2019학년도 대학수학능력시험 대비

2018학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학'나'형 정답

1	④	2	①	3	②	4	③	5	③
6	⑤	7	①	8	①	9	⑤	10	②
11	③	12	②	13	⑤	14	④	15	④
16	②	17	①	18	⑤	19	④	20	③
21	②	22	20	23	5	24	21	25	17
26	8	27	22	28	200	29	28	30	320

해 설

1. [출제의도] 기호의 뜻을 알고 집합의 원소의 개수를 센다.

집합 A의 원소의 개수는 4이므로

$n(A)=4$

2. [출제의도] 간단한 거듭제곱근을 계산한다.

$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}=\sqrt{2^2}\times\sqrt[3]{2^3}$

$=2\times2$

$=4$

3. [출제의도] 수열의 극한을 계산한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}$

$=0+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$

4. [출제의도] 등비수열이 되도록 하는 실수의 값을 구한다.

세 수 $3,\ -6,\ a$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\frac{-6}{3}=\frac{a}{-6}$

$3\times a=(-6)^2$

따라서

$a=12$

5. [출제의도] 합성함수의 함숫값을 구한다.

두 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}-3,\ g(x)=x+1$에서

$f(3)=\sqrt{3+1}-3=-1$

$g(-1)=0$

따라서 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(-1)=0$

6. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 모든 원소의 합을 구한다.

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이고

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ B=\{1,\ 3,\ 5\}$이므로

$B^C=\{2,\ 4,\ 6\}$

$A\cap B^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\cap\{2,\ 4,\ 6\}$

$=\{2,\ 4\}$

따라서 집합 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은

$2+4=6$

[다른 풀이]

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ B=\{1,\ 3,\ 5\}$이므로

$A\cap B^C=A-B$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}-\{1,\ 3,\ 5\}$

$=\{2,\ 4\}$

따라서 집합 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은

$2+4=6$

7. [출제의도] 평행이동을 이해하여 유리함수의 그래프의 두 점근선을 구한다.

함수 $y=\frac{1}{x+3}+8$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=-3,\ y=8$이므로

$a=-3,\ b=8$이다.

따라서 $a+b=-3+8=5$

8. [출제의도] 수열의 극한을 이해하여 극한값을 구한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n+1}{a_n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{a_n}}{1+\frac{3}{a_n}}$$

$$=\frac{-2+0}{1+3\times0}$$

$$=-2$$

9. [출제의도] 수열의 합을 이해하여 등식을 만족시키는 실수의 값을 구한다.

$\sum\limits_{k=1}^{5}\frac{1}{k}=a+\sum\limits_{k=1}^{5}\frac{1}{k+1}$

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=a+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

$1=a+\frac{1}{6}$

따라서 $a=\frac{5}{6}$

10. [출제의도] 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값을 구한다.

$\log\sqrt{419}=\frac{1}{2}\log419$

$=\frac{1}{2}\log(4.19\times100)$

$=\frac{1}{2}(\log4.19+\log100)$

$=\frac{1}{2}(\log4.19+2)$이고

상용로그표에서 $\log4.19=0.6222$

따라서

$\log\sqrt{419}=\frac{1}{2}(0.6222+2)$

$=1.3111$

11. [출제의도] 등비급수가 수렴하도록 하는 정수의 개수를 구한다.

x가 정수일 때, 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-3}{7}\right)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{2x-3}{7}$인 등비급수이다.

그러므로 등비급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-3}{7}\right)^n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1<\frac{2x-3}{7}<1$이다.

$-7<2x-3<7$

$-4<2x<10$

$-2<x<5$

따라서 정수 x의 개수는

$5-(-2)-1=6$

12. [출제의도] 로그의 밑을 변환하여 식의 값을 구한다.

