2018학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역[나형] •

정 답

1	③	2	③	3	②	4	④	5	①
6	⑤	7	③	8	④	9	②	10	②
11	②	12	①	13	③	14	④	15	①
16	①	17	⑤	18	①	19	⑤	20	②
21	④	22	7	23	2	24	9	25	16
26	10	27	56	28	180	29	65	30	73

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$6\times 2^{-1}=6\times\frac{1}{2}=3$

2. [출제의도] 교집합 이해하기

$A\cap B=\{2,\ 3\}$ 이므로 $2+3=5$ 이다.

3. [출제의도] 등차수열 이해하기

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d라 하면

$d=a_3-a_2=5-2=3$ 이므로

$a_4=a_3+d=5+3=8$ 이다.

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=4$

5. [출제의도] 수열의 극한 추론하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-1}{n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n}$ 이고

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-1}{n}=6,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n}=6$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=6$ 이다.

6. [출제의도] 역함수 계산하기

$f^{-1}(3)=a$ 라 하면 $f(a)=3$ 이므로

$f(a)=2a-1=3$ 에서 $a=2$ 이다.

따라서 $f^{-1}(3)=2$ 이다.

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

주어진 그래프로부터 $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=-1$ 이다.

따라서 $f(1)+\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=1+(-1)=0$ 이다.

8. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2\times\frac{5}{2}+4}=3$ 이다.

그러므로 삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 3=\frac{15}{4}$ 이다.

9. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$n=5$ 일 때, $\sum\limits_{k=1}^{5}a_k=2^6-2$

$n=4$ 일 때, $\sum\limits_{k=1}^{4}a_k=2^5-2$

$a_5=\sum\limits_{k=1}^{5}a_k-\sum\limits_{k=1}^{4}a_k=(2^6-2)-(2^5-2)=32$

10. [출제의도] 충분조건 이해하기

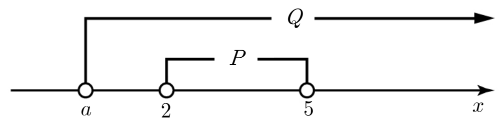
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

조건 $p: x^2-7x+10<0$ 에서 $(x-2)(x-5)<0$ 이므로

$P=\{x\,|\,2<x<5\}$ 이다.

조건 q에서 $Q=\{x\,|\,x>a\}$ 이므로

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.



따라서 $a\le 2$ 이므로 자연수 a 의 최댓값은 2이다.

11. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+a}-2)=0$ 이어야 한다.

따라서 $a=3$ 이다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

따라서 $b=\frac{1}{4}$ 이다. 그러므로

$a+4b=3+4\times\frac{1}{4}=4$ 이다.

12. [출제의도] 함수의 연속 문제 해결하기

$f(x)$ 가 $x\ne 1$ 인 모든 실수에서 연속이고, $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체에서 연속이 되기 위해서는 $x=1$ 에서 연속이면 된다.

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2(2x+k)=0$

$f(1)g(1)=1\times(2+k)$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$ 이므로 $2+k=0$ 이다.

따라서 $k=-2$ 이다.

13. [출제의도] 급수 이해하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$a_n=n^2-1$ 이다. 따라서

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{a_k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{(k-1)(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

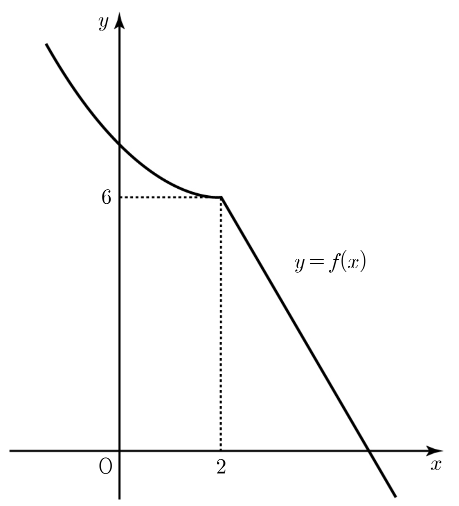
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}$$

이다.

