2019학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ④	02. ③	03. ③	04. ⑤	05. ④
06. ②	07. ④	08. ②	09. ④	10. ⑤
11. ⑤	12. ②	13. ①	14. ⑤	15. ③
16. ①	17. ①	18. ②	19. ④	20. ③
21. ③	22. 56	23. 15	24. 35	25. 3
26. 25	27. 13	28. 24	29. 20	
30. 65				

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2^2\times 8^{\frac{1}{3}}=2^2\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=2^2\times 2=8$

정답 ④

2. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}$$
$$=\frac{3+0+0}{2+0}$$
$$=\frac{3}{2}$$

정답 ③

3. **출제의도** : 교집합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A=\{1,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ a\}$

이때, $A\subset B$이고, $7\in A$이므로

$7\in B$

따라서

$a=7$

정답 ③

4. **출제의도** : 합성함수의 정의를 이용하여 합성함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$(g\circ f)(3)=g(f(3))$$
$$=g(4)$$
$$=5$$

정답 ⑤

5. **출제의도** : 명제가 참이 되도록 하는 실수 a의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p,q의 진리집합을 각각 P,Q라 하면

$P=\{x\mid x=a\}$

$Q=\{x\mid -1\le x\le 4\}$

이때, $P\subset Q$이어야 하므로

$-1\le a\le 4$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 4이다.

정답 ④

6. **출제의도** : 다항함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=x^3-ax+6$에 대하여

$f'(x)=3x^2-a$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=3\times1^2-a=0$

따라서

$a=3$

정답 ②

7. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}a_k=3$, $\sum_{k=1}^{10}{a_k}^2=7$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(2{a_k}^2-a_k)=2\sum_{k=1}^{10}{a_k}^2-\sum_{k=1}^{10}a_k$$
$$=2\times7-3$$
$$=11$$

정답 ④

8. **출제의도** : 그래프의 평행이동을 이용하여 상수 m의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=\sqrt{2(x+3)}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프는

함수 $y=\sqrt{2(x-m+3)}$의 그래프이다.

따라서 이 그래프가 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프이므로

$-m+3=0$에서

$m=3$

정답 ②

9. **출제의도** : 분수함수의 점근선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y=\frac{3x+1}{x-1}=\frac{3(x-1)+4}{x-1}=\frac{4}{x-1}+3$$

이므로

함수 $y=\frac{3x+1}{x-1}$의 그래프의 점근선은

$x=1$, $y=3$

이다.

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=1+3=4$

정답 ④

10. **출제의도** : 함수의 극한의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to1-$일 때, $f(x)\to1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=1$

$x\to2+$일 때, $f(x)\to1$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=1$

따라서,

$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=1+1=2$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 등비급수의 수렴조건을 이용하여 정수 x의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$은 첫째항이 $\frac{x}{5}$이고, 공비

가 $\frac{x}{5}$인 등비급수이다.

(i) $x=0$인 경우

첫째항이 0이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

(ii) $x \neq 0$인 경우

$-1 < \frac{x}{5} < 1$에서 $-5 < x < 5$

정수 x의 값은

$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

(i), (ii)에서 정수 x의 개수는

$1+8=9$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 확률의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\\&=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

정답 ②

13. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\log_2 10-\log_2 5}{2-1}$$

$$=\frac{\log_2\frac{10}{5}}{1}$$

$$=\log_2 2$$

$$=1$$

정답 ①

14. 출제의도 : 주어진 표를 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선택한 1장의 사진이 고양이 사진으로 인식된 사진인 사건을 E, 선택한 1장의 사진이 고양이 사진인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(F\,|\,E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$이다.

$\mathrm{P}(E)=\frac{36}{80}=\frac{9}{20}$

$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{32}{80}=\frac{2}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(F\,|\,E)&=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}\\&=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{20}}=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 등비수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3=4(a_2-a_1)$에서

$a_1r^2=4(a_1r-a_1)$

$a_1(r-2)^2=0$

$a_1=0$ 또는 $r=2$

$a_1=0$이면

$\sum_{k=1}^{6} a_k=0 \neq 15$

이므로

$a_1 \neq 0$

따라서 $r=2$이다.

