제 2 교시

수학 영역(나형)

5지선다형

1. $3^{\frac{5}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2. 두 다항식

$$A=2x^2-y,\ B=-x^2+y$$

에 대하여 $A-B$를 간단히 나타낸 것은? [2점]

① x^2-2y ② x^2+y ③ $3x^2-y$
④ $3x^2+y$ ⑤ $3x^2-2y$

3. $(2+i)^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① $2+2i$ ② $2+3i$ ③ $3+3i$ ④ $3+4i$ ⑤ $3+5i$

4. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(6,\ 6)$에 대하여 선분 OA를 $2:1$로 내분하는 점의 x좌표는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 두 함수 $f(x)=2x+3$과 $g(x)=x-2$에 대하여 $(g\circ f)(3)$의 값은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

6. 모든 실수 x에 대하여 등식

$$x^3-2x^2-x+14=(x+a)(x^2+bx+7)$$

이 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 다항식 $P(x)$를 x^2-1로 나눈 몫은 $2x+1$이고 나머지가 5일 때, 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는? [3점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

8. 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프가 점 $(9,\ a)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9. $0 \le x \le 4$에서 정의된 이차함수 $f(x)=x^2-6x+k$의 최댓값이 17일 때, 이차함수 $f(x)$의 최솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

10. 연립방정식

$$\begin{cases} 3x-y=0 \\ x^2+y^2=90 \end{cases}$$

의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

11. 실수 x에 대한 두 조건

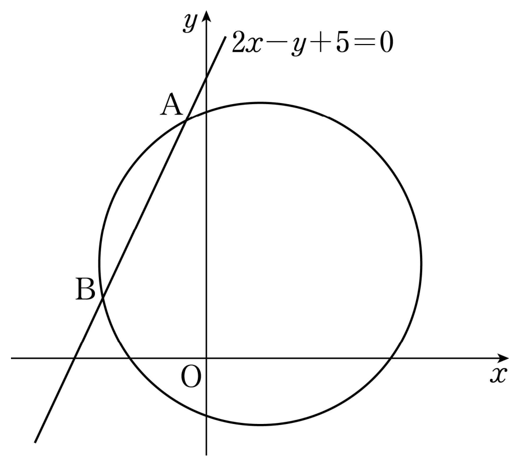
p: $|x-a| \le 1$,

q: $x^2-2x-8>0$

에 대하여 $p \to \sim q$가 참이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2-2x-4y+k=0$과 직선 $2x-y+5=0$이 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{\mathrm{AB}}=4$일 때, 상수 k의 값은? [3점]



① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

13. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 집합 $Y=\{0, 2, 4, 6, 8\}$로의 함수 f를

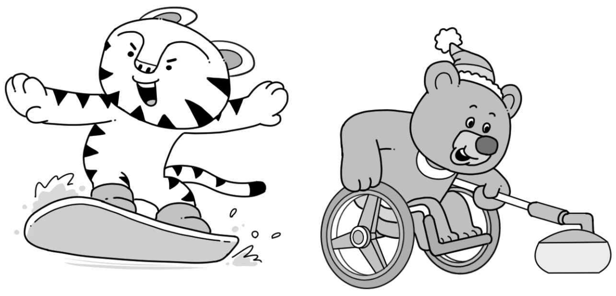
$$f(x)=(2x^2 \text{의 일의 자리의 숫자})$$

로 정의하자. $f(a)=2$, $f(b)=8$을 만족시키는 X의 원소 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

14. 2018 평창 동계 올림픽 대회 및 동계 패럴림픽 대회 자원봉사 포털 사이트에 접속한 사람 중에서 100명을 대상으로 자원봉사 활동 신청 여부를 조사하였다. 그 결과 동계 올림픽 대회의 자원봉사 활동을 신청한 사람이 51명, 동계 패럴림픽 대회의 자원봉사 활동을 신청한 사람이 42명, 두 대회의 자원봉사 활동 중 어느 것도 신청하지 않은 사람이 25명이다. 두 대회의 자원봉사 활동 중에서 하나만 신청한 사람의 수는? [4점]