14. [출제의도] 역함수 문제 해결하기

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되어야 하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같은 형태가 되어야 한다.



즉, 곡선 $y=a(x-2)^2+b$가 점 $(2,6)$을 지나야 하므로 $b=6$ 이다.

또, $x\ge 2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프가 기울기가 음수인 직선이므로 $x<2$ 일 때, 곡선 $y=a(x-2)^2+b$ 의 모양은 아래로 볼록해야 한다. 즉, $a>0$ 이다. 따라서 정수 a 의 최솟값은 1이므로 $a+b$ 의 최솟값은 7이다.

15. [출제의도] 함수의 합성 이해하기

$(h\circ f)(3)=h(f(3))=h(2)$ 이다.

한편, $f\circ h=g$ 이므로 $(f\circ h)(2)=g(2)$ 이다.

즉, $f(h(2))=3$ 이다. 이때 $f(1)=3$ 이므로 $h(2)=1$ 이다.

따라서 $(h\circ f)(3)=1$ 이다.

16. [출제의도] 함수의 극한 문제 해결하기

A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{\frac{4}{t}-4}{t-1}(x-1)$ 에서 $y=-\frac{4}{t}(x-1)+4$ 이다.

$0=-\frac{4}{t}(x-1)+4$ 에서 $x=t+1$ 이므로 $\mathrm{P}(t+1,0)$ 이다.

그러므로 삼각형 OPB의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}\times(t+1)\times\frac{4}{t}$ 이고

$\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2(t+1)}{t}=2$ 이다.

17. [출제의도] 절대부등식 문제 해결하기

$\mathrm{A}(a,0)$, $\mathrm{B}(0,b)$ 라 하고 a, b 의 값을 구하기 위해 직선의 식에 각각 대입하면

$0=ma+2m+3$ 에서 $a=\frac{-2m-3}{m}=\frac{-3}{m}-2<0$

$b=m\times 0+2m+3$ 에서 $b=2m+3>0$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{m}+2\right)\times(2m+3)=\frac{1}{2}\times\left(6+\frac{9}{m}+4m+6\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(4m+\frac{9}{m}+12\right)$$

$$\ge\frac{1}{2}\left(2\sqrt{4m\times\frac{9}{m}}+12\right)$$

$$=6+6=12$$

(단, 등호는 $4m=\frac{9}{m}$, 즉 $m=\frac{3}{2}$ 일 때 성립한다.)

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 12이다.

18. [출제의도] 수학적 귀납법 증명하기

(i) $n=3$ 일 때, $a_3=4=\frac{8}{(3-1)(3-2)}$ 이므로

성립한다.

(ii) $n=k(k\ge 3)$ 일 때, 성립한다고 가정하면

$$a_k=\frac{8}{(k-1)(k-2)}$$

이다.

$$k(k-2)a_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}a_i=a_k+\sum_{i=1}^{k-1}a_i$$

$$=a_k+(k-1)(k-3)a_k$$

$$=a_k\times\boxed{(k-2)^2}$$

$$=\frac{8}{(k-1)(k-2)}\times\boxed{(k-2)^2}$$

$$=\frac{\boxed{8(k-2)}}{k-1}$$

이다. 그러므로

$$a_{k+1}=\frac{1}{k(k-2)}\times\frac{\boxed{8(k-2)}}{k-1}=\frac{8}{\boxed{k(k-1)}}$$

이다. 따라서 $n=k+1$ 일 때 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n=\frac{8}{(n-1)(n-2)}$ 이다.

위 과정에서

$f(k)=(k-2)^2$, $g(k)=8(k-2)$, $h(k)=k(k-1)$

이므로 $\frac{f(13)\times g(14)}{h(12)}=\frac{11^2\times 8\times 12}{11\times 12}=88$ 이다.

