2018학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 '나'형 정답

1	⑤	2	⑤	3	④	4	④	5	②
6	①	7	②	8	③	9	⑤	10	②
11	③	12	①	13	③	14	②	15	④
16	⑤	17	①	18	①	19	③	20	④
21	②	22	3	23	7	24	56	25	14
26	27	27	640	28	12	29	8	30	23

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$3^{\frac{5}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= 3^2$

$= 9$

2. [출제의도] 다항식의 뺄셈을 계산한다.

두 다항식 $A = 2x^2 - y$, $B = -x^2 + y$에서

$A - B = (2x^2 - y) - (-x^2 + y)$

$= 2x^2 - y + x^2 - y$

$= 3x^2 - 2y$

3. [출제의도] 복소수의 덧셈과 곱셈을 계산한다.

$(2+i)^2 = (2+i)(2+i)$

$= 4 + 4i + i^2$

$= 4 + 4i + (-1)$

$= 3 + 4i$

4. [출제의도] 선분의 내분점을 계산한다.

두 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(6, 6)$을

$2:1$로 내분하는 점의 x좌표는

$\dfrac{2\times 6 + 1 \times 0}{2+1} = 4$

5. [출제의도] 합성함수의 함숫값을 구한다.

두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x - 2$에서

$(g \circ f)(3) = g(f(3))$

$= g(9)$

$= 7$

6. [출제의도] 항등식을 이용하여 상수의 값을 구한다.

$x^3 - 2x^2 - x + 14 = (x+2)(x^2 - 4x + 7)$이므로

$a = 2$, $b = -4$

따라서 $a + b = -2$

[다른 풀이]

$x^3 - 2x^2 - x + 14 = (x+a)(x^2 + bx + 7)$

$= x^3 + (a+b)x^2 + (ab+7)x + 7a$이므로

이차항의 계수를 비교하면

$a + b = -2$

7. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.

다항식 $P(x)$를 $x^2 - 1$로 나눈 몫이 $2x + 1$이고

나머지는 5이므로

$P(x) = (x^2 - 1)(2x + 1) + 5$

$P(x)$를 $x - 2$로 나눈 나머지는 $P(2)$이므로

$P(2) = (2^2 - 1)(2\times 2 + 1) + 5$

$= 3 \times 5 + 5$

$= 20$

8. [출제의도] 무리함수의 그래프의 평행이동을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y = \sqrt{2(x-1)} + 3$

함수 $y = \sqrt{2(x-1)} + 3$의 그래프가

점 $(9, a)$를 지나므로

$a = \sqrt{2(9-1)} + 3$

$= 4 + 3 = 7$

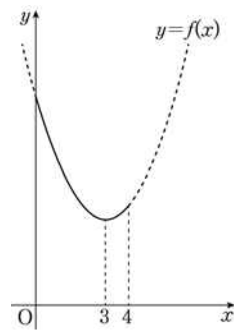
9. [출제의도] 이차함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 이차함수의 최솟값을 구한다.

$f(x) = x^2 - 6x + k$

$= (x-3)^2 + k - 9$이므로

$0 \le x \le 4$에서 이차함수 $f(x)$의 그래프는

그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는

$x = 3$에서 최솟값 $k - 9$를 갖고,

$x = 0$에서 최댓값 k를 갖는다.

이차함수 $f(x)$의 최댓값이 17이므로

$k = 17$

따라서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은

$k - 9 = 17 - 9$

$= 8$

10. [출제의도] 연립방정식의 해를 구한다.

연립방정식

$\begin{cases} 3x - y = 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 90 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x - y = 0$이므로

$y = 3x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (3x)^2 = 90$

$10x^2 = 90$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

따라서 연립방정식의 해는

$x = 3$, $y = 9$ 또는

$x = -3$, $y = -9$이므로

$a = 3$, $b = 9$일 때

$ab = 3 \times 9 = 27$

$a = -3$, $b = -9$일 때

$ab = (-3) \times (-9) = 27$

두 경우 모두 $ab = 27$

11. [출제의도] 조건의 진리집합 사이의 관계를 이해하여 미지수의 최댓값을 구한다.

