2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ③	02. ①	03. ③	04. ⑤	05. ④
06. ④	07. ②	08. ②	09. ⑤	10. ⑤
11. ①	12. ②	13. ④	14. ③	15. ②
16. ④	17. ⑤	18. ③	19. ①	20. ③
21. ②	22. 210	23. 4	24. 3	25. 20
26. 8	27. 25	28. 28	29. 10	30. 200

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 지수를 포함한 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3$$

정답 ③

2. **출제의도** : 집합의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1,\ 2,\ 3\} \cap \{1,\ 3,\ 5\} \\ &= \{1,\ 3\} \end{aligned}$$

따라서 집합 $A \cap B$의 모든 원소의 합은

$1+3=4$

정답 ①

3. **출제의도** : 역함수의 성질을 이용하여 함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(3)=4$이므로 $f^{-1}(4)=3$

정답 ③

4. **출제의도** : 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{4\times 3^{n+1}+1}{3^n} &= \lim_{n\to\infty}\left\{4\times 3+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &= 12+0 \\ &= 12 \end{aligned}$$

정답 ⑤

5. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to 0$일 때, $f(x)\to 0$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$

또, $x\to 1+$일 때, $f(x)\to 2$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=2$

따라서

$\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=0+2=2$

정답 ④

6. **출제의도** : 원순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

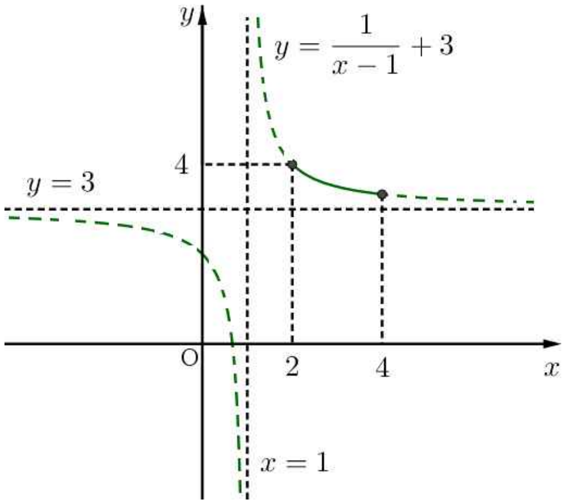
$(5-1)!=4!=24$

정답 ④

7. **출제의도** : 주어진 구간에서 유리함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=\frac{1}{x-1}+3$의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$이므로 닫힌 구간 $[2,\ 4]$에서 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



닫힌 구간 $[2,\ 4]$에서 함수 $y=\frac{1}{x-1}+3$은 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값은

$$y=\frac{1}{2-1}+3=4$$

정답 ②

8. **출제의도** : 정적분으로 표현된 함수를 미분할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=(x-2)(x-3)$이므로

$f'(4)=(4-2)(4-3)=2\times1=2$

정답 ②

9. **출제의도** : 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq4,\ x$는 실수$\}$,

$Q=\{x\,|\,-2\le x\le4\}$

① $P\not\subset Q$이므로 명제 $p\to q$는 거짓이다.

② 두 조건 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이다. 이때,

$P^C=\{x\,|\,x=-2$ 또는 $x=4\}$,

$Q^C=\{x\,|\,x<-2$ 또는 $x>4\}$

이므로 $P^C\not\subset Q^C$이다.

따라서 명제 $\sim p\to\sim q$는 거짓이다.

③ $Q=\{x\,|\,-2\le x\le4\}$,

$P^C=\{x\,|\,x=-2$ 또는 $x=4\}$

이므로 $Q\not\subset P^C$ 이다.

따라서 명제 $q\to\sim p$는 거짓이다.

④ $Q=\{x\,|\,-2\le x\le4\}$,

$P=\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq4,\ x$는 실수$\}$

이므로 $Q\not\subset P$ 이다.

따라서 명제 $q\to p$는 거짓이다.

⑤ $P^C=\{x\,|\,x=-2$ 또는 $x=4\}$,

$Q=\{x\,|\,-2\le x\le4\}$

이므로 $P^C\subset Q$ 이다.

따라서 명제 $\sim p\to q$는 참이다.

