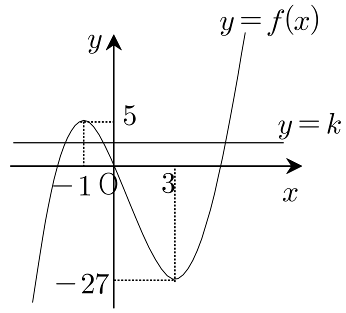
$\quad =3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5 (극대)	↘	-27 (극소)	↗

따라서 곡선 $y=f(x)$는 다음 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는

$-27<k<5$

이고, 정수 k의 최댓값은 4이다.

정답 ②

16. 출제의도 : 자연수의 분할과 집합의 분할을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

서로 다른 종류의 사탕 3개를 같은 종류의 주머니 3개에 각각 1개씩 나누어 담는 경우의 수는 1이다.

이제 주머니 3개는 서로 다른 종류의 사탕 3개가 각각 1개씩 들어 있으므로 서로 구별이 된다.

따라서 같은 종류의 구슬 7개를 서로 구별이 되는 주머니 3개에 남김없이 나누

어 담을 때, 각 주머니에 구슬이 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 주머니 3개에서 중복을 허락하여 4(=7−3)개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_4 = {}_{3+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2$$
$$= \frac{6\times5}{2} = 15$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1\times15 = 15$$

정답 ⑤

17. 출제의도 : 표본비율과 모비율의 관계를 이해하고, 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

표본의 크기가 100, 표본비율이 $\frac{30}{100}$, 즉 0.3이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.3-1.96\times\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{100}} \le p \le 0.3+1.96\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{100}}$$

따라서 $a=\frac{0.3\times0.7}{100}=0.0021$

정답 ①

18. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이용하여 함수의 연속에 관한 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $g(x)=f(x)+|f(x)|$에서

$$\lim_{x\to0+} g(x) = \lim_{x\to0+}\{f(x)+|f(x)|\}$$
$$= \lim_{x\to0+} f(x) + \lim_{x\to0+}|f(x)|$$
$$= 0+0=0$$

$$\lim_{x\to0-} g(x) = \lim_{x\to0-}\{f(x)+|f(x)|\}$$
$$= \lim_{x\to0-} f(x) + \lim_{x\to0-}|f(x)|$$
$$= -1+|-1|$$
$$= -1+1=0$$

$\lim_{x\to0+} g(x) = \lim_{x\to0-} g(x) = 0$이므로

$\lim_{x\to0} g(x) = 0$ (참)

ㄴ. $h(x)=f(x)+f(-x)$에서

$$h(0)=f(0)+f(0)=2f(0)=2\times\frac{1}{2}=1$$

이므로 $|h(0)|=1$

$$\lim_{x\to0+} h(x) = \lim_{x\to0+}\{f(x)+f(-x)\}$$
$$= \lim_{x\to0+} f(x) + \lim_{x\to0+} f(-x)$$
$$= \lim_{x\to0+} f(x) + \lim_{x\to0-} f(x)$$
$$= 0+(-1) = -1$$

$$\lim_{x\to0-} h(x) = \lim_{x\to0-}\{f(x)+f(-x)\}$$
$$= \lim_{x\to0-} f(x) + \lim_{x\to0-} f(-x)$$
$$= \lim_{x\to0-} f(x) + \lim_{x\to0+} f(x)$$
$$= (-1)+0 = -1$$

$\lim_{x\to0+} h(x) = \lim_{x\to0-} h(x) = -1$이므로

$\lim_{x\to0} h(x) = -1$

이고 $\lim_{x\to0}|h(x)| = |-1| = 1$

$|h(0)| = \lim_{x\to0}|h(x)|$이므로 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $g(0)=f(0)+|f(0)|=\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}\right|=1$

이고 $h(0)=1$이므로

$g(0)|h(0)|=1\times1=1$

또한

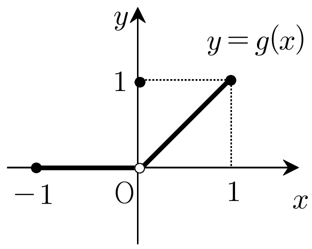
$$\lim_{x\to0}g(x)|h(x)|=\lim_{x\to0}g(x)\times\lim_{x\to0}|h(x)|$$
$$=0\times1=0$$