19. [출제의도] 로그 추론하기

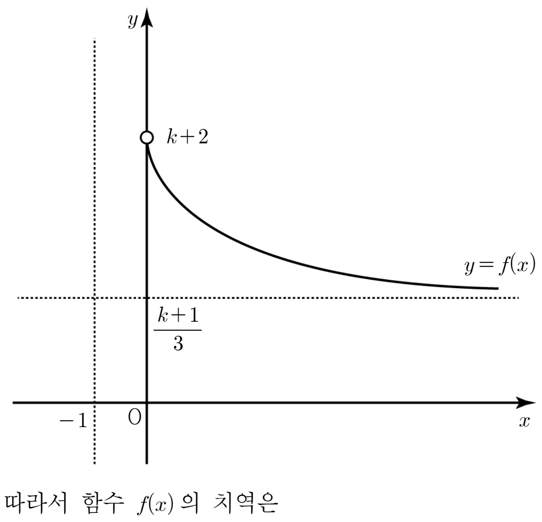
ㄱ. $n=1$일 때 $2^a=10$에서
로그의 정의에 의해 $a=\log_2 10$이므로
$a-1=\log_2 10-\log_2 2=\log_2\frac{10}{2}=\log_2 5$이다. (참)
ㄴ. $n=2$일 때 $2^a=10^2$에서
로그의 정의에 의해 $a=\log_2 10^2$이다.
$a-2=\log_2 10^2-\log_2 2^2=\log_2\frac{10^2}{2^2}=\log_2 5^2=2\log_2 5$
$5^b=10^2$에서 $b=\log_5 10^2$이다.
$b-2=\log_5 10^2-\log_5 5^2=\log_5\frac{10^2}{5^2}=\log_5 2^2=2\log_5 2$
따라서 $(a-2)(b-2)=2\log_2 5\times 2\log_5 2=4$이다. (참)
ㄷ. ㄴ과 마찬가지 방법으로 계산하면
$a=\log_2 10^n$에서 $a-n=\log_2 10^n-\log_2 2^n=n\log_2 5$
$b=\log_5 10^n$에서 $b-n=\log_5 10^n-\log_5 5^n=n\log_5 2$
$(a-n)(b-n)=n\log_2 5\times n\log_5 2=n^2\frac{\log 5}{\log 2}\times\frac{\log 2}{\log 5}=n^2$
이므로
$\sum_{n=1}^{20}\frac{(a-n)(b-n)}{n}=\sum_{n=1}^{20}\frac{n^2}{n}=\sum_{n=1}^{20}n=210$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. [출제의도] 수열 문제 해결하기

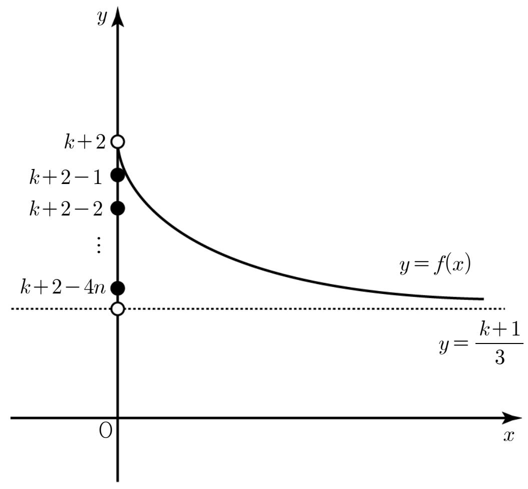
조건 (가)에 의해 $a_n=-36+(n-1)d\neq 0$이므로 $(n-1)d\neq 36$이다. d는 자연수이므로, d는 36의 양의 약수가 아니다. 또한 조건 (나)에 의해
$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{m\{-72+(m-1)d\}}{2}=0$에서 $-72+(m-1)d=0$
이므로 $(m-1)d=72$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{m}a_k=0$인 m이 존재하기 위해서 d가 72의 양의 약수이어야 한다.
그러므로 d는 36의 양의 약수가 아닌 72의 양의 약수이므로 모든 d의 값의 합은 $8+24+72=104$이다.

