2017학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'나'형 정답

1	④	2	③	3	⑤	4	①	5	④
6	②	7	③	8	①	9	⑤	10	④
11	②	12	①	13	③	14	②	15	⑤
16	④	17	②	18	①	19	⑤	20	③
21	②	22	29	23	7	24	65	25	81
26	125	27	45	28	16	29	80	30	160

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

두 다항식 $A=3x^2-xy,\ B=xy+2y^2$에서

$$\begin{aligned}A+B&=(3x^2-xy)+(xy+2y^2)\\&=3x^2-xy+xy+2y^2\\&=3x^2+2y^2\end{aligned}$$

2. [출제의도] 선분의 중점의 좌표를 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$, $\mathrm{B}(-3,\ 2)$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{3+(-3)}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)$이므로 $(0,\ 3)$이다.

따라서 중점의 y좌표는 3이다.

3. [출제의도] 이차방정식의 두 근의 곱을 구한다.

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 곱은 $\dfrac{2}{1}=2$이다.

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근은

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times2}}{2\times1}\\&=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}\end{aligned}$$

따라서 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{7}i}{2}&=\frac{(1+\sqrt{7}i)(1-\sqrt{7}i)}{4}\\&=\frac{1-7i^2}{4}\\&=\frac{1+7}{4}\\&=2\end{aligned}$$

4. [출제의도] 복소수의 덧셈과 곱셈을 계산한다.

$$\begin{aligned}(2+i)(1+i)&=2+2i+i+i^2\\&=2+2i+i-1\\&=1+3i\end{aligned}$$

5. [출제의도] 무리함수의 역함수를 이용하여 상수의 값을 구한다.

$f^{-1}(10)=3$에서 $f(3)=10$

$$\begin{aligned}f(3)&=a\sqrt{3+1}+2\\&=2a+2\\&=10\end{aligned}$$

따라서 $a=4$

6. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$$\begin{aligned}\log_2\frac{1}{3}\times\log_3\frac{1}{4}&=\log_2 3^{-1}\times\log_3 2^{-2}\\&=(-\log_2 3)\times(-2\log_3 2)\\&=2\times\log_2 3\times\log_3 2\\&=2\times\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}\\&=2\end{aligned}$$

7. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 원소의 합을 구한다.

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에서

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$A\cap B=\{2,\ 6\}$이므로

$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A\cap B)&=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}-\{2,\ 6\}\\&=\{1,\ 3,\ 4,\ 8\}\end{aligned}$$

따라서 모든 원소의 합은

$1+3+4+8=16$

8. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 상수의 값을 구한다.

나머지정리에 의해 다항식 x^2+ax+4를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $a+5$

다항식 x^2+ax+4를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $2a+8$

$a+5=2a+8$

$a=-3$

9. [출제의도] 실생활의 소재를 활용하여 집합의 원소의 개수를 구한다.

등 번호가 2의 배수인 선수의 집합을 A,

등 번호가 3의 배수인 선수의 집합을 B라 하자.

등 번호가 2의 배수 또는 3의 배수인 선수가 25명이므로

$n(A\cup B)=25$

등 번호가 2의 배수인 선수의 수와 등 번호가 3의 배수인 선수의 수가 같으므로

$n(A)=n(B)$

등 번호가 6의 배수인 선수가 3명이고 6의 배수는 2의 배수이면서 동시에 3의 배수인 수이므로

$n(A\cap B)=3$

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=n(A)+n(A)-n(A\cap B)\\&=2\times n(A)-n(A\cap B)\end{aligned}$$

$25=2\times n(A)-3$

$n(A)=14$

따라서 등 번호가 2의 배수인 선수의 수는 14이다.

10. [출제의도] 등차수열의 일반항을 이용하여 첫째항을 구한다.

첫째항이 a이고 공차가 -2인 등차수열에서

$a_2=a-2$, $a_3=a-4$, $a_4=a-6$이므로

주어진 식은

$(a-2+a-6)^2=16(a-4)$

$(2a-8)^2=16(a-4)$

$a^2-12a+32=0$

$(a-4)(a-8)=0$

$a=4$ 또는 $a=8$

$a=4$일 때 $a_3=4+2\times(-2)=0$이고

$a=8$일 때 $a_3=8+2\times(-2)=4$

$a_3\neq0$이므로 $a_3=4$

따라서 a의 값은 8이다.