밑의 변환 공식에 의하여

$\frac{1}{\log_4 18}+\frac{2}{\log_9 18}=\log_{18}4+2\log_{18}9$

$=\log_{18}2^2+2\log_{18}3^2$

$=\log_{18}2^2+\log_{18}(3^2)^2$

$=\log_{18}2^2+\log_{18}3^4$

$=\log_{18}(2^2\times3^4)$

$=\log_{18}(2\times3^2)^2$

$=\log_{18}18^2$

$=2\log_{18}18$

$=2$

13. [출제의도] 명제가 참이 되도록 하는 실수의 값을 구한다.

명제 $p\to q$의 역이 참이므로 명제 $q\to p$가 참이다.

그러므로 $Q\subset P$가 성립해야 한다.

$4\in Q$이므로 $4\in P$이어야 한다.

$a^2=4$, 즉 $a=2$ 또는 $a=-2$

(ⅰ) $a=-2$일 때

$P=\{2,\ 3,\ 4\},\ Q=\{-1,\ 4\}$이므로

$Q\not\subset P$

(ⅱ) $a=2$일 때

$P=\{2,\ 3,\ 4\},\ Q=\{3,\ 4\}$이므로

$Q\subset P$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2$

14. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 지수법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81},\ \sqrt[3]{3}b=a$

그러므로

$b=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$

$=\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{3}$

$=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}$

$=2\sqrt[3]{3}$

$a=\sqrt[3]{3}b$

$=\sqrt[3]{3}\times2\sqrt[3]{3}$

$=2\sqrt[3]{3^2}$

따라서

$ab=2\sqrt[3]{3^2}\times2\sqrt[3]{3}$

$=4\sqrt[3]{3^3}$

$=4\times3$

$=12$

15. [출제의도] 충분조건이 되도록 하는 자연수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

두 조건 $p,\ q$에 대한 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하자.

$p\to\sim q$가 참이면 이 명제의 대우인 $q\to\sim p$도 참이므로 $Q\subset P^C$이어야 한다.

$P=\{x\mid |x|\geq a\}$이므로

$P^C=\{x\mid |x|<a\}$

$=\{x\mid -a<x<a\}$

$Q=\{x\mid x(x-3)\leq0\}$

$=\{x\mid 0\leq x\leq3\}$

그러므로 $\{x\mid 0\leq x\leq3\}\subset\{x\mid -a<x<a\}$에서

$-a<0$이고 $a>3$이어야 하므로 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4

[다른 풀이]

두 조건 $p,\ q$에 대한 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x\mid |x|\geq a\}=\{x\mid x\leq-a$ 또는 $x\geq a\}$,

$Q=\{x\mid x(x-3)\leq0\}=\{x\mid 0\leq x\leq3\}$

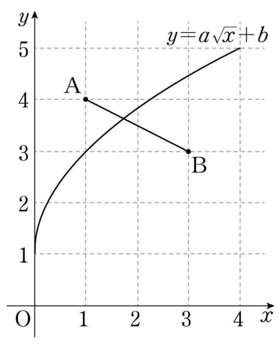
p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이면 $P\subset Q^C$이어야 한다.

$Q^C=\{x\mid x<0$ 또는 $x>3\}$에서

$-a<0$이고 $a>3$이어야 하므로 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4

16. [출제의도] 무리함수의 그래프와 선분이 만나도록 하는 자연수의 값을 구하는 문제를 해결한다.



a, b는 자연수이므로

(ⅰ) $a=1$인 경우

함수 $f(x)=\sqrt{x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $f(1)\le 4$이고 $f(3)\ge 3$이어야 하므로

$\sqrt{1}+b\le 4$이고 $\sqrt{3}+b\ge 3$

따라서 $3-\sqrt{3}\le b\le 3$

이를 만족시키는 자연수 b는 2, 3이므로

순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(1, 3)$

(ⅱ) $a=2$인 경우

함수 $f(x)=2\sqrt{x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $f(1)\le 4$이고 $f(3)\ge 3$이어야 하므로

$2\sqrt{1}+b\le 4$이고 $2\sqrt{3}+b\ge 3$

$3-2\sqrt{3}\le b\le 2$

이를 만족시키는 자연수 b는 1, 2이므로

순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(2, 2)$

(ⅲ) $a=3$인 경우

함수 $f(x)=3\sqrt{x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $f(1)\le 4$이고 $f(3)\ge 3$이어야 하므로