조건 p: $|x - a| \le 1$ 의 진리집합은

$P = \{x \mid a - 1 \le x \le a + 1\}$

조건 q: $x^2 - 2x - 8 > 0$에 대하여

조건 $\sim q$: $x^2 - 2x - 8 \le 0$이므로

조건 $\sim q$의 진리집합은

$Q^C = \{x \mid x^2 - 2x - 8 \le 0\}$

$= \{x \mid -2 \le x \le 4\}$

따라서 $p \rightarrow \sim q$가 참이 되려면

$PSUBSETQ^C$이어야 하므로

$-2 \le a - 1$, $a + 1 \le 4$

$-1 \le a$, $a \le 3$

$-1 \le a \le 3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3

12. [출제의도] 피타고라스정리와 원과 직선 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + k = 0$의 방정식을 변형하면

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 - k$

원의 중심을 C, 반지름을 r라 하면

$\mathrm{C}(1, 2)$이고, $r^2 = 5 - k$이다.

그림과 같이 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} = 4$이므로

$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{BH}} = 2$

점 $\mathrm{C}(1, 2)$와 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{CH}} = \dfrac{|2\times 1 - 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$

$= \dfrac{5}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{5}$

직각삼각형 CAH에서

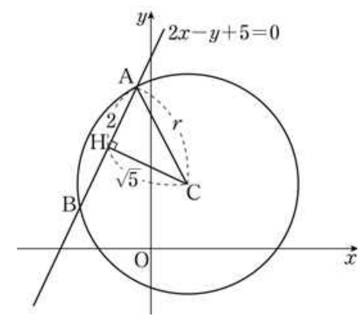
$r^2 = (\sqrt{5})^2 + 2^2$

$= 5 + 4$

$= 9$

$r^2 = 5 - k$이므로 $9 = 5 - k$

$k = -4$



13. [출제의도] 함수의 뜻을 이해하여 상수의 최댓값을 구한다.

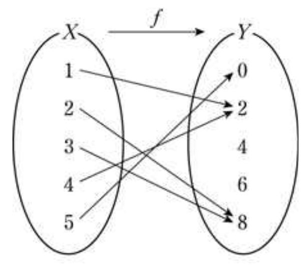
집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에서

집합 $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$로의 함수 f가

$f(x) = (2x^2$의 일의 자리의 숫자$)$이므로

$f(1) = 2$, $f(2) = 8$, $f(3) = 8$, $f(4) = 2$, $f(5) = 0$이며,

함수의 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



함숫값이 2인 정의역 X의 원소는 1과 4이므로

$f(a) = 2$인 X의 원소 a는

$a = 1$ 또는 $a = 4$

함숫값이 8인 정의역 X의 원소는 2와 3이므로

$f(b) = 8$인 X의 원소 b는

$b = 2$ 또는 $b = 3$

a, b의 순서쌍 (a, b)로 가능한 것은

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$이므로

$a + b$의 값은 3, 4, 6, 7

따라서 $a + b$의 최댓값은 7

14. [출제의도] 실생활의 소재를 활용하여 집합의 원소의 개수를 구한다.

자원봉사 활동 신청 여부를 조사한 100명의 사람의 집합을 전체집합 U, 동계 올림픽 대회의 자원봉사 활동을 신청한 사람의 집합을 A, 동계 패럴림픽 대회의 자원봉사 활동을 신청한 사람의 집합을 B라 하면 $n(U) = 100$, $n(A) = 51$, $n(B) = 42$, $n(A^C \cap B^C) = 25$

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$이므로

$n(A \cup B) = n(U) - n(A^C \cap B^C)$

$= 100 - 25$

$=75$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ 에서

$n(A\cap B)=51+42-75$

$=18$

집합 A 또는 집합 B에만 포함된 사람의 수는

$n(A\cup B)-n(A\cap B)=75-18$

$=57$

따라서 두 대회의 자원봉사 활동 중에서 하나만 신청한 사람의 수는 57

[다른 풀이]