정답 ⑤

10. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

임의로 선택한 한 개의 공이 검은색일 사건을 A, 공에 적혀 있는 수가 짝수일 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{9}{14}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{14}$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{4}{14}}{\frac{9}{14}}=\frac{4}{9}$$

정답 ⑤

11. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_n+b_n=10$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)+b_k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(10+b_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}10+\sum_{k=1}^{10}b_k$$

$$=100+\sum_{k=1}^{10}b_k$$

이때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=160$이므로

$$100+\sum_{k=1}^{10}b_k=160$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}b_k=60$$

정답 ①

12. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 다항함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 다항함수 $f(x)$는

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a,b는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $x\to0$일 때

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 하므로

$$\lim_{x\to0}(2x^2+ax+b)=b=0$$

이때,

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(2x+a)=a=3$$

이므로

$f(x)=2x^2+3x$

따라서

$f(2)=2\times2^2+3\times2=14$

정답 ②

13. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$ab=\log_3 5$, $b-a=\log_2 5$

이므로

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{\log_2 5}{\log_3 5}$$

$$=\frac{\frac{\log 5}{\log 2}}{\frac{\log 5}{\log 3}}$$

$$=\frac{\log 3}{\log 2}$$

$$=\log_2 3$$

정답 ④

14. **출제의도** : 정규분포를 따르는 확률변수에서 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(m \le X \le m+12) - \mathrm{P}(X \le m-12)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma} \le Z \le \frac{m+12-m}{\sigma}\right) - \mathrm{P}\left(Z \le \frac{m-12-m}{\sigma}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) - \mathrm{P}\left(Z \le \frac{-12}{\sigma}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) - \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{12}{\sigma}\right)$$
$$= 0.3664 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

한편

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) + \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{12}{\sigma}\right) = 0.5 \cdots\cdots ㉡$$

㉠,㉡에서

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) = 0.4332$$

이므로

$$\frac{12}{\sigma} = 1.5$$

따라서

$$\sigma = \frac{12}{1.5} = 8$$

정답 ③

15. **출제의도** : 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

양 끝 모두에는 A가 적힌 카드가 나와야 하므로 A, B, B, C가 적혀 있는 4장의 카드를 A, A가 적혀 있는 2장의 카드 사이에 나열해야 한다. 이때 카드를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

정답 ②

16. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$$ {}_3\mathrm{H}_{10} = {}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = \frac{12 \times 11}{2} = 66$$

이때, $y+z=0$인 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $(10,\ 0,\ 0)$의 1이고,
$y+z=10$인 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$$ {}_2\mathrm{H}_{10} = {}_{2+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{11}\mathrm{C}_{10} = {}_{11}\mathrm{C}_1 = 11$$

즉, 11이므로 구하고자 하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$66-1-11=54$

정답 ④

17. 출제의도 : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x<0$일 때,

$g(x)=-f(x)+x^2+4$

$x>0$일 때,

$g(x)=f(x)-x^2-2x-8$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$$

이다. 이때,

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\{-f(x)+x^2+4\}$$
$$=-f(0)+4$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}\{f(x)-x^2-2x-8\}$$
$$=f(0)-8$$

이므로

$\lim_{x\to 0-}g(x)-\lim_{x\to 0+}g(x)=6$에서

$\{-f(0)+4\}-\{f(0)-8\}=6$

따라서

$f(0)=3$

정답 ⑤

18. 출제의도 : 무한히 반복되는 도형에서 규칙을 찾아 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 정삼각형의 높이

$\overline{A_1D_1}=2+1=3$

이므로 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3$ 즉, $a=2\sqrt{3}$

따라서

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left\{4\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2\right\}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{1}{3}(4\pi-3\sqrt{3})=\frac{4}{3}\pi$$

또한, 삼각형 $A_1B_1D_1$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{r}{2}(2\sqrt{3}+\sqrt{3}+3)=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}$$

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

따라서 닮음비가

$$2:\frac{3-\sqrt{3}}{2}=1:\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{12-6\sqrt{3}}{16}}$$
$$=\frac{32\pi}{9\sqrt{3}+6}$$
$$=\frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$$

정답 ③

19. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=a_2=1$이고

모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$

이므로

$a_3=(a_2)^2-(a_1)^2=1^2-1^2=0$

$a_4=(a_3)^2-(a_2)^2=0^2-1^2=-1$

$a_5=(a_4)^2-(a_3)^2=(-1)^2-0^2=1$

$a_6=(a_5)^2-(a_4)^2=1^2-(-1)^2=0$

$a_7=(a_6)^2-(a_5)^2=0^2-1^2=-1$

$\vdots$

이므로

수열 $\{a_n\}$은

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0,\ a_4=-1$

$a_{n+3}=a_n (n \geq 2)$

이다.