$3\sqrt{1}+b\le 4$이고 $3\sqrt{3}+b\ge 3$

$3-3\sqrt{3}\le b\le 1$

이를 만족시키는 자연수 b는 1이므로

순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$

(ⅳ) $a\ge 4$인 경우 $f(1)=a+b>4$이므로

함수 $f(x)=a\sqrt{x}+b$의 그래프는 선분 AB와 만나지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수는 $2+2+1=5$

17. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 역함수의 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1, 3)$에서 만나므로 $f(1)=3$이고 $g(1)=3$이다.

이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(1)=3$에서 $f(3)=1$

$f(1)=\sqrt{a+b}+1=3$에서

$a+b=4$ …… ㉠

$f(3)=\sqrt{3a+b}+1=1$에서

$3a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$a=-2$, $b=6$

그러므로 $f(x)=\sqrt{-2x+6}+1$

$g(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$f(k)=\sqrt{-2k+6}+1=5$에서 $\sqrt{-2k+6}=4$

$-2k+6=16$

$k=-5$

따라서 $g(5)=-5$

18. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 수열의 극한을 구하는 과정을 증명한다.

$P_n(2n, 0)$, $Q_n(0, 4n^2)$이므로

직선 P_nQ_n의 기울기는

$\frac{0-4n^2}{2n-0}=\frac{-4n^2}{2n}$

$=-2n$이고

y절편은 $4n^2$이므로

직선 P_nQ_n의 방정식은 $y=\boxed{-2n}\times x+4n^2$

x좌표가 k(k는 $2n-1$ 이하의 자연수)일 때 영역에 속하는 점의 y좌표는 $(k-2n)^2$부터 $\boxed{-2n}\times k+4n^2$까지이므로 그 개수는

$\boxed{-2n}\times k+4n^2-(k-2n)^2+1=\boxed{-k^2+1}+2nk$

$a_n=\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\boxed{-k^2+1}+2nk\right)$

$=-\frac{(2n-1)\times 2n\times(4n-1)}{6}+(2n-1)$

$+2n\times\frac{(2n-1)\times 2n}{2}$

$=-\frac{n(2n-1)(4n-1)}{3}+(2n-1)+2n^2(2n-1)$

$=(2n-1)\left\{2n^2-\frac{n(4n-1)}{3}+1\right\}$

$=(2n-1)\left(\frac{2}{3}n^2+\frac{n}{3}+1\right)$

그러므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\left(\frac{2}{3}n^2+\frac{n}{3}+1\right)}{n^3}=\boxed{\frac{4}{3}}$

$f(n)=-2n$, $g(k)=-k^2+1$, $p=\frac{4}{3}$이고

$f(3)=-6$, $g(4)=-15$

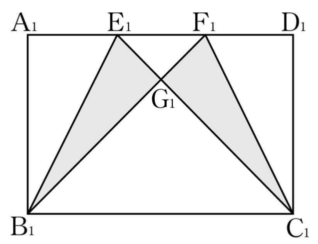
따라서

$p\times f(3)\times g(4)=\frac{4}{3}\times(-6)\times(-15)$

$=120$

19. [출제의도] 도형의 닮음을 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 해결한다.

그림 R_n에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.



$\overline{A_1B_1}=\overline{A_1F_1}=2$이므로 삼각형 $A_1B_1F_1$은 직각이등변삼각형이고 $\angle G_1B_1C_1=45°$이다.

$\overline{D_1C_1}=\overline{D_1E_1}=2$이므로 삼각형 $D_1C_1E_1$은 직각이등변삼각형이고 $\angle G_1C_1B_1=45°$이다.

그러므로 $\angle B_1G_1C_1=90°$이고, 삼각형 $G_1B_1C_1$은 직각이등변삼각형이다.

또한, $\angle G_1E_1F_1=45°$, $\angle G_1F_1E_1=45°$이므로 삼각형 $G_1E_1F_1$도 직각이등변삼각형이다.