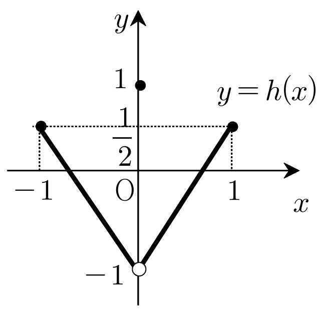
$g(0)|h(0)|\neq\lim_{x\to0}g(x)|h(x)|$이므로 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

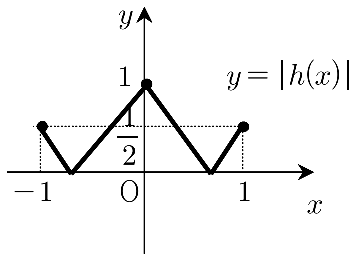
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ③

[참고] $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=|h(x)|$의 그래프는 다음과 같다.







19. **출제의도** : 등비급수를 이용하여 도형의 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$의 넓이는

$3\times1=3$

사분원 $\mathrm{C_1D_1B_1}$의 넓이는

$\frac{1}{4}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{OD_1}}=\overline{\mathrm{OC_1}}-\overline{\mathrm{C_1D_1}}=3-1=2$이므로

$\overline{\mathrm{OE_1}}=2$

직각삼각형 $\mathrm{OA_1E_1}$에서

$$\overline{\mathrm{A_1E_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OE_1}}^2-\overline{\mathrm{OA_1}}^2}$$
$$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

이므로 직각삼각형 $\mathrm{OA_1E_1}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

한편,

$$\cos(\angle\mathrm{A_1OE_1})=\frac{\overline{\mathrm{OA_1}}}{\overline{\mathrm{OE_1}}}=\frac{1}{2}$$

이므로

$\angle\mathrm{A_1OE_1}=60^\circ$

따라서 부채꼴 $\mathrm{E_1OD_1}$의 중심각의 크기는

$\angle\mathrm{E_1OD_1}$

$=90^\circ-\angle\mathrm{A_1OE_1}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

이므로 부채꼴 $\mathrm{E_1OD_1}$의 넓이는

$$\frac{30^\circ}{360^\circ}\times\pi\times2^2=\frac{\pi}{3}$$

따라서

$$S_1=3-\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=3-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{12}\pi$$

한편, $\overline{\mathrm{OA}_n}=a_n$이라 하면

$\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}=a_{n+1}$, $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=3a_{n+1}$이고

$\overline{\mathrm{OB}_{n+1}} = \overline{\mathrm{OD}_n} = \overline{\mathrm{OC}_n} - \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}$

$= 3a_n - a_n = 2a_n$

이므로 직각삼각형 $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$에서

$a_{n+1}{}^2 + (3a_{n+1})^2 = (2a_n)^2$

따라서 $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

따라서 두 직사각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$, $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$의 닮음비는 $\sqrt{5} : \sqrt{2}$이므로 넓이의 비는 $5:2$이다.

따라서 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이의 $\dfrac{2}{5}$배이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\dfrac{2}{5}} = \frac{5}{3}S_1$$

$$= \frac{5}{3}\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi\right)$$

$$= 5 - \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{35}{36}\pi$$

정답 ②

20. 출제의도 : 경우의 수를 이용하여 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

6번째 시행 후 상자 B에 8개의 공이 들어 있으려면 동전의 앞면이 뒷면보다 2번 더 많이 나와야 한다. 따라서 앞면이 4번, 뒷면이 2번 나와야 한다.

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되어야 하므로 5번째 시행 후에는 7이어야 하고 4번째 시행 후에는 6이어야 한다.

따라서 4번째 시행까지 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나와야 하고, 이 중 상자 B에 공이 8개 들어가는 경우를 제외하면 된다.

앞면을 ○, 뒷면을 ×로 나타내면 문제의 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

1 2 3 4	5 6
○ × ○ ×	○ ○
○ × × ○	○ ○
× ○ ○ ×	○ ○
× ○ × ○	○ ○
× × ○ ○	○ ○

5가지 경우 모두 앞면이 4번, 뒷면이 2번이므로 각각의 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

따라서 구하는 확률은

$$5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{64}$$

정답 ③

21. 출제의도 : 사차함수의 그래프의 특징과 정적분으로 정의된 함수의 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = x^4 + ax^2 + b$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이므로 사차함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 $f(t) \geq 0$인 구간에서는

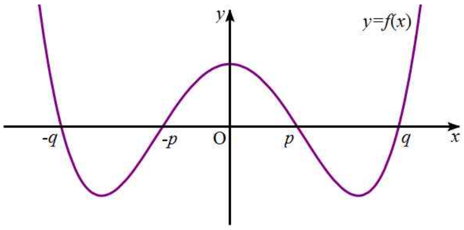
$f(t) - |f(t)| = 0$,

$f(t) < 0$인 구간에서는

$f(t) - |f(t)| = 2f(t) < 0$

이고, 조건 (가)에 의하여 $-1 \leq t \leq 2$일

때 $f(t) \geq 0$이어야 한다.
또, 조건 (나)에 의하여 $f(t) < 0$인 구간이 있어야 한다.
따라서 $f(0) > 0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



위 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 네 점의 x좌표를 각각 $-q$, $-p$, p, q $(0<p<q)$라 하자.