두 대회의 자원봉사 활동 중에서 하나만 신청한 사람의 집합은 $(A-B)\cup(B-A)$

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$

$=75-42$

$=33$

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

$=75-51$

$=24$

두 집합 $A-B$, $B-A$는 서로소이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)$

$=33+24$

$=57$

15. [출제의도] $\sum$의 뜻을 이용하여 수열의 항의 값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$

$=1-\frac{1}{a_{n+1}}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{2n}{2n+1}$ $(n\geq 1)$에서

$1-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2n}{2n+1}$

$=1-\frac{1}{2n+1}$ 이므로

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2n+1}$

$a_{n+1}=2n+1$ $(n\geq 1)$

$a_n=2n-1$ $(n\geq 2)$

$a_1=1$ 이므로 $a_n=2n-1$ $(n\geq 1)$

따라서 $a_{10}=20-1$

$=19$

16. [출제의도] 유리함수의 그래프와 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

함수 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프가 점 $(\sqrt[3]{a},\ \sqrt{b})$를 지나므로

$\sqrt{b}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

$b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$

$b=a^{-\frac{2}{3}}$

$\log_a b=\log_a a^{-\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}$

$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}=-\frac{3}{2}$ 이므로

$\log_a b+\log_b a=-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}$

$=-\frac{13}{6}$

17. [출제의도] 무리함수의 그래프와 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

점 A의 좌표를 $(a,\ 2\sqrt{a})\ (a>0)$라 하면

$\mathrm{B}(4a,\ 2\sqrt{a})$, $\mathrm{C}(a,\ \sqrt{a})$가 된다.

직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌 두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $3a$, $\sqrt{a}$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ 이므로

$3a=\sqrt{a}$

$9a^2=a$

$a\neq 0$ 이므로 $9a=1$

$a=\frac{1}{9}$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(3a)^2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=\frac{1}{18}$

18. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명한다.

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+m\}=\frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}$

이므로

$\sum_{k=1}^{m+1}k\{k+(k+1)+\cdots+(m+1)\}$

$=\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+(m+1)\}+\boxed{(m+1)^2}$

$=\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+m\}+(m+1)\sum_{k=1}^{m}k+\boxed{(m+1)^2}$

$=\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+m\}+\boxed{\frac{m(m+1)^2}{2}}+\boxed{(m+1)^2}$

$=\frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}+\boxed{\frac{m(m+1)^2}{2}}+\boxed{(m+1)^2}$

$=\frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}+\frac{(m+1)^2(m+2)}{2}$

$=\frac{(m+1)(m+2)\{m(3m+1)+12(m+1)\}}{24}$

$=\frac{(m+1)(m+2)(3m^2+13m+12)}{24}$

$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(3m+4)}{24}$

$=\frac{(m+1)\{(m+1)+1\}\{(m+1)+2\}\{3(m+1)+1\}}{24}$

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$f(m)=(m+1)^2$,

$g(m)=\frac{m(m+1)^2}{2}$ 이므로

$f(4)=(4+1)^2=25$,

$g(2)=\frac{2(2+1)^2}{2}=9$

따라서 $f(4)+g(2)=25+9$

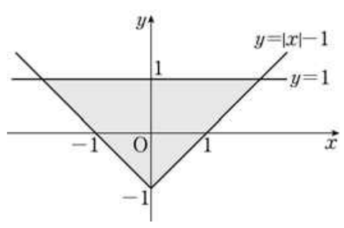
$=34$

19. [출제의도] 부등식의 영역을 구하여 필요조건 문제를 해결한다.

진리집합 $P=\{(x,\ y)\ |\ |x|-1\leq y\leq 1\}$ 에서

$|x|-1\leq y$ 는 함수 $y=|x|-1$ 의 그래프와 그 윗부분이므로 진리집합 P는 함수 $y=|x|-1$ 의 그래프와 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역이다.

진리집합 P를 좌표평면에 나타내면 다음 그림의 색칠된 삼각형과 그 내부가 된다.



