2018학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[가형]

1	①	**2**	②	**3**	①	**4**	③	**5**	⑤
6	⑤	**7**	②	**8**	②	**9**	④	**10**	④
11	③	**12**	③	**13**	③	**14**	⑤	**15**	①
16	④	**17**	⑤	**18**	④	**19**	⑤	**20**	①
21	②	**22**	12	**23**	81	**24**	36	**25**	9
26	27	**27**	6	**28**	100	**29**	43	**30**	134

1. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$\sin\frac{3}{2}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$

2. [출제의도] 지수함수의 미분법 계산하기

$f'(x) = e^x + 1$이므로

$f'(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

3. [출제의도] 로그함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{4x} = \frac{1}{4}\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{4}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x) + \lim\limits_{x\to 1+}f(x) = -1 + 2 = 1$

5. [출제의도] 도함수의 활용 이해하기

$y' = -6x^2 + 5$이므로 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $-6\times 1^2 + 5 = -1$

6. [출제의도] 등비수열의 극한 이해하기

$a_n = a_1 \times 3^{n-1}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - 2}{3^{n+1} + 2a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1\times 3^{n-1} - 2}{3^{n+1} + 2a_1\times 3^{n-1}}$

분모, 분자를 3^{n-1}으로 나누면

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1 - \frac{2}{3^{n-1}}}{9 + 2a_1} = \frac{2}{5}$에서 $\frac{a_1}{9 + 2a_1} = \frac{2}{5}$

따라서 $a_1 = 18$

7. [출제의도] 정적분 이해하기

$\int_{-1}^{1}\left(4x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + a\right)dx$

$= 2\int_0^1 (x^2 + a)dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_0^1 = \frac{2}{3} + 2a$

$\frac{2}{3} + 2a = 2$이므로 $a = \frac{2}{3}$

8. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

주어진 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 함수 $y = a\cos\frac{\pi}{2b}x$의 그래프와 일치한다.

함수 $y = a\cos\frac{\pi}{2b}x$의 최댓값이 3,

최솟값이 -3이므로 $|a| = 3$

$a > 0$이므로 $a = 3$

주기가 4이므로 $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2b}\right|} = 4$에서 $|b| = 1$

$b > 0$이므로 $b = 1$

따라서 $a + b = 4$

9. [출제의도] 로그부등식 이해하기

진수조건에 의하여

$x - 2 > 0,\ 3x + 4 > 0$이므로 $x > 2$ … ㉠

$\log_2 4 + \log_2(x-2) < \log_2(3x+4)$

$\log_2 4(x-2) < \log_2(3x+4)$

$4x - 8 < 3x + 4$

$x < 12$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $2 < x < 12$

따라서 정수 x의 개수는 9

10. [출제의도] 부정적분 이해하기

$\frac{d}{dx}\int\{f(x) - x^2 + 4\}dx = f(x) - x^2 + 4$

$\int\frac{d}{dx}\{2f(x) - 3x + 1\}dx = 2f(x) - 3x + C$

(단, C는 적분상수)

$f(x) - x^2 + 4 = 2f(x) - 3x + C$에서

$f(x) = -x^2 + 3x + 4 - C$

$f(1) = -1 + 3 + 4 - C = 3$에서 $C = 3$이므로

$f(x) = -x^2 + 3x + 1$

따라서 $f(0) = 1$

11. [출제의도] 다항함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x = 2$에서 미분가능하다.

(ⅰ) $x = 2$에서 연속

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x) = \lim\limits_{x\to 2+}f(x) = f(2)$에서 $4a + b = 8$ … ㉠

(ⅱ) $x = 2$에서 미분가능

$\lim\limits_{x\to 2-}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2-}\frac{x^3 + ax^2 + b - 16}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x\to 2-}\frac{(x-2)\{x^2 + (a+2)x + (2a+4)\}}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x\to 2-}\{x^2 + (a+2)x + (2a+4)\}$

$= 4a + 12$

$\lim\limits_{x\to 2+}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2+}\frac{4x^2 - 16}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x\to 2+}\frac{4(x+2)(x-2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x\to 2+}4(x+2)$

$= 16$

$\lim\limits_{x\to 2-}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2+}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$에서

$4a + 12 = 16$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a = 1,\ b = 4$