21. [출제의도] 수열 문제 해결하기

$f(x)=\frac{(k+1)x+3k+6}{3(x+1)}=\frac{(k+1)(x+1)+2k+5}{3(x+1)}$
$=\frac{2k+5}{3(x+1)}+\frac{k+1}{3}$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



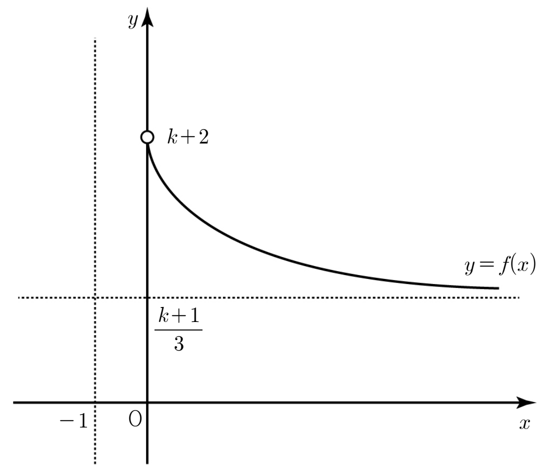
따라서 함수 $f(x)$의 치역은
$\left\{y\,\middle|\,\frac{k+1}{3}<y<k+2\right\}$
이다. 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는 $4n$이므로 $\frac{k+1}{3}$보다 크고 $k+2$보다 작은 정수의 개수가 $4n$이면 된다.



위의 그림에서
$(k+2-4n)-1\le\frac{k+1}{3}<k+2-4n$
이므로
$6n-\frac{5}{2}<k\le 6n-1$
이고, 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록 하는 자연수 k는 $6n-1$, $6n-2$이다.
그러므로 모든 자연수 k의 값의 합은
$(6n-1)+(6n-2)=12n-3$이므로 $a_n=12n-3$이다.
따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(12n-3)=630$이다.

[다른 풀이]

$f(x)=\frac{(k+1)x+3k+6}{3(x+1)}=\frac{(k+1)(x+1)+2k+5}{3(x+1)}$
$=\frac{2k+5}{3(x+1)}+\frac{k+1}{3}$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 치역은
$\left\{y\,\middle|\,\frac{k+1}{3}<y<k+2\right\}$
이다. 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는 $4n$이므로 $\frac{k+1}{3}$보다 크고 $k+2$보다 작은 정수의 개수가 $4n$이면 된다.
(ⅰ) $k=3m-1$(m은 자연수)
$\frac{k+1}{3}$보다 큰 가장 작은 정수는 $\frac{k+1}{3}+1=\frac{k+4}{3}$이므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는
$k+2-\left(\frac{k+4}{3}\right)=4n$
이다. $\frac{3k+6-k-4}{3}=4n$에서 $\frac{2k+2}{3}=4n$이므로
$k=6n-1$이다.
그러므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록 하는 자연수 k는 $6n-1$이다.
(ⅱ) $k=3m-2$(m은 자연수)
$\frac{k+1}{3}$보다 큰 가장 작은 정수는 $\frac{k+1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{k+2}{3}$이므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는
$k+2-\left(\frac{k+2}{3}\right)=4n$
이다. $\frac{3k+6-k-2}{3}=4n$에서 $\frac{2k+4}{3}=4n$이므로
$k=6n-2$이다.
그러므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록 하는 자연수 k는 $6n-2$이다.
(ⅲ) $k=3m$(m은 자연수)
$\frac{k+1}{3}$보다 큰 가장 작은 정수는 $\frac{k+1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{k+3}{3}$이므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는
$k+2-\left(\frac{k+3}{3}\right)=4n$
이다. $\frac{3k+6-k-3}{3}=4n$에서 $\frac{2k+3}{3}=4n$이므로
$k=\frac{12n-3}{2}=6n-\frac{3}{2}$이다.
따라서 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록 하는 자연수 k는 존재하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록 하는 자연수 k의 값의 합은 $12n-3$이므로 $a_n=12n-3$이다.
따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(12n-3)=630$이다.

22. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{7n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(7+\frac{1}{n}\right)=7$

23. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 3+\log_2\frac{4}{3}=\log_2\left(3\times\frac{4}{3}\right)=\log_2 4=2$

24. [출제의도] 등비수열의 극한 계산하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}-2^{n+1}}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=9$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

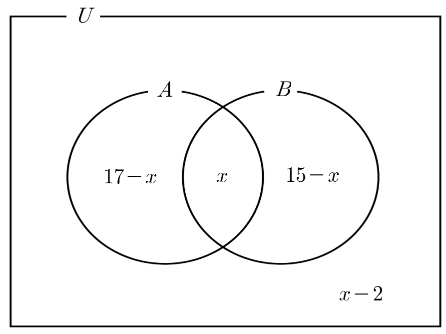
급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-5)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-5)=0$이다.
따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=5$이므로 $\lim_{n\to\infty}(3a_n+1)=16$이다.

26. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이기만 하면 된다. 따라서
$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 $\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-10}{x-2}=b$이다.
$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(x^2+ax-10)=0$이고,
$a=3$이다. 그러므로
$\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+5)=7=b$
이다. 따라서 $a+b=10$이다.

27. [출제의도] 집합의 연산 문제 해결하기

지역 A를 방문한 학생의 집합을 A, 지역 B를 방문한 학생의 집합을 B라 하자.
지역 A와 지역 B를 모두 방문한 학생의 수 $n(A\cap B)$를 x라 하고 각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤다이어그램에 나타내면 아래 그림과 같다.



각 영역에 속하는 원소의 개수는 0이상의 정수이므로 $x \geq 0$, $x-2 \geq 0$, $15-x \geq 0$, $17-x \geq 0$이다.
따라서 $2 \leq x \leq 15$이다.
한편 $n((A-B)\cup(B-A))=32-2x$이고

$$2 \leq 32-2x \leq 28$$

이므로 $M=28$, $m=2$이고 $Mm=56$이다.

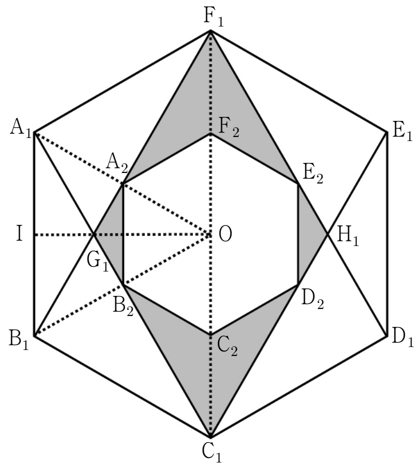
28. [출제의도] 로그 문제 해결하기

$\log_2 \frac{n}{6}=k$ (k는 자연수)라 하면 $\frac{n}{6}=2^k$, $n=3\times 2^{k+1}$
이다. n이 100이하인 자연수이므로 가능한 k는
1, 2, 3, 4이다.
그러므로 모든 자연수 n의 값의 합은

$$3(2^2+2^3+2^4+2^5)=180$$

이다.

29. [출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기



점 $\mathrm{G_1}$에서 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{C_1F_1}$에 내린 수선의 발을 각각 I, O라 하자. $\overline{\mathrm{A_1B_1}} : \overline{\mathrm{C_1F_1}} = \overline{\mathrm{G_1I}} : \overline{\mathrm{G_1O}}$이고 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=4$, $\overline{\mathrm{C_1F_1}}=8$이므로 $\overline{\mathrm{G_1O}}=2\overline{\mathrm{G_1I}}$이다. 삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$이 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로
$\overline{\mathrm{IO}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$이고, $\overline{\mathrm{G_1O}}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다. 따라서 마름모 $\mathrm{F_1G_1C_1H_1}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{G_1H_1}}\times\overline{\mathrm{C_1F_1}}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 2\right)\times 8=\frac{32}{3}\sqrt{3}$$

이다. 한편,
사각형 $\mathrm{A_1B_1OF_1}$은 마름모이고 점 $\mathrm{A_2}$는 선분 $\mathrm{B_1F_1}$의 중점이므로 점 $\mathrm{A_2}$는 선분 $\mathrm{OA_1}$의 중점이다. 마찬가지로 점 $\mathrm{B_2}$는 선분 $\mathrm{OB_1}$의 중점이다. 따라서 $\overline{\mathrm{A_1B_1}} : \overline{\mathrm{A_2B_2}} = 2 : 1$이므로 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}=2$이다.
그러므로 정육각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2E_2F_2}$는 한 변의 길이가 2이므로 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 6=6\sqrt{3}$이다.
따라서 R_1에서 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 다음과 같다.