진리집합 $Q=\{(x,\ y)\ |\ x^2+(y-a)^2\leq b^2\}$ 에서

$x^2+(y-a)^2=b^2$은 중심이 $(0,\ a)$이고 반지름의 길이가 b인 원이므로 진리집합 Q는 중심이 $(0,\ a)$이고 반지름의 길이가 b인 원과 그 내부이다.

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$이다.

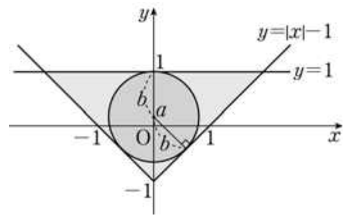
즉, 원 $x^2+(y-a)^2=b^2$이 함수 $y=|x|-1$ 의 그래프와 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역에 포함되어야 한다.

따라서 $-1<a<1$

반지름의 길이 b가 최대가 될 때는

원 $x^2+(y-a)^2=b^2$이 그림과 같이 세 직선

$y=x-1$, $y=-x-1$, $y=1$에 동시에 접할 때이다.



원의 중심 $(0,\ a)$와 직선 $y=x-1$ 사이의 거리는

$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}=\frac{a+1}{\sqrt{2}}$

원의 중심 $(0,\ a)$와 직선 $y=1$ 사이의 거리는

$1-a$

$\frac{a+1}{\sqrt{2}}$과 $1-a$는 둘 다 원의 반지름의 길이이므로

$\frac{a+1}{\sqrt{2}}=1-a$

$(a+1)=\sqrt{2}(1-a)=\sqrt{2}-\sqrt{2}a$

$(\sqrt{2}+1)a=\sqrt{2}-1$

$a=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2$

$=3-2\sqrt{2}$

따라서 $b=1-a$

$=2\sqrt{2}-2$

[다른 풀이]

진리집합 P가 나타내는 영역은

세 점 $(2,\ 1)$, $(-2,\ 1)$, $(0,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 그 내부이다.

반지름의 길이 b가 최대가 될 때는

원 $x^2+(y-a)^2=b^2$이 삼각형에 내접할 때이므로

삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4)\times b=\frac{1}{2}\times 4\times 2$

$\frac{(4\sqrt{2}+4)b}{2}=4$

$(\sqrt{2}+1)b=2$

$b=\frac{2}{\sqrt{2}+1}=2(\sqrt{2}-1)$

$=2\sqrt{2}-2$

20. [출제의도] 이차부등식과 이차함수의 그래프의 관계를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별한다.

$x^2-9\leq 2k(x-a)$

$(x+3)(x-3)\leq 2k(x-a)$

ㄱ. $a=3$일 때,

$(x+3)(x-3)\leq 2k(x-3)$

$x>3$이면 $x+3\leq 2k$, $x\leq 2k-3$

$x=3$은 k의 값에 관계없이 해가 된다.

$x<3$이면 $x+3\geq 2k$, $x\geq 2k-3$

따라서 $x\leq 3$이면 부등식의 해가 $x\leq 2k-3$이 아니다. (거짓)

ㄴ. $a=5$일 때,

$(x+3)(x-3)\leq 2k(x-5)$

$x^2-2kx+10k-9\leq 0$이므로

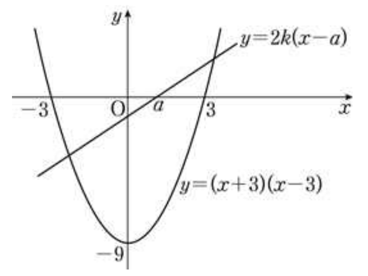
부등식 $x^2-2kx+10k-9\leq 0$의 해가 존재하지 않으려면 이차방정식 $x^2-2kx+10k-9=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. 따라서 이차방정식 $x^2-2kx+10k-9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-10k+9<0$

$(k-1)(k-9)<0$

$1<k<9$
$1<k<9$를 만족시키는 정수 k는
$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$이므로
정수 k의 개수는 7 (참)