이때,

$\sum_{k=1}^{6} a_k=\frac{a_1(2^6-1)}{2-1}=15$에서

$a_1 \times 63=15$

$a_1=\frac{5}{21}$

따라서

$$\begin{aligned} a_1+a_3+a_5 &= \frac{5}{21}\times(1+2^2+2^4) \\ &= \frac{5}{21}\times 21 \\ &= 5 \end{aligned}$$

정답 ③

16. **출제의도** : 수직선 위의 운동을 미분을 이용하여 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 $t=1$에서 운동방향을 바꾸므로 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(1)=0$

한편, $x=t^3+at^2+bt$에서

$v(t)=3t^2+2at+b$

이므로

$v(1)=3+2a+b=0$ …… ㉠

또, 시각 t에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=6t+2a$

이때, $a(2)=0$이므로

$a(2)=12+2a=0$

$a=-6$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$b=9$

따라서,

$a+b=(-6)+9=3$

정답 ①

17. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 이차함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=ax^2+b$에서

$f'(x)=2ax$

$4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$

$4ax^2+4b=4a^2x^2+x^2+4$

$4ax^2+4b=(4a^2+1)x^2+4$

$4a=4a^2+1$, $4b=4$

$(2a-1)^2=0$, $b=1$

즉 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$

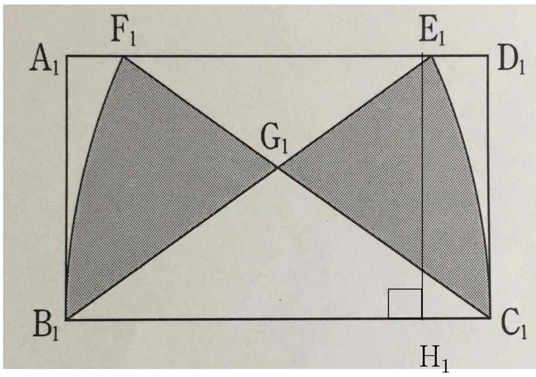
따라서 $f(2)=\frac{1}{2}\times 4+1=2+1=3$

정답 ①

18. **출제의도** : 급수를 이용하여 반복되는 도형의 넓이에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 E_1에서 변 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하자.



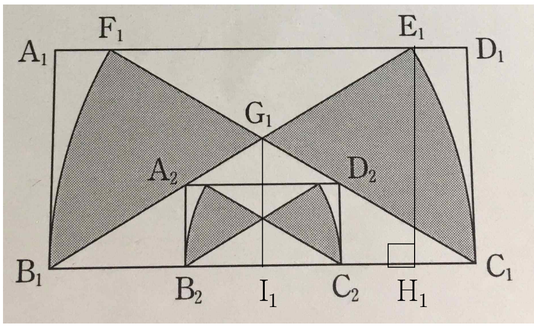
직각삼각형 $E_1B_1H_1$에서

$$\sin(\angle E_1B_1H_1)=\frac{\overline{E_1H_1}}{\overline{B_1E_1}}=\frac{1}{2}$$

이므로

$\angle E_1B_1H_1=30^\circ$

점 G_1에서 변 B_1C_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하자.



$$\begin{aligned}\overline{G_1I_1}&=\tan 30^\circ\times\overline{B_1I_1}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 1\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}S_1&=2\left(\frac{30^\circ}{360^\circ}\times 4\pi-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\\&=\frac{2(\pi-\sqrt{3})}{3}\end{aligned}$$

한편 $\overline{A_2B_2}=\overline{B_2I_1}=a(0<a<1)$이라 하면

직각삼각형 $A_2B_1B_2$에서

$$\tan 30^\circ=\frac{a}{1-a}$$

즉, $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{1-a}$에서

$$a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

따라서 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{3}-1}{2}$이므로

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 넓이의 비는 $1:\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$, 즉 $1:\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

이다.