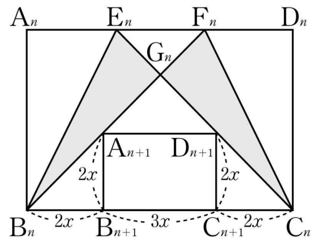
$\overline{B_1C_1}=3$이므로

$\overline{B_1G_1}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\overline{E_1F_1}=1$이므로

$\overline{E_1G_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 $a_1=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}$



$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=2x$라 하면 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=3x$이고

$\overline{B_nC_n}=2x+3x+2x=7x$이므로

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=3x=\frac{3}{7}\overline{B_nC_n}$

직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $1:\frac{3}{7}$이므로, 그림 R_{n+1}에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이 a_{n+1}은

$a_{n+1}=\left(\frac{3}{7}\right)^2a_n=\frac{9}{49}a_n$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}$이고 공비가 $\frac{9}{49}$인 등비수열이다.

따라서

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{49}}$

$=\frac{147}{80}$

20. [출제의도] 수열이 수렴할 조건과 극한값을 추론한다.

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은

1, 2, 1, 2, $\cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다. (참)

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$은

$p+q$, $-p+q$, $p+q$, $-p+q$, $\cdots$

이므로 $p=0$인 경우 수열 $\{b_n\}$은

q, q, q, $\cdots$

가 되어 수렴한다. (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n+b_n\}$은

$1+p+q$, $2-p+q$, $1+p+q$, $2-p+q$, $\cdots$

이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하기 위해서는

$1+p+q=2-p+q$

$p=\frac{1}{2}$

수열 $\{a_nb_n\}$은

$1\times(p+q)$, $2\times(-p+q)$, $1\times(p+q)$, $2\times(-p+q)$, $\cdots$

이므로 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하기 위해서는

$1\times(p+q)=2\times(-p+q)$

$q=3p$

그러므로

$q=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

그러면 $1+p+q=2-p+q=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$

또한, $1\times(p+q)=2\times(-p+q)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$

그러므로

$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=3^2-2\times 2=5$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

[다른 풀이]

ㄷ. $a_n+b_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}+\{p\times(-1)^{n+1}+q\}$

$=\left(\frac{1}{2}-p\right)(-1)^n+\frac{3}{2}+q$이므로

수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하려면

$\frac{1}{2}-p=0$, 즉 $p=\frac{1}{2}$이어야 한다.

$p=\frac{1}{2}$일 때,

$a_nb_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^{n+1}+q\right\}$

$=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{-\frac{1}{2}\times(-1)^n+q\right\}$

$=-\frac{1}{4}\times(-1)^{2n}+\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)(-1)^n+\frac{3}{2}q$

$=\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)(-1)^n-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}q$이므로

수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하려면

$\frac{q}{2}-\frac{3}{4}=0$, 즉 $q=\frac{3}{2}$이어야 한다.

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\frac{3}{2}+q$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}q$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-\lim_{n\to\infty}2a_nb_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$
$$=3^2-2\times 2=5$$

21. [출제의도] 항등함수와 상수함수의 뜻을 이해하여 함수를 추론한다.

함수 $f:X\to X$가 일대일 대응이 아니라고 가정하면

합성함수 $g\circ f:X\to X$는

일대일 대응이 아니게 되므로 항등함수도 아니다.

이런 경우 조건 (나)를 만족시키지 않게 되므로

함수 f는 일대일 대응이어야 한다.

마찬가지 이유로 함수 g도 일대일 대응이다.

두 일대일 대응 f, g에 대하여

$\sum_{n=1}^{9}f(n)=1+2+\cdots+9=45$,

$\sum_{n=1}^{9}g(n)=1+2+\cdots+9=45$이므로

$$\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}=\sum_{n=1}^{9}f(n)+\sum_{n=1}^{9}g(n)$$
$$=45+45$$
$$=90$$

조건 (다)에서 $f(x)+g(x)$의 값은 일정하므로

$f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)라 하자.