ㄷ. 부등식 $(x+3)(x-3) \le 2k(x-a) \cdots\cdots (*)$ 의 해는
함수 $y=(x+3)(x-3)$의 그래프가
직선 $y=2k(x-a)$보다 아래쪽에 있는 부분의
x의 값의 범위이다.
함수 $y=(x+3)(x-3)$의 그래프는 두 점 $(-3, 0)$과 $(3, 0)$을 지나는 곡선이고,
함수 $y=2k(x-a)$의 그래프는 점 $(a, 0)$을 지나고 기울기가 $2k$인 직선이다.
$-3 \le a \le 3$일 때,
$k \ge 0$이면 $x=3$이 부등식 $(*)$을 만족시키고
$k<0$이면 $x=-3$이 부등식 $(*)$을 만족시키므로
k의 값에 관계없이 부등식 $(*)$을 만족시키는
정수 x의 값은 항상 존재한다. (참)



따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

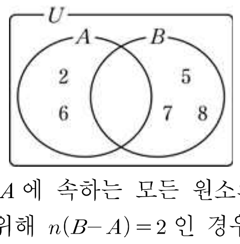
21. [출제의도] 조건을 만족시키는 집합에 속하는 원소의 합의 최댓값과 최솟값을 추론한다.

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 원소 중에서
조건 (다)를 만족시키는 $a \in A$, $b \in B$를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.

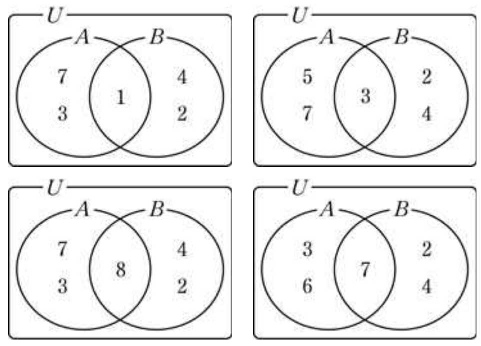
$(1, 1)$, $(2, 5)$, $(3, 2)$, $(4, 6)$,
$(5, 3)$, $(6, 7)$, $(7, 4)$, $(8, 8)$

따라서 1과 8은 집합 $A-B$의 원소가 아니다.
$p \in A-B\,(p \ne 1,\ p \ne 8)$이면
$(p, q) \in \{(2, 5), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 7), (7, 4)\}$인
q가 집합 B에 존재한다.
$q \in B-A$ 또는 $q \in A \cap B$
그런데 $q \in A \cap B$인 경우에는
$(q, r) \in \{(2, 5), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 7), (7, 4)\}$인
r가 집합 $B-A$에 존재하게 된다.
그러므로 $r \ne 1$, $r \ne 8$
한편 $p \ne 1$, $p \ne 8$이므로
1과 8은 집합 $B-A$의 원소가 될 수 있다.
따라서 $n(A-B) \le n(B-A)$
$n(A-B)=2$, $n(A \cup B)=5$이므로
$n(B-A)=2$ 또는 $n(B-A)=3$

(i) 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 구하기 위해 $n(B-A)=3$인 경우를 생각하자.
8은 집합 $B-A$의 원소가 될 수 있으므로
$8 \in B-A$
$n(A-B)=2$, $n(B-A)=3$이고 $8 \in B-A$이므로
7이 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $6 \in A-B$이다.
그러므로 $7 \in B-A$이면 $6 \notin B-A$
5가 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $2 \in A-B$이다.
$A-B=\{2, 6\}$, $B-A=\{5, 7, 8\}$일 때, 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합이 최대가 된다.
그러므로 최댓값은
$5+7+8=20$



(ii) 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최솟값을 구하기 위해 $n(B-A)=2$인 경우를 생각하자.
$n(A-B)=2$, $n(B-A)=2$이므로
$1 \notin B-A$
2가 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $3 \in A$
그러므로 $2 \in B-A$이면 $3 \notin B-A$
4가 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $7 \in A$이다.
$B-A=\{2, 4\}$일 때, 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합이 최소이다.
그러므로 최솟값은
$2+4=6$
실제로 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최솟값이 6인 경우는 다음 그림의 4가지이다.