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{2(\pi-\sqrt{3})}{3}}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$$

정답 ②

19. **출제의도** : 확률의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a<b-2\leq c$에서 $a\geq 1$이므로

$1<b-2$

$3<b\leq 6$

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $b=4$일 때,

$a<2\leq c$

이므로 순서쌍 (a,b,c)의 개수는

$1\times 5=5$

(ⅱ) $b=5$일 때,

$a<3\leq c$이므로 순서쌍 (a,b,c)의 개수

는

$2\times4=8$

(ⅲ) $b=6$일 때,

$a<4\le c$이므로 순서쌍 (a,b,c)의 개수는

$3\times3=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{5+8+9}{6^3}=\frac{22}{6^3}=\frac{11}{108}$

정답 ④

20. 출제의도 : 중복조합에 관련된 추론 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=2k$이어야 한다.

$c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 $k_1,\ k_2$에 대하여 $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 $k_3,\ k_4$에 대하여 $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우이다.

(1) $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우 :

$2a+2b+c+d=2n$에서

$2a+2b+2k_1+2k_2=2n$

$a+b+k_1+k_2=n$

이므로 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_n={}_{4+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_n=\boxed{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}$

이다.

(2) $c=2k_3+1,\ d=2k_3+1$인 경우 :

$2a+2b+c+d=2n$에서

$2a+2b+(2k_1+1)+(2k_2+1)=2n$

$a+b+k_1+k_2=n-1$

이므로 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_{n-1}={}_{4+(n-1)-1}\mathrm{C}_{n-1}$$
$$={}_{n+2}\mathrm{C}_{n-1}$$
$$=\boxed{{}_{n+2}\mathrm{C}_3}$$

이다.

(1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수 a_n은

$a_n=\boxed{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}+\boxed{{}_{n+2}\mathrm{C}_3}$

이다. 자연수 m에 대하여

$$\sum_{n=1}^{m}\boxed{{}_{n+2}\mathrm{C}_3}$$
$$={}_{m+3}\mathrm{C}_4$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{8}a_n$$
$$=\sum_{n=1}^{8}{}_{n+3}\mathrm{C}_3+\sum_{n=1}^{8}{}_{n+2}\mathrm{C}_3$$
$$=\sum_{n=1}^{8}{}_{n+3}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_4$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{9}{}_{n+2}\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_3\right)-{}_{11}\mathrm{C}_4$$
$$={}_{12}\mathrm{C}_4+{}_{11}\mathrm{C}_4-1$$
$$=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}+\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}-1$$
$$=495+330-1$$
$$=\boxed{824}$$

이다 .

이상에서

$f(n)={}_{n+3}\mathrm{C}_3,\quad g(n)={}_{n+2}\mathrm{C}_3$

$r=824$

이다. 따라서

$f(6)+g(5)+r={}_9\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_3+824$
$$=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}+\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}+824$$
$$=84+35+824$$
$$=943$$

정답 ③

21. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수에 대하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$-1+a-b>-1$이므로 $a>b$

조건 (나)에서

$(1+a+b)-(-1+a-b)>8$

$2+2b>8$이므로 $b>3$

조건 (가), (나)에서 $a>b>3$

ㄱ. $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3b$

이때, $a^2-3b>b^2-3b=b(b-3)>0$

이므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(-1)=3-2a+b$
$=3-(2a-b)$
$=3-\{(a-b)+a\}$

$a-b>0$이고, $a>3$이므로

$f'(-1)<0$이다.

즉 $-1<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $x^3+ax^2+bx-(3k^2+2ak+b)x=0$

$x(x^2+ax-3k^2-2ak)=0$

$x=0$ 또는 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$

(i) 이차방정식

$x^2+ax-3k^2-2ak=0$이 $x=0$을 근으로 갖는 경우

$-3k^2-2ak=0$에서

$k=0$ 또는 $k=-\frac{2a}{3}$

이때, 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$은 두 실근 $x=0,\ x=-a$를 갖는다.