S_1 = (마름모 $\mathrm{F_1G_1C_1H_1}$의 넓이)
　　− (정육각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2E_2F_2}$의 넓이)
　$=\frac{14}{3}\sqrt{3}$

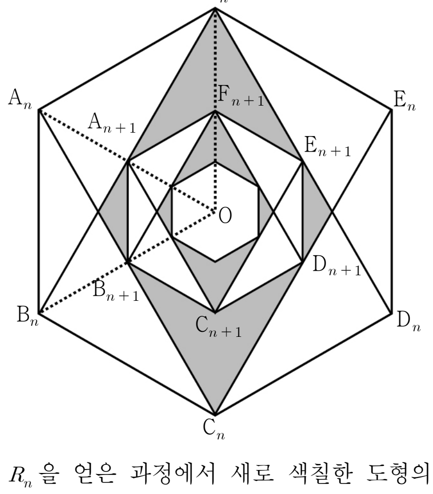


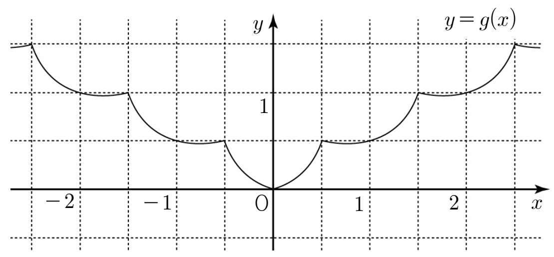
그림 R_n을 얻은 과정에서 새로 색칠한 도형의 넓이를 a_n이라 하자. 그림 R_n에서 직선 $\mathrm{A_nA_{n+1}}$과 직선 $\mathrm{B_nB_{n+1}}$은 점 O에서 만난다. 점 $\mathrm{A_{n+1}}$은 선분 $\mathrm{OA_n}$의 중점이므로 $\overline{\mathrm{A_nB_n}} : \overline{\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}}} = 2 : 1$이다. 따라서 $a_n : a_{n+1} = 2^2 : 1$이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비 $r=\frac{1}{4}$
이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{\frac{14}{3}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{56}{9}\sqrt{3}$$

이다.
따라서 $p=9$, $q=56$이므로 $p+q=65$이다.

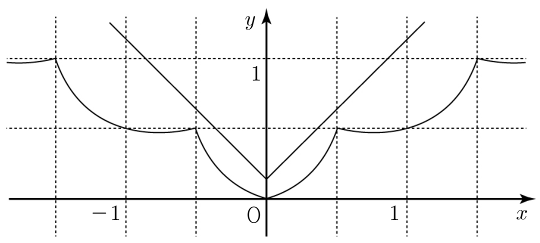
30. [출제의도] 함수의 연속 문제 해결하기

조건 (나)에 의해 $n-\frac{1}{2} \leq x < n+\frac{1}{2}$일 때,
함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 $\frac{n}{2}$만큼 평행이동한 것이다.
또한 조건 (다)에 의해 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

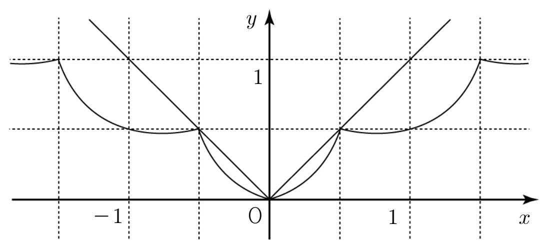


함수 $y=|x|-t$의 그래프는 함수 $y=|x|$의 그래프를 y축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 것이다.
실수 t가 변함에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프의 교점의 개수는 다음과 같다.