따라서 $M=20$, $m=6$이므로
$M+m=26$

22. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$

23. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하여 식의 값을 구한다.

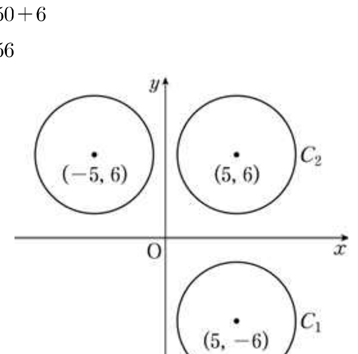
이차방정식 $x^2-7x+10=0$의 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은 7

[다른 풀이]

$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$이므로
이차방정식 $x^2-7x+10=0$의 두 근은
$x=2$ 또는 $x=5$
따라서 두 근의 합은
$2+5=7$

24. [출제의도] 도형의 대칭이동을 이해하여 원의 중심의 좌표를 구한다.

원 $x^2+y^2+10x-12y+45=0$은
$(x+5)^2+(y-6)^2=16$이므로
중심의 좌표는 $(-5, 6)$이다.
원 C_1의 중심의 좌표는 점 $(-5, 6)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(5, -6)$이다.
원 C_2의 중심의 좌표는 점 $(5, -6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(5, 6)$이다.
$a=5$, $b=6$이므로
$10a+b=50+6$
$=56$



25. [출제의도] 유리함수의 그래프를 이해하여 역함수의 함숫값을 구한다.

함수 $f(x)=\dfrac{4x+9}{x-1}$
$=\dfrac{4(x-1)+13}{x-1}$
$=\dfrac{13}{x-1}+4$

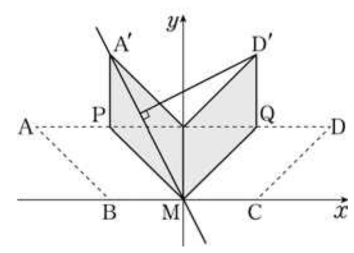
함수 $f(x)=\dfrac{4x+9}{x-1}$의 그래프의 점근선은
직선 $x=1$, $y=4$이므로 $a=1$, $b=4$
$a+b=1+4=5$이므로
$f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5)=c$라 하면
$f(c)=\dfrac{4c+9}{c-1}=5$
$4c+9=5c-5$
$c=14$
따라서 $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5)$
$=14$

26. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항의 값을 추론한다.

$a_3=3$이면 $a_2=3$ 또는 $a_2=6$이다.
$a_2=3$이면 $a_1=3$ 또는 $a_1=6$이고,
$a_2=6$이면 $a_1=9$ 또는 $a_1=12$이다.
$a_1 \ge 10$이므로 $a_1=12$
$a_2=\dfrac{12}{2}=6$
또, $a_3=3$이므로 $a_4=a_5=3$이다.
따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k=12+6+3+3+3=27$

27. [출제의도] 도형의 대칭이동을 이용하여 점과 직선 사이의 거리 문제를 해결한다.

직선 BC를 x축, 점 M을 원점으로 하면
$\mathrm{A}(-4, 2)$, $\mathrm{B}(-2, 0)$, $\mathrm{C}(2, 0)$, $\mathrm{D}(4, 2)$이다.



선분 AD를 1:3으로 내분하는 점 P의 좌표는
$\mathrm{P}(-2, 2)$
선분 AD를 3:1로 내분하는 점 Q의 좌표는
$\mathrm{Q}(2, 2)$
점 D′은 점 D를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 D′의 좌표는 $\mathrm{D}'(2, 4)$
점 A′은 점 D′과 y축에 대하여 대칭인 점이므로 점 A′의 좌표는 $\mathrm{A}'(-2, 4)$
직선 A′M의 방정식은 $2x+y=0$이므로
점 $\mathrm{D}'(2, 4)$와 직선 $2x+y=0$ 사이의 거리 d는
$d=\dfrac{|2\times 2+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}$
$=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$
따라서 $50d^2=50\times\dfrac{64}{5}$
$=640$

28. [출제의도] 약수의 성질과 지수법칙을 이해하여 순서쌍의 개수 문제를 해결한다.