(ii) 이차방정식

$x^2+ax-3k^2-2ak=0$이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2+12k^2+8ak=0$에서

k에 대한 이차방정식

$12k^2+8ak+a^2=0$

을 풀면

$$k=\frac{-4a\pm\sqrt{16a^2-12a^2}}{12}$$
$$=\frac{-4a\pm2|a|}{12}$$

이때 $a>3$이므로

$k=-\frac{a}{2}$ 또는 $k=-\frac{a}{6}$

(i), (ii)에서 실수 k의 개수는 4이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

22. **출제의도** : 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_8\mathrm{P}_2=8\times7=56$

정답 56

23. **출제의도** : 미분법을 이용하여 미분

계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(3)=3\times9-4\times3$

$=27-12=15$

정답 15

24. 출제의도 : 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_1+4d=5$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_{15}=a_1+14d=25$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$10d=20,\ d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면

$a_1+4\times2=5$

$a_1=-3$

따라서

$a_{20}=a_1+19d=-3+19\times2=35$

정답 35

25. 출제의도 : 분할의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

3이 두 개 이상 포함되어야 하므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 3이 2개만 포함된 경우

나머지 수는 홀수이어야 하므로

$11=5+3+3$

$=3+3+1+1+1+1+1$

(ⅱ) 3이 3개 포함된 경우

나머지 수는 홀수이어야 하므로

$11=3+3+3+1+1$

따라서 구하는 경우의 수는 3이다.

정답 3

26. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 주어진 전개식에서 x^4의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(1+x)^5$의 전개식에서

x^4의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_4=5$

x^3의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$

이므로 $(1+2x)(1+x)^5$의 전개식에서

x^4의 계수는

$5+2\times10=25$

정답 25

27. 출제의도 : 집합의 성질을 이용하여 집합의 원소의 개수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}A\cap(A^C\cup B)&=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)\\&=\varnothing\cup(A\cap B)\\&=A\cap B\end{aligned}$$

이므로

$A\cap B\neq\varnothing$

즉, $n(A\cap B)\geq1$

조건 (다)에서

$n(A-B)=11$

이므로

$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)\geq12$

조건 (가)에서

$n(U)=25$이므로

$n(A)+n(B-A) \le n(U)$에서

$n(B-A) \le n(U)-n(A) \le 13$

따라서 $n(B-A)$의 최댓값은 13이다.

정답 13

28. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(4)$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$f(x)=a(x-1)(x-2)\ (a \ne 0)$

으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$\lim_{x \to 2} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}\{a(x-1)\}=a$

이므로 $a=4$

따라서 $f(x)=4(x-1)(x-2)$이므로

$f(4)=4\times3\times2=24$

정답 24

29. **출제의도** : 함수의 연속과 역함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (x \ge 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1)$

이어야 한다.

이때,

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-}(ax+b)=a+b$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+}\left(cx^2+\frac{5}{2}x\right)=c+\frac{5}{2}$

$f(1)=c+\frac{5}{2}$

이므로

$a+b=c+\frac{5}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로

$a>0,\ c>0$ 또는 $a<0,\ c<0$

이어야 한다.

(i) $a>0,\ c>0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프가 증가하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 일치한다. 이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 중 하나의 x좌표가 1이므로

$f(1)=f^{-1}(1)=1$

이어야 한다.

즉, $f(1)=c+\frac{5}{2}=1$에서

$c=-\frac{3}{2}$

이것은 조건에 만족하지 않는다.

즉, $a>0,\ c>0$이 아니다.

(ii) $a<0,\ c<0$일 때,

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (x \ge 1) \end{cases}$$

에서

$g(x)=ax+b(x<1)$

$h(x)=cx^2+\frac{5}{2}x(x \ge 1)$

라 하자.