(ⅰ) $0<x<\frac{p}{2}$일 때, 구간 $[-x, 2x]$에서 $f(x) \geq 0$이므로

$g(x) = \int_{-x}^{2x} 0dt = 0$

조건 (가)에 의하여 $0<x<1$일 때 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)이므로

$\frac{p}{2} \geq 1$, 즉 $p \geq 2$

(ⅱ) $\frac{p}{2}<x<q$일 때, 구간 $[-x, 2x]$에서 $f(x)<0$인 구간이 점점 커지므로 $g(x)$는 감소한다.
조건 (나)에 의하여 $1<x<5$일 때 $g(x)$는 감소하므로

$\frac{p}{2} \leq 1$, $q \geq 5$

즉, $p \leq 2$, $q \geq 5$

(ⅲ) $x>q$일 때, 구간 $[-x, -q]$와 구간 $[q, 2x]$에서 $f(x) \geq 0$이므로
$g(x)=g(q)$
조건 (다)에 의하여 $x>5$일 때 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)이므로
$q \leq 5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
$p=2$, $q=5$
따라서
$f(x)=(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)$
$=(x^2-4)(x^2-25)$
이므로
$f(\sqrt{2})=(-2)\times(-23)=46$

정답 ④

22. 출제의도 : 순열과 조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
${}_3P_2=3\times2=6$,

${}_3C_2=\frac{3\times2}{2}=3$

따라서 ${}_3P_2+{}_3C_2=6+3=9$

정답 9

23. 출제의도 : 다항함수의 도함수를 구하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$f'(x)=3x^2+10x$이므로
$f'(1)=3+10=13$

정답 13

24. 출제의도 : 유리함수의 그래프의 점근선과 평행이동을 이해하고 있는가?

정답풀이 :
두 점근선의 교점의 좌표가 $(-2, 3)$인 유리함수는

$y=\frac{k}{x+2}+3$ (단, k는 0이 아닌 상수)

이므로

$$y=\frac{k+3(x+2)}{x+2}=\frac{3x+k+6}{x+2}$$

$k+6=2$에서 $k=-4$이고 이때

$$a=3,\ b=2$$

따라서

$$a+b=3+2=5$$

정답 5

25. 출제의도 : 로그의 정의를 이용하여 로그의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a^{\frac{1}{2}}=8$이므로

$a=8^2=(2^3)^2=2^{3\times 2}=2^6$

따라서 $\log_2 a=\log_2 2^6=6$

정답 6

26. 출제의도 : 등비수열의 뜻과 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 등비수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면 모든 항이 양수이므로 $r>0$이다.

이때

$S_4-S_3=2$이므로 $a_4=2$

$S_6-S_5=50$이므로 $a_6=50$

$a_6=a_4\times r^2$이므로 $r^2=\frac{a_6}{a_4}=\frac{50}{2}=25$

$r>0$이므로 $r=5$

따라서

$a_5=a_4\times r=2\times 5=10$

정답 10

27. 출제의도 : 이항분포의 분산과 확률변수의 성질을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X의 분산은

$$V(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$$

$V\left(\frac{1}{2}X+1\right)=\frac{1}{4}V(X)=5$이므로

$$V(X)=4\times 5=20$$

$\frac{n}{4}=20$이므로

$$n=80$$

정답 80

28. 출제의도 : 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간

$v_1(t)=v_2(t)$

이므로

$3t^2+t=2t^2+3t$

$t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$t=2$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v_1(t)dt=\int_0^2(3t^2+t)dt$$

$$=\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$$

$$=10$$

$t=2$일 때 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^2 v_2(t)dt=\int_0^2 (2t^2+3t)dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{3}+6=\frac{34}{3}$$

따라서 두 점 사이의 거리 a는

$$a=\left|\frac{34}{3}-10\right|=\frac{4}{3}$$

이므로

$$9a=9\times\frac{4}{3}=12$$

정답 12

29. 출제의도 : 수열의 합의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리는

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=\frac{1}{25}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$
$$=\frac{n^2}{25}=\left(\frac{n}{5}\right)^2$$

점 A_n이 직선 $y=x$ 위에 있기 위해서는 점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 짝수이어야 한다.