$64^{\frac{1}{m}}=k\times 81^{\frac{1}{n}}$에서 양변을 $81^{\frac{1}{n}}$으로 나누면
$k=\dfrac{64^{\frac{1}{m}}}{81^{\frac{1}{n}}}=2^{\frac{6}{m}}\times 3^{-\frac{4}{n}}$
두 밑 2와 3은 서로소이므로 자연수 k가 존재하기 위해서는 밑 2의 지수 $\dfrac{6}{m}$과 밑 3의 지수 $-\dfrac{4}{n}$가 모두 자연수가 되어야 한다.
m은 6의 양의 약수인 1, 2, 3, 6이고,
n은 4의 음의 약수인 -1, -2, -4이므로
모든 순서쌍 (m, n)은
$(1, -1)$, $(1, -2)$, $(1, -4)$,
$(2, -1)$, $(2, -2)$, $(2, -4)$,
$(3, -1)$, $(3, -2)$, $(3, -4)$,

$(6,-1)$, $(6,-2)$, $(6,-4)$

따라서 두 정수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 12

29. [출제의도] 부등식의 영역에서의 최대·최소를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

어느 상점에서 두 향수 A와 B가 한 달 동안 판매되는 향수병의 개수를 각각 x, y라 하자.

향수 A를 1병 생산하는데 필요한 원료의 양은 원료 P가 50㎖, 원료 Q가 100㎖이고

향수 B를 1병 생산하는데 필요한 원료의 양은 원료 P가 100㎖, 원료 Q가 50㎖이므로

향수 A와 향수 B를 각각 1병씩 생산하는데 필요한 원료의 구입 비용은 각각

$0.5\times1+1\times2=2.5$ (만 원),

$1\times1+0.5\times2=2$ (만 원)이다.

따라서 향수 A와 향수 B를 생산하기 위하여 한 달 동안 구입하게 되는 두 원료 P와 Q의 구입 비용의 합은 $2.5x+2y$만 원이다.

한 달에 생산할 수 있는 두 향수 A, B의 병의 개수의 합이 최대 50이고,

한 달에 사용할 수 있는 두 원료 P, Q의 총 구입 비용이 최대 110만 원이므로

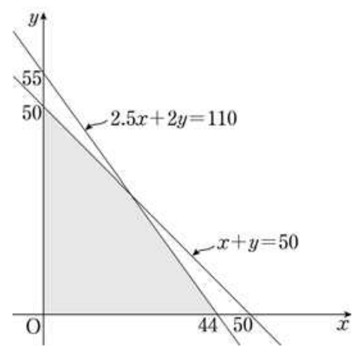
다음 식이 성립한다.

$x\ge0,\ y\ge0$ …… ㉠

$x+y\le50$ …… ㉡

$2.5x+2y\le110$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 영역을 좌표평면에 나타내면 다음 그림의 색칠된 사각형과 그 내부가 된다.



연립방정식

$$\begin{cases} x+y=50 \\ 2.5x+2y=110 \end{cases}$$

의 해는 $x=20$, $y=30$이므로 제1사분면의 사각형의 꼭짓점의 좌표는 $(20, 30)$이다.

한편 향수 A의 판매 가격이 a만 원이고,

향수 B의 판매 가격이 $\frac{9}{10}a$만 원이므로

두 향수 A, B를 한 달 동안 판매한 금액의 합은 $ax+\frac{9}{10}ay$만 원이다.