따라서 $f(1) = 6$

12. [출제의도] 급수와 정적분의 관계 이해하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) = \frac{1}{2}\times\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1 + \frac{2k}{n}\right)$

$= \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$

$= \frac{1}{2}\left[x^3 - 2x^2 + 6x\right]_1^3 = 11$

13. [출제의도] 등비급수 이해하기

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r_1, 수열 $\{b_n\}$의 공비를 r_2라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \frac{1}{1 - r_1} = 4$이므로 $r_1 = \frac{3}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \frac{1}{1 - r_2} = 2$이므로 $r_2 = \frac{1}{2}$

$a_n b_n = \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n = \frac{1}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{8}{5}$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$v(t) = t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3)$

$t = 0$부터 $t = 4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4 |v(t)|dt$

$= \int_0^3(-t^2 + 2t + 3)dt + \int_3^4(t^2 - 2t - 3)dt$

$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t\right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t\right]_3^4 = \frac{34}{3}$

15. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

$\log_3 a = 1,\ \log_3 27 = b$이므로 $a = 3,\ b = 3$

함수 $y = \log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 함수 $y = \log_3(x - m)$의 그래프가

두 점 A, B의 중점의 좌표 $(15, 2)$를 지나므로

$\log_3(15 - m) = 2$

따라서 $m = 6$

16. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이므로

$2(1 - \sin^2 x) + (2 + \sqrt{3})\sin x - (2 + \sqrt{3}) = 0$

$2\sin^2 x - (2 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$

$(2\sin x - \sqrt{3})(\sin x - 1) = 0$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin x = 1$이므로

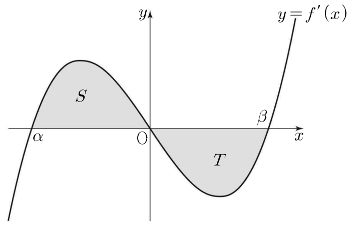
$0 \le x \le \pi$에서

$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{3}{2}\pi$

17. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $y = f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.
$f'(0) = 0$이고 $x = 0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극댓값을 갖는다. (참)



ㄴ. $\alpha = -\beta$에 의하여

$f'(x) = k(x - \beta)x(x + \beta) = kx^3 - k\beta^2 x\ (k > 0)$

$f(x) = \frac{k}{4}x^4 - \frac{k\beta^2}{2}x^2 + C$(단, C는 적분상수)

따라서 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로 $f(-\beta) = f(\beta)$

$S = \int_\alpha^0 |f'(x)|dx = \int_{-\beta}^0 f'(x)dx = f(0) - f(-\beta)$

$T = \int_0^\beta |f'(x)|dx = \int_0^\beta\{-f'(x)\}dx$

$= -f(\beta) + f(0)$

따라서 $S=T$ (참)

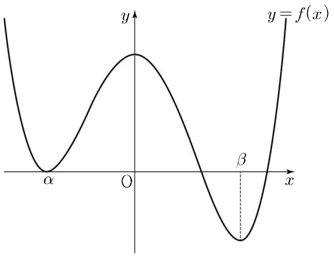
ㄷ. $S<T$, $f(\alpha)=0$이므로

$f(0)-f(\alpha)<-f(\beta)+f(0)$에서 $f(\beta)<0$

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극솟값,

$x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 양의 실근의 개수는 2 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$R(t,0)$이고, 점 $P(t,t^2)$에서의 접선 l의 방정식은

$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$

x절편은 $\frac{t}{2}$이므로 $Q\left(\frac{t}{2},0\right)$

$\overline{QR}=\frac{t}{2}$, $\overline{PR}=t^2$

따라서 삼각형 PQR의 넓이

$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{PR}=\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times t^2=\frac{1}{4}t^3$

$x>0$일 때, 두 곡선 $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$는

직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 점 P와 A는 각각 두 곡선 위의 점이고,

기울기가 -1인 직선 위에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $A(t^2,t)$

한 변의 길이가 $t-t^2$인 정사각형 PCAB의 넓이

$g(t)=(t-t^2)^2=t^4-2t^3+t^2$

따라서 $\lim\limits_{t\to0+}\frac{t\times g(t)}{f(t)}=\lim\limits_{t\to0+}\frac{t(t^4-2t^3+t^2)}{\frac{1}{4}t^3}=4$