[다른 풀이]

$a_2+a_4=2a_3$이므로 주어진 식은

${4a_3}^2=16a_3$

${a_3}^2-4a_3=0$

$a_3(a_3-4)=0$

$a_3\neq0$이므로 $a_3=4$

$a_3=a+2\times(-2)=4$

따라서 a의 값은 8이다.

11. [출제의도] 연립방정식이 해를 갖도록 하는 실수의 값을 구한다.

$x+y=k$에서 $y=-x+k$이고

이 식을 $xy+2x-1=0$에 대입하면

$x(-x+k)+2x-1=0$

$-x^2+kx+2x-1=0$

$x^2-(k+2)x+1=0$이 중근을 가져야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}D&=\{-(k+2)\}^2-4\\&=k^2+4k+4-4\\&=k^2+4k\\&=k(k+4)\\&=0\end{aligned}$$

에서 $k=0$ 또는 $k=-4$이다.

따라서 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은 -4이다.

12. [출제의도] 인수분해를 이용하여 복잡한 계산을 간단히 한다.

218을 n이라 하면

$$\begin{aligned}218^3+1&=n^3+1\\&=(n+1)(n^2-n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}217^3-1&=(n-1)^3-1\\&=\{(n-1)-1\}\{(n-1)^2+(n-1)+1\}\\&=(n-2)(n^2-n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{218^3+1}{217^3-1}&=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-2)(n^2-n+1)}\\&=\frac{n+1}{n-2}\\&=\frac{218+1}{218-2}\\&=\frac{219}{216}\\&=\frac{73}{72}\end{aligned}$$

[다른 풀이]

217을 n이라 하면

$$\begin{aligned}218^3+1&=(n+1)^3+1\\&=\{(n+1)+1\}\{(n+1)^2-(n+1)+1\}\\&=(n+2)(n^2+n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}217^3-1&=n^3-1\\&=(n-1)(n^2+n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{218^3+1}{217^3-1}&=\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)}\\&=\frac{n+2}{n-1}\\&=\frac{217+2}{217-1}\\&=\frac{219}{216}\\&=\frac{73}{72}\end{aligned}$$

13. [출제의도] 이차부등식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

라면 한 그릇의 가격을 $100x$(원)만큼 내리면 라면 한 그릇의 가격은 $2000-100x$(원)이고 라면 판매량은 $20x$(그릇)이 늘어나므로 하루 라면 판매량은 $200+20x$(그릇)이다.

하루의 라면 판매액의 합계가 442000원 이상이 되려면

$(2000-100x)(200+20x)\geq442000$

$2000x^2-20000x+42000\leq0$

$x^2-10x+21\leq0$

$(x-3)(x-7)\leq0$

$3 \le x \le 7$
따라서 라면 한 그릇의 가격의 최댓값은
$x=3$일 때 1700원이다.

14. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구한다.

직육면체의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라 하면
입체도형의 겉넓이가 236이므로
$2(ab+bc+ca)=236$
입체도형의 모든 모서리의 길이의 합이 82이므로
$4(a+b+c)+6=82$
$a+b+c=19$
직육면체의 대각선의 길이를 l이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ &= \sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)} \\ &= \sqrt{19^2-236} \\ &= \sqrt{125} \\ &= 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

15. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

$f(a)$, $f(b)$, $f(12)$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$f(a)=\frac{k}{a}$, $f(b)=\frac{k}{b}$, $f(12)=\frac{k}{12}$에서
$\frac{k}{a}\times\frac{k}{12}=\left(\frac{k}{b}\right)^2$이므로
$b^2=12a$
a는 12보다 작은 자연수이고 $12a$는 제곱수이므로 $a=3$이다.
$b^2=12\times3=36$에서
$b=6$
또, $f(a)=\frac{k}{a}=3$에서
$k=9$
따라서 $a+b+k=3+6+9=18$

[다른 풀이]

$\frac{k}{a}$, $\frac{k}{b}$, $\frac{k}{12}$가 이 순서대로 등비수열을 이루면
a, b, 12도 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$b^2=12a$
a는 12보다 작은 자연수이고 $12a$는 제곱수이므로 $a=3$이다.
$b^2=12\times3=36$에서
$b=6$
또, $f(a)=\frac{k}{a}=3$에서
$k=9$
따라서 $a+b+k=3+6+9=18$