① 55 ② 57 ③ 59 ④ 61 ⑤ 63



15. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{2n}{2n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킨다. a_{10}의 값은? [4점]

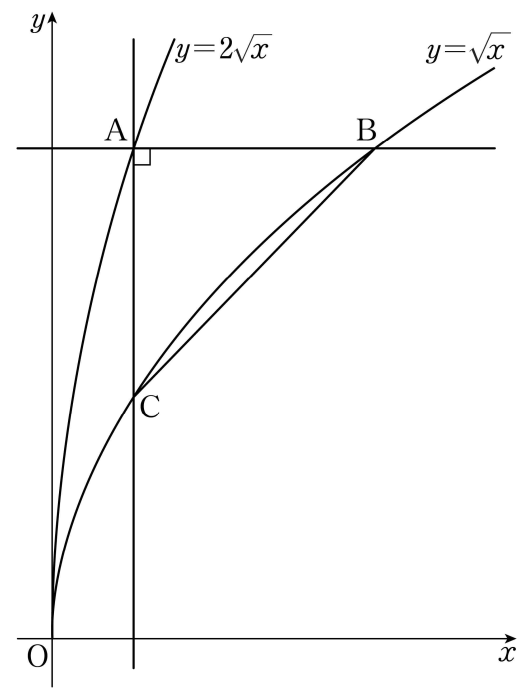
① 10　② 13　③ 16　④ 19　⑤ 22

16. 좌표평면에서 함수 $y = \frac{1}{x}$의 그래프가 점 $(\sqrt[3]{a},\ \sqrt{b})$를 지날 때, $\log_a b + \log_b a$의 값은? (단, a, b는 1이 아닌 양수이다.) [4점]

① $-\frac{17}{6}$　② $-\frac{8}{3}$　③ $-\frac{5}{2}$　④ $-\frac{7}{3}$　⑤ $-\frac{13}{6}$

17. 함수 $y=2\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 A를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.) [4점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{6}$



18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} k\{k+(k+1)+(k+2)+\cdots+n\} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k\{k+(k+1)+(k+2)+\cdots+m\} = \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}$$

이다.
$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k\{k+(k+1)+(k+2)+\cdots+m+(m+1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{m} k\{k+(k+1)+(k+2)+\cdots+m+(m+1)\}+\boxed{(\text{가})}$$
$$=\sum_{k=1}^{m} k\{k+(k+1)+(k+2)+\cdots+m\}+\boxed{(\text{나})}+\boxed{(\text{가})}$$
$$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(3m+4)}{24}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(4)+g(2)$의 값은? [4점]

① 34 ② 36 ③ 38 ④ 40 ⑤ 42

19. 두 조건 p, q의 진리집합이 각각

$$P = \{(x,\, y) \mid |x| - 1 \le y \le 1\},$$

$$Q = \{(x,\, y) \mid x^2 + (y-a)^2 \le b^2\}$$

이다. p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 양수 b의 최댓값은? (단, a는 실수이다.) [4점]

① $\sqrt{2}-1$　② $2-\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}-2$
④ $4-2\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{2}-1$

20. 실수 x에 대한 부등식

$$x^2 - 9 \le 2k(x-a)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, k는 상수이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a=3$일 때, 부등식의 해는 $x \le 2k-3$이다.
ㄴ. $a=5$일 때, 부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 정수 k의 개수는 7이다.
ㄷ. $-3 \le a \le 3$일 때, 모든 실수 k에 대하여 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 항상 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $n(A\cup B)=5$
> (나) $n(A-B)=2$
> (다) $a\in A$이면 $\frac{a+1}{2}\in B$ 또는 $\frac{a+8}{2}\in B$이다.