한편

$b_{n+1}=a_n-b_n+n$

이므로

$b_2=a_1-b_1+1=1-k+1=2-k$

$b_3=a_2-b_2+2=1-(2-k)+2=1+k$

$b_4=a_3-b_3+3=0-(1+k)+3=2-k$

$b_5=a_4-b_4+4=-1-(2-k)+4=1+k$

$b_6=a_5-b_5+5=1-(1+k)+5=5-k$

$b_7=a_6-b_6+6=0-(5-k)+6=1+k$

$b_8=a_7-b_7+7=-1-(1+k)+7=5-k$

$b_9=a_8-b_8+8=1-(5-k)+8=4+k$

$b_{10}=a_9-b_9+9=0-(4+k)+9=5-k$

$b_{11}=a_{10}-b_{10}+10=-1-(5-k)+10=4+k$

$b_{12}=a_{11}-b_{11}+11=1-(4+k)+11=8-k$

$b_{13}=a_{12}-b_{12}+12=0-(8-k)+12=4+k$

$b_{14}=a_{13}-b_{13}+13=-1-(4+k)+13=8-k$

$b_{15}=a_{14}-b_{14}+14=1-(8-k)+14=7+k$

$b_{16}=a_{15}-b_{15}+15=0-(7+k)+15=8-k$

$b_{17}=a_{16}-b_{16}+16=-1-(8-k)+16=7+k$

$b_{18}=a_{17}-b_{17}+17=1-(7+k)+17=11-k$

$b_{19}=a_{18}-b_{18}+18=0-(11-k)+18=7+k$

$b_{20}=a_{19}-b_{19}+19=-1-(7+k)+19=11-k$

이때, $b_{20}=14$이므로

$11-k=14$

따라서 $k=-3$

정답 ①

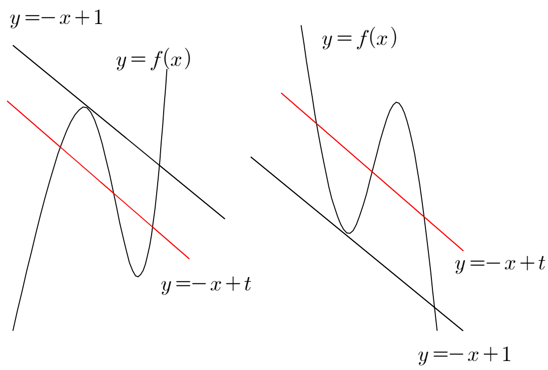
20. **출제의도** : 삼차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 곡선 $f(x)=x^3$과 직선 $y=-x+t$는 한 점에서 만나므로 $g(t)=1$이다.

따라서, 함수 $g(t)$는 상수함수이다. (참)

ㄴ. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의 교점의 개수가 2개인 경우는 다음 그림과 같은 경우이다.



따라서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+t$가 세 점에서 만나도록 하

는 실수 t가 존재한다. (참)

ㄷ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$(a>0,\ b,\ c,\ d$는 상수)라 하자.

함수 $g(t)$가 상수함수이면 방정식

$ax^3+bx^2+cx+d=-x+t$

의 실근이 1개가 존재해야 한다.

즉, 방정식 $ax^3+bx^2+(c+1)x+d=t$에서 함수 $y=ax^3+bx^2+(c+1)x+d$의 그래프와 직선 $y=t$가 단 한 점에서 만나야 한다.

즉, 함수 $y=ax^3+bx^2+(c+1)x+d$가 극값이 존재하지 않아야 하므로

$y'=3ax^2+2bx+c+1$

에서 방정식 $3ax^2+2bx+c+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=b^2-3a(c+1)=b^2-3ac-3a\le 0$$

이다.

한편, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서

방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=b^2-3ac$$

그런데, $a=2,\ b=3,\ c=1$이면

$$\frac{D_1}{4}=3^2-3\times2\times1-3\times2=-3\le 0$$

을 만족시키지만

$$\frac{D_2}{4}=b^2-3ac=3^2-3\times2\times1=3>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

정답 ③

21. **출제의도** : 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 역함수가 존재하기 위한 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i)$b=0$일 때,

$-1\le x<1$이면

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(0)=0$

이므로 합성함수 $g\circ f$는 일대일대응이 아니므로 합성함수 $g\circ f$의 역함수는 존재하지 않는다.