16. [출제의도] 거듭제곱근의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

(가)에서 $\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k$라 하면
$a=k^3$, $b=k^2$, $c=k^4$이다.
이를 (나)에 대입하면

$$\begin{aligned} \log_8 a+\log_4 b+\log_2 c &= \log_8 k^3+\log_4 k^2+\log_2 k^4 \\ &= \log_2 k+\log_2 k+4\log_2 k \\ &= 6\log_2 k \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\log_2 k=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \log_2 abc &= \log_2\left(k^3\times k^2\times k^4\right) \\ &= \log_2 k^9 \\ &= 9\log_2 k \\ &= 9\times\frac{1}{3}=3 \end{aligned}$$

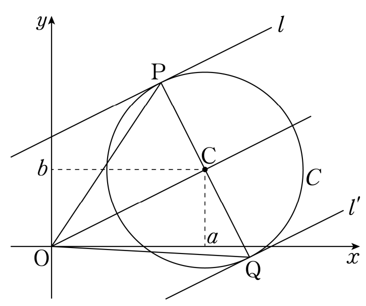
17. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명한다.

(ⅰ) $n=1$일 때,
$3^2+1=2\times5$이므로 $f(3^2+1)=1$이다.
따라서 $n=1$일 때 (*)이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면
$f(3^{2k}+1)=1$
음이 아닌 정수 m과 홀수 p에 대하여
$3^{2k}+1=2^m\times p$
로 나타낼 수 있으므로
$3^{2k}+1=\boxed{2}\times p$
이다.

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)}+1 &= 9\times3^{2k}+1=9(2p-1)+1 \\ &= 2\times\left(\boxed{9p-4}\right) \end{aligned}$$

이고, p는 홀수이므로 $\boxed{9p-4}$도 홀수이다.
따라서 $f(3^{2(k+1)}+1)=1$이다.
그러므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
$f(3^{2n}+1)=1$이다.
따라서 $a=2$, $g(p)=9p-4$이므로
$a+g(11)=2+(9\times11-4)=97$

18. [출제의도] 원과 직선의 성질을 이용하여 원의 중심의 좌표를 구한다.



평행한 두 직선 l, l'이 원 C의 접선이므로 선분 PQ는 원 C의 지름이고 원 C의 중심인 점 C(a, b)는 선분 PQ의 중점이다.
삼각형 POQ가 정삼각형이므로 직선 OC가 선분 PQ를 수직이등분한다.
그러므로 직선 OC는 직선 l과 평행하다.
직선 OC의 방정식은 $x-2y=0$이므로
$a-2b=0$ …… ㉠
원점 O와 직선 $l: x-2y+5=0$ 사이의 거리
$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$
가 원 C의 반지름의 길이이다.
삼각형 POQ가 정삼각형이므로 선분 OC의 길이는 원 C의 반지름의 길이의 $\sqrt{3}$배이다.
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$
$a^2+b^2=15$ …… ㉡
a, b는 양수이고, ㉠, ㉡에 의하여
$a=2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}$에서 $a+b=3\sqrt{3}$

19. [출제의도] 유리함수의 그래프의 성질과 도형의 이동을 이용하여 식의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+b}{x-a} \\ &= \frac{2(x-a)+2a+b}{x-a} \\ &= \frac{2a+b}{x-a}+2 \end{aligned}$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 2)$이다.
이때, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(2, a)$와 같다.
(가)에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로
함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a+4, -2)$이다.
점 $(2, a)$와 점 $(a+4, -2)$가 같으므로
$a=-2$
함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{2a+b}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프와 일치하므로 (나)에서
$2a+b=3$
$b=7$
따라서 $a+b=-2+7=5$

[다른 풀이]

$y=\frac{2x+b}{x-a}$에서
$(x-a)y=2x+b$
$xy-ay=2x+b$
$(y-2)x=ay+b$
$x=\frac{ay+b}{y-2}$
x와 y를 서로 바꾸면
$f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{x-2}$
(가)에 의해

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{x-2} &= \frac{2(x-4)+b}{(x-4)-a}-4 \\ &= \frac{2(x-4)+b}{(x-4)-a}-\frac{4(x-4-a)}{(x-4)-a} \\ &= \frac{-2x+4a+8+b}{x-4-a} \end{aligned}$$

$-2=-4-a$에서
$a=-2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+b}{x+2} \\ &= \frac{2(x+2)+b-4}{x+2} \\ &= 2+\frac{b-4}{x+2} \end{aligned}$$