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로
두 함수 $g(x)$, $h(x)$도 역함수가 존재한다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 중 하나의 x좌표가 -1이므로

$g(-1)=h^{-1}(-1)$

이다.
즉, $h^{-1}(-1)=-a+b$이므로
$h(-a+b)=-1$에서

$c(-a+b)^2+\frac{5}{2}(-a+b)=-1$ …… ㉡

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 중 하나의 x좌표가 2이므로

$h(2)=g^{-1}(2)$

이다.
즉, $g^{-1}(2)=4c+5$이므로
$g(4c+5)=2$에서

$a(4c+5)+b=2$ …… ㉢

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 중 하나의 x좌표가 1이므로
$h(1)=1$이어야 한다.
즉, $h(1)=c+\frac{5}{2}=1$에서

$c=-\frac{3}{2}$

$c=-\frac{3}{2}$을 ㉠, ㉡, ㉢에 대입한 후 연립하면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$

따라서

$$2a+4b-10c$$
$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times\frac{3}{2}-10\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=20$$

정답 20

30. 출제의도 : 조건을 만족시키는 사차함수를 사잇값의 정리 등을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에서

$f(1)=f(1)f(2)$
$f(1)+f(2)=f(2)f(3)$
$f(1)+f(2)+f(3)=f(3)f(4)$
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(4)f(5)$
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=f(5)f(6)$

이므로

$f(1)=f(1)f(2)$ …… ㉠
$f(2)=f(2)\{f(3)-f(1)\}$ …… ㉡
$f(3)=f(3)\{f(4)-f(2)\}$ …… ㉢
$f(4)=f(4)\{f(5)-f(3)\}$ …… ㉣
$f(5)=f(5)\{f(6)-f(4)\}$ …… ㉤

조건 (나)에서

$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}\le 0$, $\frac{f(6)-f(4)}{6-4}\le 0$

이므로

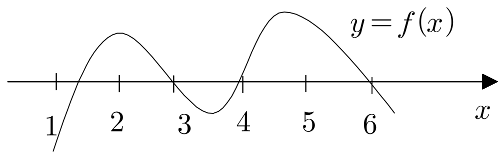
$f(5)-f(3)\le 0$, $f(6)-f(4)\le 0$

그러므로 ㉣에서
$f(4)=0$ 또는 $f(3)=f(5)$
또, ㉤에서
$f(5)=0$ 또는 $f(4)=f(6)$
그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.
(i) $f(4)=0$이고 $f(5)=0$인 경우
㉢에서