$\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}=\sum_{n=1}^{9}k=9k$이므로

$9k=90$에서 $k=10$

모든 $x\in X$에 대하여

$f(x)+g(x)=10$ …… ㉠

조건 (가)에서

$f(1)=8$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(8)=1$

$g(8)=1$이므로 ㉠에 의하여

$f(8)=9$

$f(8)=9$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(9)=8$

$g(9)=8$이므로 ㉠에 의하여

$f(9)=2$

$f(9)=2$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(2)=9$

$g(2)=9$이므로 ㉠에 의하여

$f(2)=1$

$f(2)=1$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(1)=2$

$f(5)=a$라 하면

조건 (나)에 의하여

$g(a)=5$

$g(a)=5$이면 ㉠에 의하여

$f(a)=5$

$f(a)=5$이면 조건 (나)에 의하여

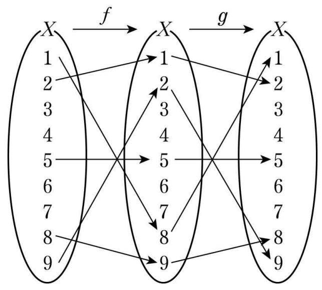
$g(5)=a$

이때 $10=f(5)+g(5)=a+a=2a$이므로

$a=5$

즉 $f(5)=5$이고 ㉠에 의하여 $g(5)=5$

이상의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 $f(3)\neq 6$이므로

(i) $f(3)=3$이면

조건 (나)에 의하여

$g(3)=3$

㉠에 의하여 $g(3)=7$이므로

이 경우는 불가능하다.

(ii) $f(3)=7$이면

조건 (나)에 의하여

$g(7)=3$

$g(7)=3$이면 ㉠에 의하여

$f(7)=7$

함수 f가 일대일 대응이 아니게 되므로 이 경우는 불가능하다.

(iii) $f(3)=4$이면

조건 (나)에 의하여

$g(4)=3$

$g(4)=3$이면 ㉠에 의하여

$f(4)=7$

$f(4)=7$이면 조건 (나)에 의하여

$g(7)=4$

$g(7)=4$이면 ㉠에 의하여

$f(7)=6$

$f(7)=6$이면 조건 (나)에 의하여

$g(6)=7$

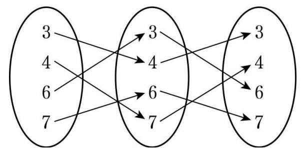
$g(6)=7$이면 ㉠에 의하여

$f(6)=3$

$f(6)=3$이면 조건 (나)에 의하여

$g(3)=6$

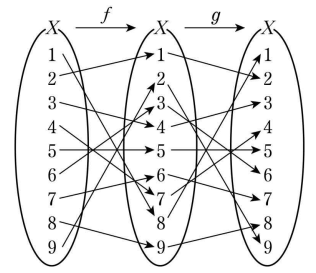
(iii)의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



따라서

$$(f\circ f\circ f)(7)=f(f(6))$$
$$=f(3)$$
$$=4$$

[참고] 함수 f와 g는 다음과 같다.



22. [출제의도] 첫째항과 공차가 주어진 등차수열의 항을 계산한다.

첫째항이 10이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=10+(n-1)\times 5$$
$$=5n+5$$

따라서

$$a_3=5\times 3+5$$
$$=20$$

23. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 로그를 계산한다.

$$\log_2(2^2\times 2^3)=\log_2 2^{2+3}$$
$$=\log_2 2^5$$
$$=5\log_2 2$$
$$=5$$

24. [출제의도] 부분합의 극한과 수열의 일반항의 관계를 이해하여 극한값을 구한다.