집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

단답형

22. $\log_2 8$의 값을 구하시오. [3점]

23. 이차방정식 $x^2-7x+10=0$의 두 근의 합을 구하시오. [3점]

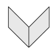
24. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+10x-12y+45=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원을 C_1이라 하고, 원 C_1을 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심의 좌표를 $(a,\,b)$라 할 때, $10a+b$의 값을 구하시오. [3점]

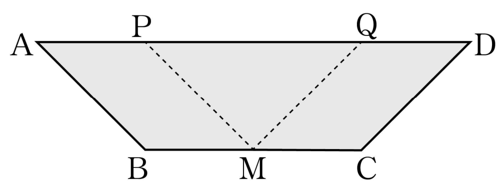
25. 함수 $f(x)=\dfrac{4x+9}{x-1}$의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=a$, $y=b$일 때, $f^{-1}(a+b)$의 값을 구하시오. [3점]

26. $a_3=3$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

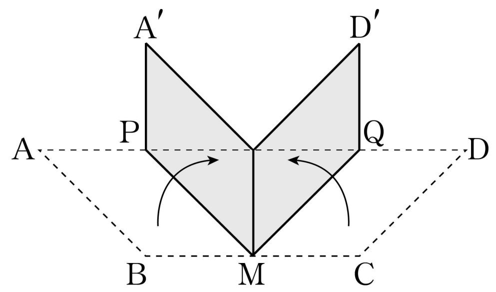
$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이다. $a_1\geq 10$일 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값을 구하시오. [4점]

27. [그림 1]과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 높이가 2인 등변사다리꼴 모양의 종이를 접어  모양을 만들려고 한다. 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 선분 AD를 $1:3$으로 내분하는 점을 P, 선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 선분 PM과 선분 QM을 접는 선으로 하여 두 점 B, C가 선분 AD의 중점에 오도록 종이를 접으면 [그림 2]와 같이 두 점 A, D는 각각 점 A', D'으로 옮겨진다. 점 D'과 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{M}$ 사이의 거리를 d라 할 때, $50d^2$의 값을 구하시오. (단, 모든 점은 같은 평면 위에 있고, 종이의 두께는 무시한다.) [4점]



[그림 1]



[그림 2]

28. 등식

$$64^{\frac{1}{m}}=k\times 81^{\frac{1}{n}}$$

을 만족시키는 자연수 k가 존재하도록 하는 두 정수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

29. 어느 상점에서 두 원료 P, Q를 혼합하여 두 향수 A, B를 생산, 판매한다. 두 향수 A, B를 각각 1병씩 만드는 데 사용되는 두 원료 P, Q의 양은 다음 표와 같다.

향수	원료 P	원료 Q
A	50㎖	100㎖
B	100㎖	50㎖

원료 P의 구입 비용은 100㎖당 1만 원이고 원료 Q의 구입 비용은 100㎖당 2만 원이다. 한 달에 생산할 수 있는 두 향수 A, B의 병의 개수의 합이 최대 50이고, 한 달에 사용할 수 있는 두 원료 P, Q의 총 구입 비용은 최대 110만 원이다. 향수 A의 판매 가격은 1병당 a만 원이고, 향수 B의 판매 가격은 1병당 $\frac{9}{10}a$만 원이다. 이 상점에서 두 향수 A, B를 한 달 동안 판매한 금액의 합의 최댓값이 376만 원이 되기 위한 a의 값을 구하시오. [4점]

30. 모든 항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$과 1보다 큰 자연수 m에 대하여 다항식

$$P(x)=a_{m+1}x^m+a_mx^{m-1}+a_{m-1}x^{m-2}+\cdots+a_2x+a_1$$

이 있다.

$$P(1)=5P(-1)$$

을 만족시키는 다항식 $P(x)$에서 자연수 m의 값을 k라 하자. 다항식 $a_{k+1}x^k+a_kx^{k-1}+\cdots+a_2x+a_1$이 $x+2$로 나누어떨어질 때, $\frac{a_1}{a_{k+1}}$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.