$\left(\frac{n}{5}\right)^2$이 짝수이면 $\frac{n}{5}$도 짝수이므로

$\frac{n}{5}=2m$ (단, m은 자연수)

에서 $n=10m$이다.

따라서 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 두 번째 점은 $m=2$, 즉 $n=20$일 때이므로 점 A_{20}이다.

경로를 따라 이동한 거리가 $2k$(k는 자연수)일 때 점 P의 x좌표는 k이다.

점 A_0에서 점 A_{20}까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 $\left(\frac{20}{5}\right)^2=4^2=16$이므로 점 A_{20}의 x좌표는 8이다. 즉,

$a=8$

정답 8

30. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x=\alpha$가 방정식 $(f\circ f)(x)=x$, 즉 $f(f(x))=x$의 한 실근이라고 하면 다음과 같은 두 가지 경우 중의 하나이다.

(i) $f(\alpha)=\alpha$일 때

α는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이다.

(ii) $f(\alpha)=\beta$이고 $f(\beta)=\alpha$일 때

(단, $\alpha\neq\beta$)

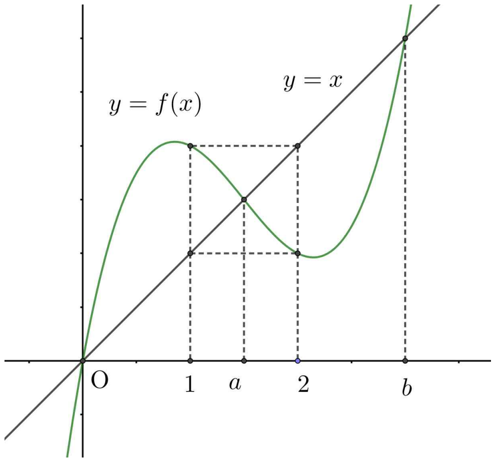
곡선 $y=f(x)$는 두 점 (α,β), (β,α)를 지나고, 이 두 점을 모두 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1$$

이다.

따라서 (i) 또는 (ii)와 주어진 조건

$f'(1)<0$, $f'(2)<0$ 및 $0<1<a<2<b$를 모두 만족시키고 α의 개수가 5가 되도록 하는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 경우 뿐이다.



즉, 방정식 $f(x)=x$를 만족시키는 실수는 0, a, b의 3개이고,
$f(1)=2$, $f(2)=1$이어야 한다.
따라서 삼차방정식 $f(x)-x=0$의 해는 0, a, b이므로
$f(x)-x=kx(x-a)(x-b)$ (k는 양의 상수)로 놓을 수 있다.
$f(1)=2$에서
$2-1=k(a-1)(b-1)$

$ab-(a+b)=\dfrac{1}{k}-1$ ⋯ ㉠

$f(2)=1$에서
$1-2=2k(a-2)(b-2)$

$ab-2(a+b)=-\dfrac{1}{2k}-4$ ⋯ ㉡

한편,
$f(x)=k\{x^3-(a+b)x^2+abx\}+x$
이므로
$f'(x)=k\{3x^2-2(a+b)x+ab\}+1$
따라서 $f'(0)-f'(1)=6$에서
$abk+1-k\{3-2(a+b)+ab\}-1=6$
$-3k+2k(a+b)=6$

$a+b=\dfrac{3}{k}+\dfrac{3}{2}$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$ab=\dfrac{4}{k}+\dfrac{1}{2}$이고 $ab=\dfrac{11}{2k}-1$이므로

$\dfrac{4}{k}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2k}-1$에서

$\dfrac{3}{2k}=\dfrac{3}{2}$

따라서 $k=1$이므로

$a+b=\dfrac{9}{2}$, $ab=\dfrac{9}{2}$

이때
$$f(x)=kx(x-a)(x-b)+x$$
$$=x^3-(a+b)x^2+(ab+1)x$$
이므로
$$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{2}x$$
따라서
$$f(5)=5\left(5^2-\frac{9}{2}\times5+\frac{11}{2}\right)$$
$$=5\left(25-\frac{45}{2}+\frac{11}{2}\right)$$
$$=5(25-17)=40$$

정답 40

EBS