19. [출제의도] 도함수의 성질을 활용하여 추론하기

함수 $f(x)$에서

$f'(x)=6kx^2-6(3k+1)x+18$

$=6(kx-1)(x-3)$

$=6k\left(x-\frac{1}{k}\right)(x-3)$

$\frac{1}{k}=3$인 경우 $f'(x)=2(x-3)^2\geq0$이므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 따라서

$k=\boxed{\frac{1}{3}}$인 경우를 제외하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로

(i) $0<k\leq\boxed{\frac{1}{3}}$일 때,

$0<x<3$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 닫힌 구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(3)=\boxed{-27k+25}$이다. 그러나

$\boxed{-27k+25}=12$를 만족하는 $k=\frac{13}{27}$이므로

$0<k\leq\boxed{\frac{1}{3}}$에 존재하지 않는다.

(ii) $k>\boxed{\frac{1}{3}}$일 때,

닫힌 구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{k}$에서 극대이면서

최대이다. $f\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{2}{k^2}-\frac{3(3k+1)}{k^2}+\frac{18}{k}-2=12$

$(7k-1)(2k-1)=0$에서 $k>\frac{1}{3}$이므로 $k=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,3]$에서 최댓값 12를 가질 때, $k=\boxed{\frac{1}{2}}$이다.

(가), (다)에 알맞은 수는 각각 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$

(나)에 알맞은 식은 $g(k)=-27k+25$

따라서 $\frac{g(a)}{b}=32$

20. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 BED와 삼각형 DEH는 닮음이므로

$\angle EBD=\angle EDH=\theta$

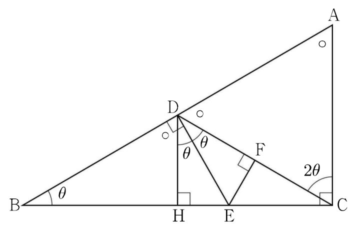
선분 AC와 선분 DH는 서로 평행하므로

$\angle ACD=\angle CDH=2\theta$

$\angle DAC=\angle CDA=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

삼각형 CAD는 $\overline{CA}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{AB}=4$이므로 $\overline{CA}=\overline{CD}=4\sin\theta$



삼각형 DHC에서

$\overline{DH}=\overline{CD}\cos2\theta=4\sin\theta\cos2\theta$

삼각형 DHE에서

$\overline{DE}=\frac{\overline{DH}}{\cos\theta}=4\tan\theta\cos2\theta$

점 E에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 F라 할 때,

$\overline{EF}=\overline{DE}\sin\theta$

삼각형 CDE의 넓이

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{EF}$

$=8\sin^2\theta\tan\theta\cos2\theta$

따라서 $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{8\sin^2\theta\tan\theta\cos2\theta}{\theta^3}$

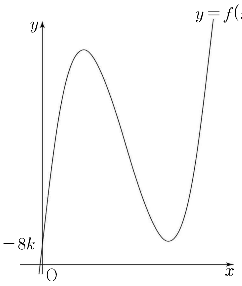
$=8\times\lim\limits_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)\times\cos2\theta\right\}$

$=8$

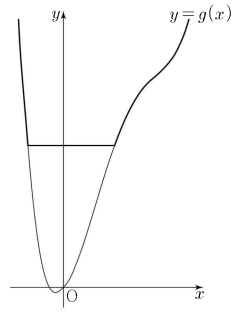
21. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖고, k의 값에 따른 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

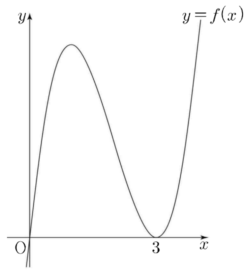
(i) $k<0$일 때



그림과 같이 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 a, b가 존재하지 않는다.



(ii) $k=0$일 때



그림과 같이 $b=3$일 때 $g'(3)=0$이므로

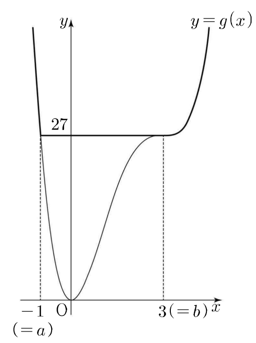
$g(3)=\int_0^3 f(x)dx=\left[x^4-8x^3+18x^2\right]_0^3=27=c$