$f(3)=-f(3)f(2)$

이므로

$f(3)=0$ 또는 $f(2)=-1$ …… ㉥
㉥에서 $f(3)=0$이면 ㉠과 ㉡은
$f(1)=f(1)f(2)$
$f(2)=-f(1)f(2)$
만약 $f(1)=0$이면 $f(2)=0$이고 $f(2)=0$이면 $f(1)=0$이므로 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.
그러므로
$f(1)\neq 0$, $f(2)\neq 0$
이때, $f(1)=-1$, $f(2)=1$
사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 1과 2 사이에 한 실근 k를 갖는다.
이때,
$f(x)=a(x-k)(x-3)(x-4)(x-5)$
$(a\neq 0,\ 1<k<2)$
라 하면 $f(1)=-1$, $f(2)=1$에서
$a(1-k)\times(-24)=-1$
$a(2-k)\times(-6)=1$
즉, $a(1-k)=\dfrac{1}{24}$, $a(2-k)=-\dfrac{1}{6}$
두 식을 변변 빼면
$a=-\dfrac{5}{24}$
이 값을 대입하면
$-\dfrac{5}{24}(1-k)=\dfrac{1}{24}$
$k=\dfrac{6}{5}$
그러므로
$f(x)=-\dfrac{5}{24}\left(x-\dfrac{6}{5}\right)(x-3)(x-4)(x-5)$
이다.
㉥에서 $f(2)=-1$인 경우 ㉠에서
$f(1)=0$
또, ㉡에서
$-1=-f(3)$
$f(3)=1$
이때, $f(2)=-1$, $f(3)=1$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 2와 3 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.
이때, $f(x)=a(x-k)(x-1)(x-4)(x-5)$
$(a\neq 0,\ 2<k<3)$라 하면
$f(2)=-1$, $f(3)=1$에서 $a=\dfrac{5}{12}$, $k=\dfrac{12}{5}$
그러나 $f(6)-f(4)\leq 0$을 만족하지 않으므로 모순이다.
(ⅱ) $f(4)=0$ 이고 $f(4)=f(6)$인 경우
이때, $f(6)=0$
㉢에서
$f(3)=-f(3)f(2)$
이므로
$f(3)=0$ 또는 $f(2)=-1$ ---㉦
$f(3)=0$이면 ㉠, ㉡에서
$f(1)=f(1)f(2)$
$f(2)=-f(2)f(1)$
이때, $f(1)=0$이면 $f(2)=0$이고
$f(2)=0$이면 $f(1)=0$이므로
사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.
그러므로
$f(1)\neq 0$, $f(2)\neq 0$
이때,
$f(1)=-1$, $f(2)=1$
사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 1과 2 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.
이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 조건 (나)의 $\dfrac{f(5)-f(3)}{5-3}\leq 0$을 만족시키지 않으므로 함수 $f(x)$는 없다.

ⓢ에서 $f(2)=-1$인 경우 ㉠에서

$f(1)=0$

또, ㉡에서

$-1=-f(3)$

$f(3)=1$

이때, $f(2)=-1$, $f(3)=1$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 2와 3 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

$f(4)=0$, $f(6)=0$, $f(1)=0$이고

㉤에서 $f(5)=0$이므로 사차방정식은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.

(ⅲ) $f(3)=f(5)$이고 $f(5)=0$인 경우

이때, $f(3)=0$

㉣에서

$f(4)=0$

한편, ㉠과 ㉡에서

$f(1)=f(1)f(2)$

$f(2)=-f(2)f(1)$

만약 $f(1)=0$이면 $f(2)=0$이고

$f(2)=0$이면 $f(1)=0$이므로

사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.

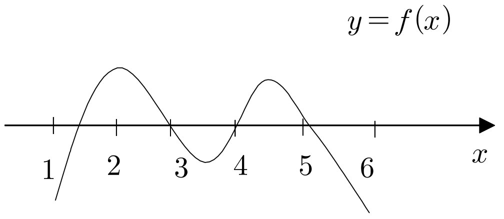
그러므로

$f(1)\neq 0$, $f(2)\neq 0$

이때, $f(1)=-1$, $f(2)=1$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 1과 2 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, (ⅰ)에서

$$f(x)=-\frac{5}{24}\left(x-\frac{6}{5}\right)(x-3)(x-4)(x-5)$$

(ⅳ) $f(3)=f(5)$이고 $f(4)=f(6)$인 경우

㉣과 ㉤에서

$f(4)=0$, $f(5)=0$

그러므로

$f(3)=0$, $f(6)=0$

한편, 한편, ㉠과 ㉡에서

$f(1)=f(1)f(2)$

$f(2)=-f(2)f(1)$

만약 $f(1)=0$이면 $f(2)=0$이고

$f(2)=0$이면 $f(1)=0$이므로

사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 6개의 근을 갖게 되어 모순이다.

그러므로

$f(1)\neq 0$, $f(2)\neq 0$

이때, $f(1)=-1$, $f(2)=1$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 1과 2 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

이는 사차방정식 $f(x)=0$이 5개 이상의 근을 갖게 되어 모순이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)로부터

$$128\times f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=2^7\times\left(-\frac{5}{24}\right)\times\frac{13}{10}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$=2^7\times\frac{13\times 5}{2^7}$$

$$=65$$

정답 65