이므로 (나)에 의해 $b-4=3$
$b=7$
따라서 $a+b=-2+7=5$

20. [출제의도] 합성함수와 일대일 대응의 뜻을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 함수 f가 일대일 대응이므로 $f(1)\times f(2)=6$에서 $f(1)$과 $f(2)$의 값은 각각 2와 3 또는 3과 2이다. 따라서 $f(3)+f(4)+f(5)$의 값은 10이다. (참)
ㄴ. $(f\circ f)(x)=x$일 때, $f(a)=b$이면
$(f\circ f)(a)=f(f(a))=a$
이므로 $f(b)=a$이다.
따라서 $(f\circ f)(x)=x$를 만족하는 함수 f의 대응관계는 $f(a)=a$이거나 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=b$이면서 $f(b)=a$이어야만 한다.
집합 X의 원소가 다섯 개이므로 원소를 두 개씩 짝을 지어도 짝지어지지 않는 원소가 존재한다.
따라서 $(f\circ f)(x)=x$이면 $f(a)=a$인 집합 X의 원소 a가 존재한다. (참)
ㄷ. (반례) $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$, $f(4)=5$, $f(5)=4$라 하면

$$\begin{aligned} (f\circ f\circ f)(1) &= f(f(f(1))) \\ &= f(f(2)) \\ &= f(3) \\ &= 1 \end{aligned}$$

에서 $(f\circ f\circ f)(1)=1$이므로 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $(f\circ f\circ f)(x)=x$이지만

$f(b)=b$인 집합 X의 원소 b는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. [출제의도] 등차수열을 이용하여 수열의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=1+(n-1)d$이므로

$$
\begin{aligned}
b_n&=\sum_{k=1}^{n}k\{1+(k-1)d\}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{dk^2+(1-d)k\}\\
&=d\sum_{k=1}^{n}k^2+(1-d)\sum_{k=1}^{n}k\\
&=\frac{dn(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(1-d)n(n+1)}{2}\\
&=\frac{n(n+1)}{6}\times\{d(2n+1)+3(1-d)\}\\
&=\frac{n(n+1)}{6}\times(2dn-2d+3)
\end{aligned}
$$

$b_{10}=715$이므로

$\frac{10\times11}{6}\times(20d-2d+3)=715$

$18d+3=39$

$18d=36$

$d=2$

$$
\begin{aligned}
b_n&=\frac{n(n+1)}{6}\times(2\times2\times n-2\times2+3)\\
&=\frac{n(n+1)}{6}\times(4n-1)
\end{aligned}
$$

$\frac{b_n}{n(n+1)}=\frac{1}{6}(4n-1)$

따라서

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{10}\frac{b_n}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{6}(4n-1)\\
&=\frac{1}{6}(220-10)\\
&=35
\end{aligned}
$$

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=1+(n-1)d$이므로

$$
\begin{aligned}
b_n&=\sum_{k=1}^{n}k\{1+(k-1)d\}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{dk^2+(1-d)k\}\\
&=d\sum_{k=1}^{n}k^2+(1-d)\sum_{k=1}^{n}k\\
&=\frac{dn(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(1-d)n(n+1)}{2}\\
&=\frac{n(n+1)}{6}\times\{d(2n+1)+3(1-d)\}\\
&=\frac{n(n+1)}{6}\times(2dn-2d+3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{n(n+1)}&=\frac{3-2d+2dn}{6}\\
&=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{d}{3}
\end{aligned}
$$

이므로

수열 $\left\{\frac{b_n}{n(n+1)}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공차가 $\frac{d}{3}$인 등차수열이다.

$b_{10}=715$이므로

수열 $\left\{\frac{b_n}{n(n+1)}\right\}$의 제10항은

$\frac{b_{10}}{10\times11}=\frac{715}{10\times11}=\frac{13}{2}$

따라서

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{10}\frac{b_n}{n(n+1)}&=\frac{10\times\left(\frac{1}{2}+\frac{13}{2}\right)}{2}\\
&=\frac{10\times7}{2}\\
&=35
\end{aligned}
$$

22. [출제의도] 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구한다.

선분 AB의 길이는 두 점 A, B사이의 거리이므로

$$
\begin{aligned}
l&=\sqrt{(0-2)^2+(5-0)^2}\\
&=\sqrt{29}
\end{aligned}
$$

따라서 $l^2=29$

23. [출제의도] 제한된 범위에서 함수의 최댓값을 구한다.