$g(a)=27$에서

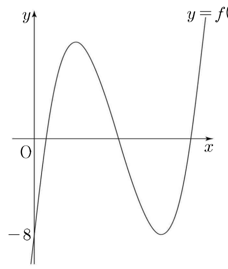
$a^4-8a^3+18a^2=27$, $(a+1)(a-3)^3=0$

$a=-1$

따라서 $a=-1$, $b=3$, $c=27$



(iii) $k=1$일 때



함수 $f(x)=4x^3-24x^2+36x-8$에서

$f(2-\sqrt{3})=f(2)=f(2+\sqrt{3})=0$이므로

그림과 같이 함수 $g(x)$는

$x=2-\sqrt{3}$, $x=2+\sqrt{3}$에서 극솟값 -1,

$x=2$에서 극댓값을 갖는다.

$g(2)=\int_0^2 f(x)dx=\left[x^4-8x^3+18x^2-8x\right]_0^2=8=c$

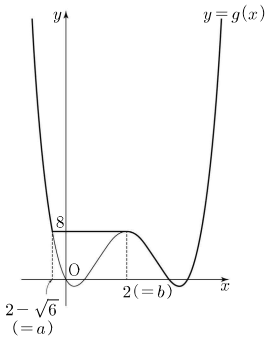
$g(x)=8$에서

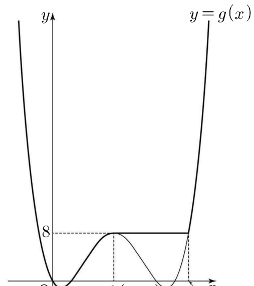
$x^4-8x^3+18x^2-8x=8$

$(x-2)^2(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})=0$

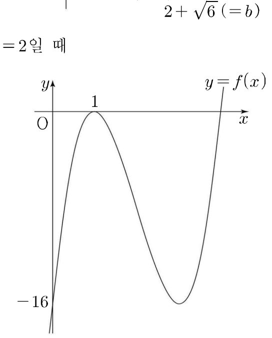
따라서 $a=2-\sqrt{6}$, $b=2$, $c=8$

또는 $a=2$, $b=2+\sqrt{6}$, $c=8$





(iv) $k=2$일 때



그림과 같이 $a=1$일 때, $g'(1)=0$이므로

$g(1)=\int_0^1 f(x)dx$

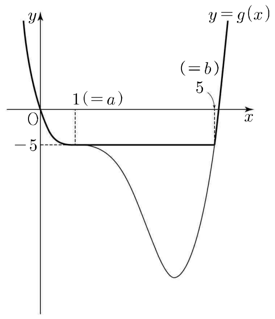
$=\left[x^4-8x^3+18x^2-16x\right]_0^1=-5=c$

$g(b)=-5$에서

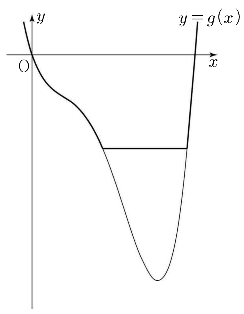
$b^4-8b^3+18b^2-16b=-5$, $(b-1)^3(b-5)=0$

$b=5$

따라서 $a=1$, $b=5$, $c=-5$



(v) $k\geq 3$일 때



(i)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족하는 a, b, c는 존재하지 않는다.

(i) ~ (v)에 의하여 조건을 만족하는 k, a, b, c의 합 $k+a+b+c$의 값은

각각 29, $13-\sqrt{6}$, $13+\sqrt{6}$, 3

따라서 $k+a+b+c$의 최솟값은 3

22. [출제의도] 부정적분 계산하기

$f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

(단, C는 적분상수)

이고 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(x)=x^2+x$이므로 $f(3)=3^2+3=12$

23. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$은 닫힌 구간 $[1, 5]$에서

감소하므로 최댓값은 $f(1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-5}=81$

24. [출제의도] 급수의 성질 이해하기

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{4}-9\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{4}-9\right)=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=36$

25. [출제의도] 삼각함수의 미분법 이해하기

$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+3h)-f(\pi)}{h}=3\times\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+3h)-f(\pi)}{3h}$

$=3f'(\pi)$

$f'(x)=-\sin x-3\cos x$이므로 $f'(\pi)=3$

따라서 $3f'(\pi)=9$

26. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\frac{1}{n}=h$라 하면, $n\to\infty$일 때, $h\to 0+$이다.