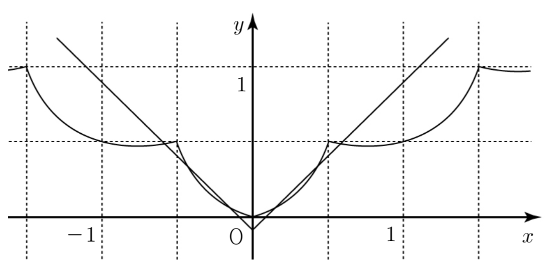
① $t<0$일 때
함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수는 0이므로 $h(t)=0$이다.



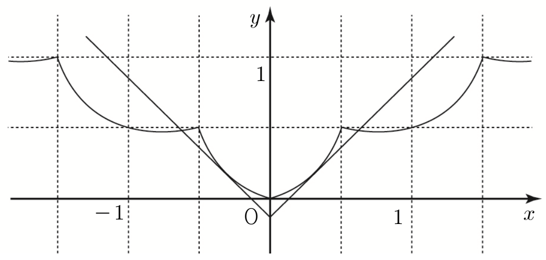
② $t=0$일 때
함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수는 3이므로 $h(t)=3$이다.



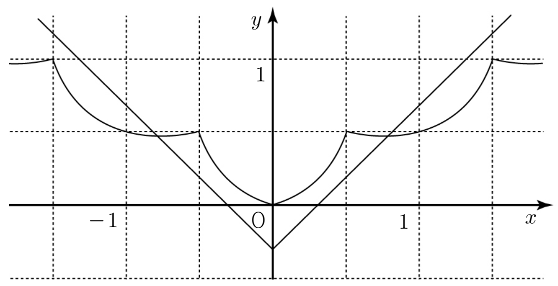
③ $0<t<\frac{1}{16}$일 때
함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수는 6이므로 $h(t)=6$이다.



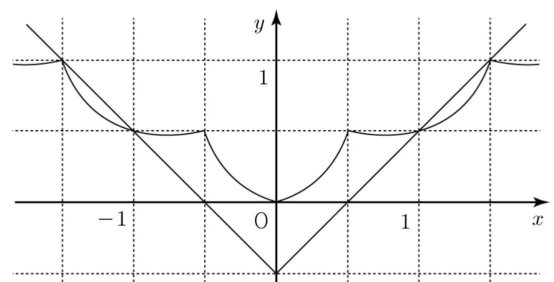
④ $t=\frac{1}{16}$일 때
함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 접하는 가장 작은 t의 값은 방정식 $x^2+\frac{1}{2}x=x-t$가 중근을 가질 때의 t의 값이다. 따라서 $t=\frac{1}{16}$이다.
이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수는 4이므로 $h(t)=4$이다.



⑤ $\frac{1}{16}<t<\frac{1}{2}$일 때
함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이므로 $h(t)=2$이다.



⑥ $t=\frac{1}{2}$일 때
함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수는 4이므로 $h(t)=4$이다.



따라서 함수 $h(t)$가 $t=0$, $\frac{1}{16}$에서 불연속이므로

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=\frac{1}{16}$$

이다. 이때 $x \geq 0$에서 $y=|x|-t$의 방정식은 각각

$$y=x,\ y=x-\frac{1}{16}$$

이고, x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 $\frac{n}{2}$만큼 평행이동하면 방정식은 각각 다음과 같다.

$$y=(x-n)+\frac{n}{2}=x-\frac{1}{2}n,$$

$$y=(x-n)-\frac{1}{16}+\frac{n}{2}=x-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}n\right)$$

그러므로 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 다음과 같다.

$$0,\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right),\ \cdots$$

따라서 $\alpha_{2n}=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}(n-1)$
이므로 $16\alpha_{20}=16\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\times 9\right)=73$이다.

[참고]
함수 $y=h(t)$의 그래프는 다음과 같다.