수열 $\{S_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3S_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=2\times 0+3\times 7$$
$$=21$$

25. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$$2^{-a}+2^{-b}=\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}$$
$$=\frac{2^a+2^b}{2^{a+b}}$$
$$=\frac{9}{4}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

그런데 $2^a+2^b=2$이므로 이 값을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{2^{a+b}}=\frac{9}{4}$

$2^{a+b}=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$, $p+q=17$

26. [출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6이므로 $a_1>0$

이때 $a_2=2-6=-4$

$a_2<0$이므로

$a_3=a_2+p=-4+p$

(i) $-4+p\geq 0$, 즉 $p\geq 4$일 때

$$a_4=2-a_3$$
$$=2-(-4+p)$$
$$=6-p$$
$$=0$$에서

$p=6$

(ii) $-4+p<0$, 즉 $p<4$일 때

$$a_4=a_3+p$$
$$=(-4+p)+p$$
$$=-4+2p$$
$$=0$$에서

$p=2$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합은 $6+2=8$

27. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 실생활 문제를 해결한다.

직업 체험을 신청한 학생의 집합을 A, 대학 탐방을 신청한 학생의 집합을 B라 하자.

직업 체험과 대학 탐방을 모두 신청한 학생은 5명이므로

$n(A\cap B)=5$ …… ㉠

직업 체험과 대학 탐방 중 어느 것도 신청하지 않은 학생은 3명이므로

$n((A\cup B)^C)=3$

그러므로

$$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$$
$$=31-3=28\ \cdots\cdots\ ㉡$$

직업 체험을 신청한 학생 수는 대학 탐방을 신청한 학생 수의 2배이므로

$n(A)=2\times n(B)$ ······ ㉢
그런데
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서
$28=2\times n(B)+n(B)-5$
$n(B)=11$
$n(A)=2\times 11=22$
따라서 직업 체험을 신청한 학생 수는 22

28. [출제의도] 두 직선의 교점을 이용하여 등차수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

점 $(n, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4=\frac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$3d=a_7-a_4=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$$

$$d=\frac{1}{2}$$

$$a_1=a_4-3d=\frac{7}{2}-3\times\frac{1}{2}=2$$

$\sum_{k=1}^{25}a_k$의 값은 첫째항이 2이고 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열의 첫째항부터 제25항까지의 합과 같으므로

$$\sum_{k=1}^{25}a_k=\frac{25\left\{2\times 2+(25-1)\times\frac{1}{2}\right\}}{2}=\frac{25\times 16}{2}=200$$

[다른 풀이 1]

점 $(n, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4=\frac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$3d=a_7-a_4=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$$

$$d=\frac{1}{2}$$

$$a_{13}=a_7+6d=5+3=8$$
이므로

$$\sum_{k=1}^{25}a_k=(a_1+a_{25})+(a_2+a_{24})+\cdots+(a_{12}+a_{14})+a_{13}$$
$$=2a_{13}+2a_{13}+\cdots+2a_{13}+a_{13}$$
$$=12\times 2a_{13}+a_{13}$$
$$=25a_{13}$$
$$=25\times 8$$
$$=200$$

[다른 풀이 2]

$a_4=\frac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로

직선 l은 두 점 $\left(4, \frac{7}{2}\right)$, $(7, 5)$를 지난다.

직선 l의 기울기는 $\dfrac{5-\frac{7}{2}}{7-4}=\dfrac{\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{1}{2}$이므로

직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{2}(x-4)+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

점 $(n, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표가 a_n이므로 $a_n=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$

$$\sum_{k=1}^{25}a_k=\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{25\times 26}{2}+\frac{3}{2}\times 25$$
$$=\frac{25\times 13+3\times 25}{2}$$
$$=\frac{25\times 16}{2}$$
$$=25\times 8$$
$$=200$$

29. [출제의도] 명제가 참이 되도록 하는 부분집합의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 $x^2-3x<0$의 진리집합을 P라 하면
$x(x-3)<0$에서 $0<x<3$이므로
$P=\{1, 2\}$
명제 '집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-3x<0$이다.' 가 참이 되기 위해서는 집합 A가 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.
그러므로 $A=\{1\}$ 또는 $A=\{2\}$ 또는 $A=\{1, 2\}$이다.
명제 '집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x\in A$이다.' 가 참이 되기 위해서는 $A\cap B\neq\varnothing$이어야 한다.