$$
\begin{aligned}
(\text{준식})&=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)g(1+3h)-f(1)g(1)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)g(1+3h)-f(1+h)g(1)}{h}\\
&\quad+\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)g(1)-f(1)g(1)}{h}\\
&=3\times\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)\{g(1+3h)-g(1)\}}{3h}\\
&\quad+\lim_{h\to 0+}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}g(1)}{h}\\
&=3f(1)g'(1)+f'(1)g(1)=27
\end{aligned}
$$

27. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

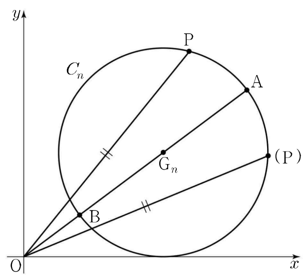
원 C_n은 x축에 접하는 원이므로 반지름의 길이는 $3n$이다. 원 C_n의 중심을 $G_n(4n, 3n)$이라 하면

$\overline{OG_n}=\sqrt{(4n)^2+(3n)^2}=5n$

그림과 같이 직선 OG_n과 원 C_n이 만나는 점을 각각 A, B라 하면 선분 OP의 길이는

$\overline{OB}\leq\overline{OP}\leq\overline{OA}$

$\overline{OA}=\overline{OG_n}+3n=8n$, $\overline{OB}=\overline{OG_n}-3n=2n$



$\overline{OP}=2n$ 또는 $\overline{OP}=8n$일 때 점 P의 개수는 각각 1개이고, $2n+1\leq\overline{OP}\leq 8n-1$일 때

선분 OP의 길이가 자연수인 점 P의 개수는 각각 2개이다.

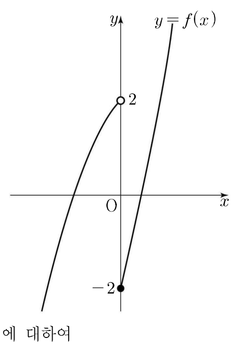
그러므로 구하는 점 P의 개수는

$2+2\times(6n-1)=12n$이므로 $a_n=12n$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\times\frac{12n(n+1)}{2}\right\}=6$

28. [출제의도] 함수의 극한 추론하기

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 불연속이고 그 개형은 그림과 같다.



함수 $h(t)$에 대하여

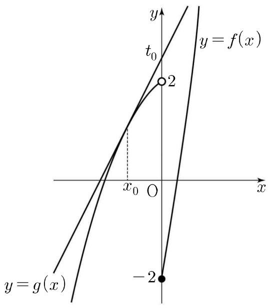
(i) $-2<t<2$일 때

k값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이므로 $h(t)=2$

(ii) $t \geq 2$일 때

$\lim\limits_{x \to 0-} f'(x)=3k$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 기울기가 2이므로

(a) $3k<2$이면 $f'(x_0)=2$인 $x=x_0(x_0<0)$가 존재한다.



즉, $x=x_0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접할 때 $t=t_0$이라 하면,

$t=2$에서 $h(t)=2$

$2<t<t_0$에서 $h(t)=3$

$t=t_0$에서 $h(t)=2$

$t>t_0$에서 $h(t)=1$

(b) $3k \geq 2$이면 $t \geq 2$에서 $h(t)=1$

(iii) $t \leq -2$일 때

$\lim\limits_{x \to 0+} f'(x)=\dfrac{4}{3k}$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 기울기가 2이므로

(a) $\dfrac{4}{3k}<2$이면 $f'(x_1)=2$인 $x=x_1(x_1>0)$가 존재한다.

즉, $x=x_1$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접할 때 $t=t_1$이라 하면,

$t_1<t \leq -2$ 에서 $h(t)=3$

$t=t_1$에서 $h(t)=2$

$t<t_1$에서 $h(t)=1$

(b) $\dfrac{4}{3k} \geq 2$이면

$t=-2$에서 $h(t)=2$

$t<-2$에서 $h(t)=1$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$k<\dfrac{2}{3}$일 때

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<-2) \\ 2 & (-2 \leq t \leq 2) \\ 3 & (2<t<t_0) \\ 2 & (t=t_0) \\ 1 & (t>t_0) \end{cases}$$

$k>\dfrac{2}{3}$일 때

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<t_1) \\ 2 & (t=t_1) \\ 3 & (t_1<t \leq -2) \\ 2 & (-2<t<2) \\ 1 & (t \geq 2) \end{cases}$$