$ax+\frac{9}{10}ay=k$ (k는 상수)로 놓으면

$y=-\frac{10}{9}x+\frac{10k}{9a}$는 기울기가 $-\frac{10}{9}$이고

y절편이 $\frac{10k}{9a}$인 직선이므로

직선 $y=-\frac{10}{9}x+\frac{10k}{9a}$의 y절편 $\frac{10k}{9a}$는

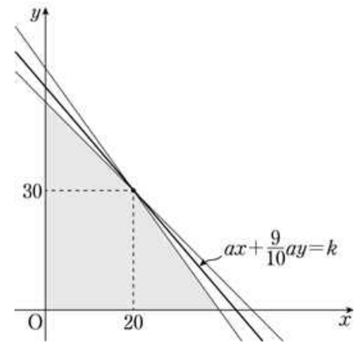
두 직선 $x+y=50$과 $2.5x+2y=110$의 교점 $(20, 30)$을 지날 때 최대가 된다.

따라서 이 상점에서 두 향수 A, B를 한 달 동안 판매한 금액의 합의 최댓값은

$a\times20+\frac{9}{10}a\times30=47a$ (만 원)이므로

$47a=376$

$a=8$ (만 원)



30. [출제의도] 다항식의 인수정리와 등차수열의 일반항을 이용하여 수열 문제를 해결한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$P(x)=a_{m+1}x^m+a_mx^{m-1}+\cdots+a_2x+a_1$ 에서

$P(1)=a_{m+1}+a_m+\cdots+a_2+a_1$ 이고

이는 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$(m+1)$항까지의 합이므로

$P(1)=\frac{(m+1)(2a+md)}{2}$

$P(-1)=a_{m+1}(-1)^m+a_m(-1)^{m-1}+\cdots-a_2+a_1$

(ⅰ) m이 홀수일 때

$P(-1)=-a_{m+1}+a_m-\cdots-a_2+a_1$

$=-(a_{m+1}-a_m)-\cdots-(a_2-a_1)$

$=-\frac{m+1}{2}d$이므로

$P(1)=5P(-1)$ 에서

$\frac{(m+1)(2a+md)}{2}=5\times\left(-\frac{m+1}{2}d\right)$

$m+1\neq0$이므로

$2a+md=-5d$

$a+\frac{m+5}{2}d=0$

m은 홀수이므로 $\frac{m+5}{2}$는 자연수이고

$a+\frac{m+5}{2}d$는 수열 $\{a_n\}$의 제$\left(\frac{m+7}{2}\right)$항이다.

이때 $a_{\frac{m+7}{2}}=a+\left(\frac{m+7}{2}-1\right)d$

$=a+\frac{m+5}{2}d=0$

이 되어 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니라는 조건에 모순이다.

따라서 $P(1)=5P(-1)$을 만족시키는 홀수 m은 존재하지 않는다.

(ⅱ) m이 짝수일 때

$P(-1)=a_{m+1}-a_m+\cdots-a_2+a_1$

$=(a_{m+1}-a_m)+\cdots+(a_3-a_2)+a$

$=a+\frac{m}{2}d=\frac{2a+md}{2}$

$P(1)=5P(-1)$ 에서

$\frac{(m+1)(2a+md)}{2}=5\times\frac{2a+md}{2}$ …… (＊)

m은 짝수이므로 $\frac{m}{2}$은 자연수이고

$a+\frac{m}{2}d$는 수열 $\{a_n\}$의 제$\left(\frac{m}{2}+1\right)$항이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로

$a_{\frac{m}{2}+1}=a+\frac{m}{2}d=\frac{2a+md}{2}\neq0$

(＊)에서 $m+1=5$이므로 $m=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 가능한 자연수 m은 4뿐이므로 $k=4$이다.

다항식 $a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1$이 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$a_5(-2)^4+a_4(-2)^3+a_3(-2)^2+a_2(-2)+a_1=0$

$a_n=a+(n-1)d$이므로

$(a+4d)(-2)^4+(a+3d)(-2)^3$

$+(a+2d)(-2)^2+(a+d)(-2)+a$

$=16(a+4d)-8(a+3d)+4(a+2d)-2(a+d)+a$

$=11a+46d=0$

$d=-\frac{11}{46}a$

모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq0$이므로

$\frac{a_1}{a_{k+1}}=\frac{a}{a_5}=\frac{a}{a+4d}$

$=\frac{a}{a-\frac{22}{23}a}=\frac{1}{\frac{1}{23}}$

$=23$