(i) $A=\{1\}$인 경우
집합 B는 1을 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로 집합 B의 개수는 $2^3=8$

(ii) $A=\{2\}$인 경우
집합 B는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로 집합 B의 개수는 $2^3=8$

(iii) $A=\{1, 2\}$인 경우
집합 B는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이다.
iii−가) 1을 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는 집합 B의 개수는 $2^2=4$
iii−나) 2를 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합 B의 개수는 $2^2=4$
iii−다) 1, 2를 모두 원소로 갖는 집합 B의 개수는 $2^2=4$

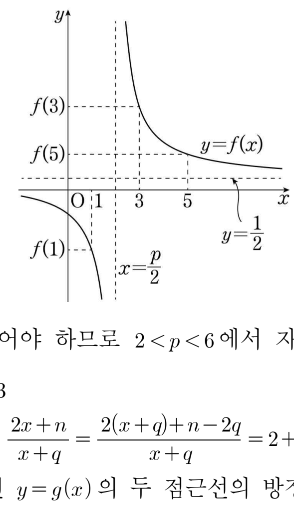
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 $8+8+(4+4+4)=28$

30. [출제의도] 유리함수의 그래프와 수열의 합을 이용하여 문제를 해결한다.

$$f(x)=\frac{x+2n}{2x-p}=\frac{\frac{1}{2}(2x-p)+\frac{p}{2}+2n}{2x-p}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{p}{2}+2n}{2x-p}$$

이고 $\frac{p}{2}+2n>0$이므로

$f(1)<f(5)<f(3)$ ······ ㉠
이 성립하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.

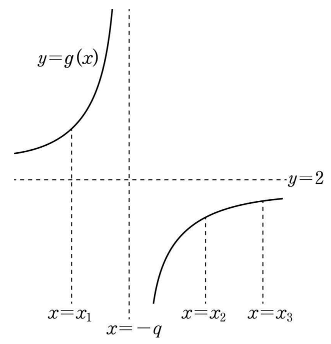


$1<\frac{p}{2}<3$이어야 하므로 $2<p<6$에서 자연수 p의 최솟값 m은 3

함수 $g(x)=\frac{2x+n}{x+q}=\frac{2(x+q)+n-2q}{x+q}=2+\frac{n-2q}{x+q}$

이므로 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 방정식은
$x=-q$, $y=2$

$p=3$일 때 $f(x)=\frac{x+2n}{2x-3}$에 대하여
$x_1=f(1)=-2n-1$
$x_2=f(5)=\frac{2n+5}{7}$
$x_3=f(3)=\frac{2n+3}{3}$
이라 하면 ㉠으로부터
$x_1<x_2<x_3$
이때 문제의 조건에서
$g(x_2)<g(x_3)<g(x_1)$이 성립해야 하므로
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



그러므로 $x_1<-q<x_2$이고 $n-2q<0$이어야 한다.
즉 $-2n-1<-q<\frac{2n+5}{7}$이고 $q>\frac{n}{2}$이어야 하므로
$\frac{n}{2}<q<2n+1$

(i) $n=2l-1$ (l은 자연수)일 때
$\frac{2l-1}{2}<q<2(2l-1)+1$에서
$l-\frac{1}{2}<q<4l-1$이므로
$q=l, l+1, \cdots, 4l-2$
그러므로 정수 q의 개수는 $3l-1$

(ii) $n=2l$ (l은 자연수)일 때
$\frac{2l}{2}<q<2\times 2l+1$에서
$l<q<4l+1$이므로
$q=l+1, l+2, \cdots, 4l$
그러므로 정수 q의 개수는 $3l$

(i), (ii)에 의하여 $a_{2l-1}=3l-1$, $a_{2l}=3l$
따라서

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{l=1}^{10}(a_{2l-1}+a_{2l})$$
$$=\sum_{l=1}^{10}(3l-1+3l)$$
$$=\sum_{l=1}^{10}(6l-1)$$
$$=6\sum_{l=1}^{10}l-\sum_{l=1}^{10}1$$
$$=6\times\frac{10\times 11}{2}-10$$
$$=330-10=320$$