$k=\dfrac{2}{3}$일 때

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<-2) \\ 2 & (-2 \leq t<2) \\ 1 & (t \geq 2) \end{cases}$$

그러므로 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속이 되는 실수 α의 개수가 2가 되도록 하는 $k=\dfrac{2}{3}$

따라서 $150k=100$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$이므로 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

$\tan 2\theta=\tan(\theta+\theta)=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{3}{4}$

$\angle\mathrm{CBA}=\alpha$라 하면 이등변삼각형 ABC에 의하여 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$이고, $\angle\mathrm{CBE}=\beta$라 하면

$\beta=\alpha-2\theta$이므로 $\tan\beta=\dfrac{\tan\alpha-\tan 2\theta}{1+\tan\alpha\tan 2\theta}=\dfrac{7}{24}$

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{FH}}}{\tan\beta}$, $\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{FH}}}{\tan\theta}$, $\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{CH}}=12$

$\overline{\mathrm{FH}}\left(\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)=12$에서 $\overline{\mathrm{FH}}=\dfrac{28}{15}$

따라서 $p=15$, $q=28$이므로 $p+q=43$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

$f'(x)=k(x+1)(x-1)=k(x^2-1)\,(k>0)$라 하면

$f(x)=\dfrac{k}{3}x^3-kx+C_0$(단, C_0은 적분상수)

함수 $f(x)$의 극대인 점 $(-1, f(-1))$과 극소인 점 $(1, f(1))$이 원 C 위에 있으므로 두 점은 원점에 대하여 대칭이다.

$f(-1)=-f(1)$, $C_0=0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

점 $(-1, f(-1))$이 원 C 위에 있으므로

$(-1)^2+y^2=n$, $y=\sqrt{n-1}$

$f(-1)=\dfrac{k}{3}(-1)^3-k\times(-1)=\dfrac{2}{3}k=\sqrt{n-1}$

이므로 $k=\dfrac{3}{2}\sqrt{n-1}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{n-1}(x^3-3x)$

원 C와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 영역 S_2와 영역 S_3 내부에 있는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 같다.

따라서 $g_2(n)=g_3(n)$

3보다 큰 자연수 n에 대하여 $x=-2$에서 원 C는 점 $(-2, \sqrt{n-4})$와 점 $(-2, -\sqrt{n-4})$를 지나고

$f(-2)=\dfrac{1}{2}\sqrt{n-1}(-8+6)=-\sqrt{n-1}$이므로

$-\sqrt{n-4}>-\sqrt{n-1}$

그러므로 점 $(-2, f(-2))$는 원 C 외부의 점이다.

(i) $n=4$일 때

영역 S_1에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 존재하지 않고, 영역 S_2에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-1$과 $x=0$ 위에 존재한다.

$g_1(4)=0$, $g_2(4)=3+1=4$

(ii) $5 \leq n \leq 9$일 때

영역 S_1에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-2$ 위에 존재하고, 영역 S_2에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-1$과 $x=0$ 위에 존재한다.

$g_1(5)=1$, $g_2(5)=3+2=5$

$n=6$, 7, 8에서 $g_1(n)=3$, $g_2(n)=5+2=7$

$g_1(9)=5$, $g_2(9)=5+2=7$

(iii) $10 \leq n \leq 16$일 때

영역 S_1에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-3$과 $x=-2$ 위에 존재하고, 영역 S_2에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-1$과 $x=0$ 위에 존재한다.

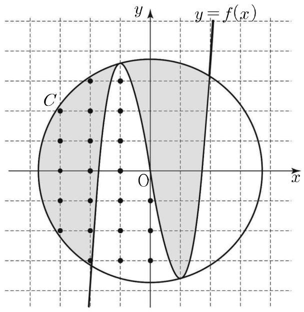
$g_1(10)=1+5=6$, $g_2(10)=5+3=8$

$n=11$, 12, 13에서

$g_1(n)=3+5=8$, $g_2(n)=7+3=10$

$n=14$, 15, 16에서

$g_1(n)=5+7=12$, $g_2(n)=7+3=10$



(i), (ii), (iii)에 의하여 $g_1(n)>g_3(n)$을 만족하는 자연수 n의 최솟값은 14

따라서

$a+\{g_1(a)\times g_3(a)\}=14+\{g_1(14)\times g_3(14)\}=134$