함수 $f(x)=2(x-1)^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 1이므로 $x=1$에서 최솟값, $x=3$에서 최댓값을 가진다.

따라서 최댓값은

$$
\begin{aligned}
f(3)&=2(3-1)^2-1\\
&=7
\end{aligned}
$$

24. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=6}^{10}a_k&=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{5}a_k\\
&=(10^2-2\times10)-(5^2-2\times5)\\
&=80-15\\
&=65
\end{aligned}
$$

[다른 풀이]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$
\begin{aligned}
a_n&=S_n-S_{n-1}\\
&=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}\\
&=2n-3\ \ (n\ge2)
\end{aligned}
$$

$a_1=S_1=-1$이므로

$a_n=2n-3\ \ (n\ge1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -1이고 공차가 2인 등차수열이다. $a_6=9$, $a_{10}=17$이므로

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=6}^{10}a_k&=\frac{5(9+17)}{2}\\
&=65
\end{aligned}
$$

25. [출제의도] 두 직선의 수직 조건과 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

직선 AB는 직선 $y=-x+4$에 수직이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.

$\frac{\log_3 b-\log_3 a}{3-(-1)}=1$

$$
\begin{aligned}
\log_3 b-\log_3 a&=\log_3\frac{b}{a}\\
&=4
\end{aligned}
$$

따라서 $\frac{b}{a}=3^4=81$

26. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

$5^{2a+b}\times5^{a-b}=32\times2$

$5^{(2a+b)+(a-b)}=64$

$5^{3a}=4^3$

$5^a=4$

$5^{a-b}=2$에서

$5^b=2$

이므로

$4^{\frac{1}{a}}=5$, $2^{\frac{1}{b}}=5$

따라서

$$
\begin{aligned}
4^{\frac{a+b}{ab}}&=4^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\\
&=4^{\frac{1}{a}}\times4^{\frac{1}{b}}\\
&=5\times\left(2^{\frac{1}{b}}\right)^2\\
&=5\times5^2\\
&=125
\end{aligned}
$$

[다른 풀이]

$2a+b=\log_5 32$ …… ㉠

$a-b=\log_5 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\log_5 4$, $b=\log_5 2$

$$
\begin{aligned}
\frac{a+b}{ab}&=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\\
&=\frac{1}{\log_5 4}+\frac{1}{\log_5 2}\\
&=\log_4 5+\log_2 5\\
&=\log_4 5+\log_4 25\\
&=\log_4 125
\end{aligned}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
4^{\frac{a+b}{ab}}&=4^{\log_4 125}\\
&=125
\end{aligned}
$$

27. [출제의도] 다항식의 나눗셈을 이용하여 식의 값을 구한다.

$f(x)=x^3-x^2+ax+b$를 x^2-2x-2로 나누면

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\
\hline
x^2-2x-2 & x^3-x^2+ax+b \\
 & x^3-2x^2-2x \\
\hline
 & x^2+(a+2)x+b \\
 & x^2-2x-2 \\
\hline
 & (a+4)x+(b+2)
\end{array}
$$

이므로

$Q(x)=x+1$, $R(x)=(a+4)x+b+2$

$R(2)=2(a+4)+b+2=9$

이므로

$2a+b=-1$ …… ㉠

$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-1-1-a+b=0$

$a-b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$a=-1$, $b=1$

$f(x)=x^3-x^2-x+1$

$$
\begin{aligned}
\text{따라서 } f(4)&=4^3-4^2-4+1\\
&=64-16-4+1\\
&=45
\end{aligned}
$$

[다른 풀이]

$f(x)=x^3-x^2+ax+b$를 x^2-2x-2로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)=x+1$이므로 $R(x)$가 $x+1$로 나누어떨어진다.

$R(x)=k(x+1)$

$R(2)=9$에서

$k=3$

$R(x)=3(x+1)$

다항식 x^2-2x-2를 $g(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$에서

$$
\begin{aligned}
f(4)&=g(4)Q(4)+R(4)\\
&=(4^2-2\times4-2)\times(4+1)+3\times(4+1)\\
&=6\times5+3\times5\\
&=45
\end{aligned}
$$

28. [출제의도] 평행이동을 이용하여 색칠된 부분의 넓이를 구한다.

점 A를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로

-3만큼 평행이동한 점이 C 이므로 직선 AC 의 기울기는 $-\dfrac{3}{4}$이다.