(ii) $b>0$일 때,

$(g\circ f)(x)=b$를 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖지 않는다.

(iii) $b<0$일 때,

$x<-1$일 때, $f(x)<-1+a$

$-1\le x<1$일 때, $b<f(x)\le -b$

$x\ge 1$일 때, $f(x)\ge 1+c$

이때, $b<-1$이면 합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖지 않는다.

따라서 $-1\le b<0$일 때, 합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는지 알아보자.

$f(-1)=-b,\ \lim_{x\to 1-}f(x)=b$이므로

$x<-1$일 때

$g(x)=-x-2=-b$에서

$x=b-2$

$x\ge 1$일 때,

$g(x)=-x+2=b$에서

$x=-b+2$

따라서 합성함수 $g\circ f$가 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 가지려면

$\lim_{x\to -1-}f(x)=b-2,\ f(1)=-b+2$

이어야 한다.

$\lim_{x \to -1-} f(x) = b-2$에서

$-1+a=b-2,\ a=b-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(1) = -b+2$에서

$1+c=-b+2, c=-b+1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a+b+2c$
$=(b-1)+b+2(-b+1)$
$=1$

정답 ②

22. **출제의도** : 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_7\mathrm{P}_3 = 7\times6\times5 = 210$

정답 210

23. **출제의도** : 다항함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 3x^2 - 2x$에서

$f'(x) = 6x-2$

따라서

$f'(1) = 6\times1-2 = 4$

정답 4

24. **출제의도** : 무리함수의 그래프를 평행이동할 수 있는가?

정답풀이 :

$y = 2\sqrt{x}+k$의 그래프가 점 (1, 5)를 지나므로

$5 = 2\sqrt{1}+k$

따라서

$k=3$

정답 3

25. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 첫째항과 공차를 모두 a라 하자.

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n = a+(n-1)a = an$

이다.

이때, $a_2 + a_4 = 24$에서

$2a+4a=24$
$a=4$

따라서 $a_n = 4n$이므로

$a_5 = 4\times5 = 20$

정답 20

26. **출제의도** : 곡선과 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y = 6x(x-2)$이므로 구하고자 하는 넓이는

$\int_0^2 (-6x^2+12x)dx$

$= \left[-2x^3+6x^2\right]_0^2$

$=-16+24$

$=8$

정답 8

27. **출제의도** : 표본평균에 대한 확률을 구할 수 있는가?

정답 25

정답풀이 :

$\mathrm{E}(\overline{X})=8,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{(1.2)^2}{n}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(8,\ \left(\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-8}{\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때,

$\mathrm{P}\left(7.76 \le \overline{X} \le 8.24\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{7.76-8}{\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}} \le Z \le \dfrac{8.24-8}{\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{5} \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)$

이므로

$\mathrm{P}\left(7.76 \le \overline{X} \le 8.24\right) \ge 0.6826$에서

$2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.6826$

즉, $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.3413$

한편

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$

이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{5} \ge 1$, 즉 $n \ge 25$이어야 한다.

따라서 구하는 n의 최솟값은 25이다.

28. **출제의도** : 이산확률변수에서 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{5} k\mathrm{P}(X=k)=4$

$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{5} k\mathrm{P}(Y=k)$

$=\sum_{k=1}^{5} k\left\{\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\dfrac{1}{10}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{5} k\mathrm{P}(X=k)+\dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{5} k$

$=\dfrac{1}{2}\times 4+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{5\times 6}{2}$

$=2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}$

따라서 $a=\dfrac{7}{2}$이므로

$8a=8\times\dfrac{7}{2}=28$

정답 28

29. **출제의도** : 다항함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 함수를 구한 후, 미분계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

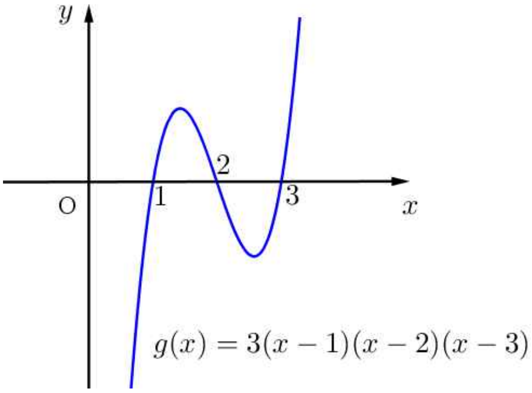
$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서

삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, 함수 $f(x)g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $\dfrac{1}{3}$이다.

(i) 다항식 $g(x)$가 서로 다른 세 개의 일차식을 인수로 가질 때,

$g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$

이므로 함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

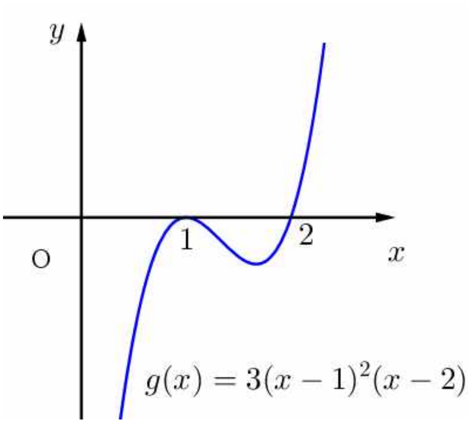
(ii) 다항식 $g(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가질 때,

$g(x)=3(x-1)^2(x-2)$

또는 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$

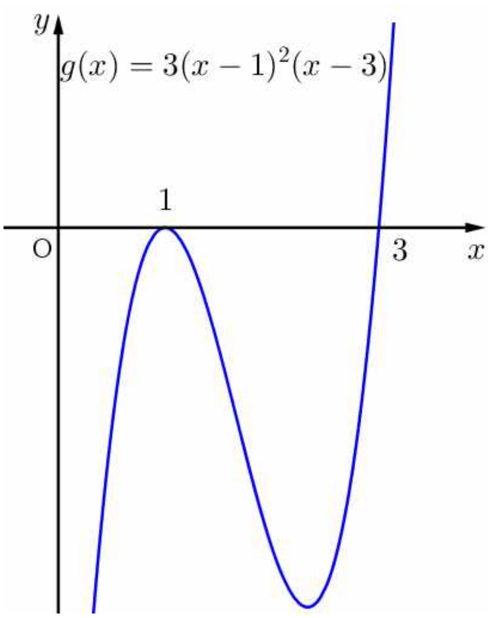
이다.

함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-2)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-2)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

또, 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g'(x)=6(x-1)(x-3)+3(x-1)^2$

$\quad\;\;=3(x-1)(3x-7)$

$g'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{7}{3}$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=\dfrac{7}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) 다항식 $g(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가질 때,

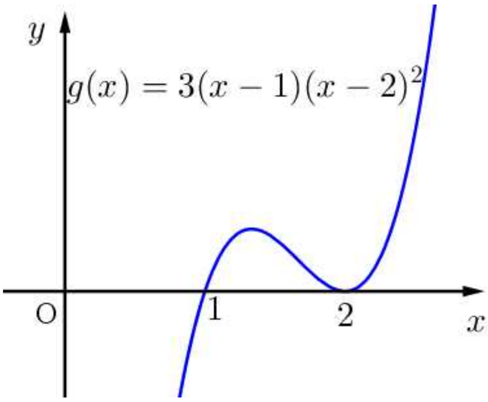
$g(x)=3(x-1)(x-2)^2$

또는

$g(x)=3(x-1)(x-3)^2$

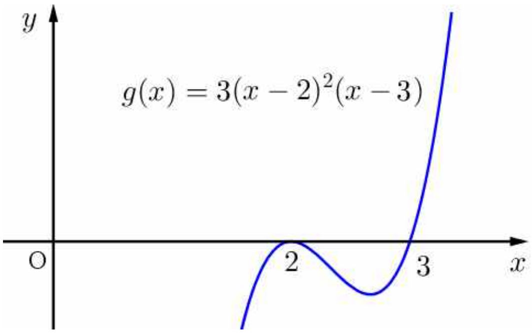
이다.

함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$은 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

한편, 함수 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$은 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iv) 다항식 $g(x)$가 $(x-3)^2$을 인수로 가질 때,

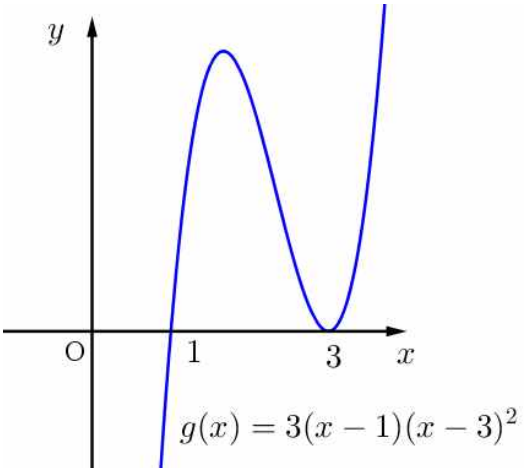
$g(x)=3(x-1)(x-3)^2$

또는

$g(x)=3(x-2)(x-3)^2$

이다.

함수 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g'(x)=3(x-3)^2+6(x-1)(x-3)$

$\quad=3(x-3)(3x-5)$

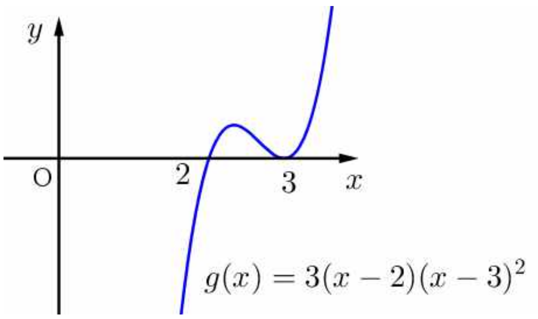
$g'(x)=0$에서

$x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$는 $x=\frac{5}{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

또, 함수 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서

$g(x)=3(x-2)^2(x-3)$이므로

$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$이다.

이때,

$$f'(x)=\frac{1}{3}\{2(x-1)(x-3)+(x-1)^2\}$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)(3x-7)$$

이므로

$$f'(0)=\frac{1}{3}\times(-1)\times(-7)=\frac{7}{3}$$

따라서 $p=3,\ q=7$이므로

$p+q=10$

정답 10

30. **출제의도** : 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 최소가 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x-a)=\begin{cases}0 & (x\le a)\\ x-a & (x>a)\end{cases}$$

$$f(x-b)=\begin{cases}0 & (x\le b)\\ x-b & (x>b)\end{cases}$$

$$f(x-2)=\begin{cases}0 & (x\le 2)\\ x-2 & (x>2)\end{cases}$$

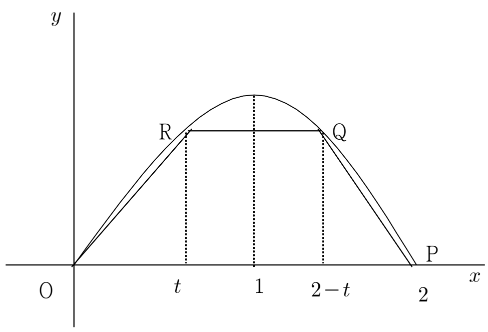
이므로 $0\le x\le 2$에서

$$h(x)=\begin{cases}kx & (0\le x\le a)\\ ak & (a<x\le b)\\ k(-x+a+b) & (b<x\le 2)\end{cases}$$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$0\le h(x)\le g(x)$ 이고

$\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$ 의 값이 최소가 되기 위해서는 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



따라서 $R(t,\ t(2-t))$(단, $0<t<1$)이라 하면

$Q(2-t,\ t(2-t))$이고

사다리꼴 OPQR의 넓이 $S(t)$가 최대가 되어야 하므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\{2+(2-2t)\}\times t(2-t)$$

$$=t^3-4t^2+4t$$

$$S'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$$

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최댓값을 가지고 그때

$$\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$$

의 값은 최솟값을 가지므로

$$k=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{3},\quad a=\frac{2}{3},\quad b=\frac{4}{3}$$

따라서

$$60(k+a+b)=60\times\frac{10}{3}=200$$

정답 200

■ 9월 모평 이후 스타강사의 30일 마무리 전략!

■ 9월 모의평가 이후 내가 필요한 강좌만 골라 듣는다 !

■ 고퀄의 문항으로 마지막 실전 능력을 폭발시켜라!

2018학년도 수능