즉, 두 직선 AB, AC가 서로 수직이므로 사각형 ABDC 는 직사각형이다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

또, 원점에서 직선 $4x-3y-6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

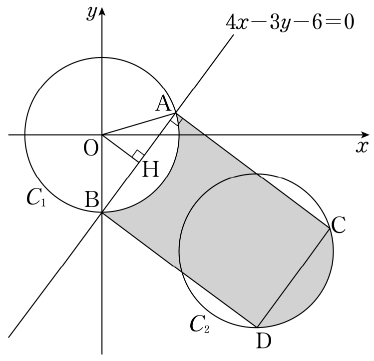
$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{5}$

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}$

$=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}$

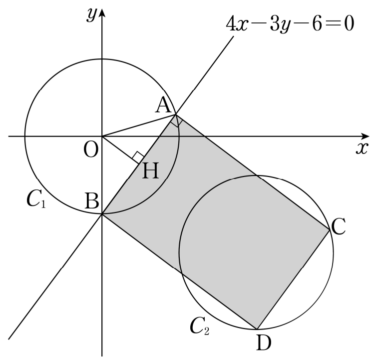
$=\dfrac{8}{5}$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{16}{5}$



선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD 로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 직사각형 ABDC 의 넓이와 같으므로

$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{16}{5}\times5=16$



29. [출제의도] 역함수의 그래프의 성질을 이용하여 사각형의 넓이를 구한다.

원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

원의 중심으로부터 두 직선까지의 거리가 같으므로

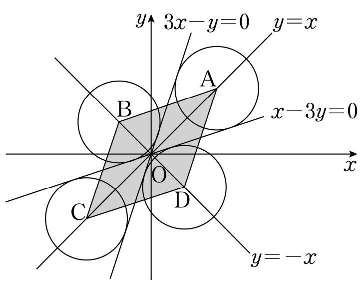
$\dfrac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$

$a-3b=\pm(3a-b)$

$a-3b=3a-b$에서 $b=-a$

$a-3b=-(3a-b)$에서 $b=a$

따라서 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.



(ⅰ) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있는 경우

원의 중심인 점 $(a,\ a)$와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$4=\dfrac{|3a-a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2a|}{\sqrt{10}}$

$|2a|=4\sqrt{10}$

$a=\pm2\sqrt{10}$

따라서 점 A와 점 C의 좌표는

$\mathrm{A}(2\sqrt{10},\ 2\sqrt{10}),\ \mathrm{C}(-2\sqrt{10},\ -2\sqrt{10})$

(ⅱ) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있는 경우

원의 중심인 점 $(a,\ -a)$와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$4=\dfrac{|3a-(-a)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|4a|}{\sqrt{10}}$

$|4a|=4\sqrt{10}$

$a=\pm\sqrt{10}$

따라서 점 B와 점 D의 좌표는

$\mathrm{B}(-\sqrt{10},\ \sqrt{10}),\ \mathrm{D}(\sqrt{10},\ -\sqrt{10})$

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형은 두 선분 AC, BD를 대각선으로 하는 마름모이다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2+(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2}$

$=8\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{\{\sqrt{10}-(-\sqrt{10})\}^2+(-\sqrt{10}-\sqrt{10})^2}$

$=4\sqrt{5}$

사각형 ABCD의 넓이는

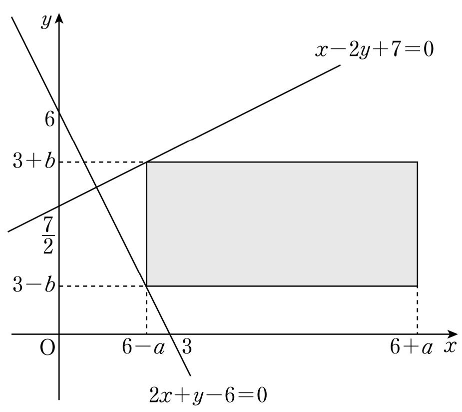
$\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{5}\times4\sqrt{5}=80$

30. [출제의도] 충분조건과 부등식의 영역을 이용하여 최댓값을 구한다.

$p:\ |x-6|\le a$이고 $|y-3|\le b$

$-a\le x-6\le a$이고 $-b\le y-3\le b$

$6-a\le x\le 6+a$이고 $3-b\le y\le 3+b$



p가 q이기 위한 충분조건이려면 그림과 같이

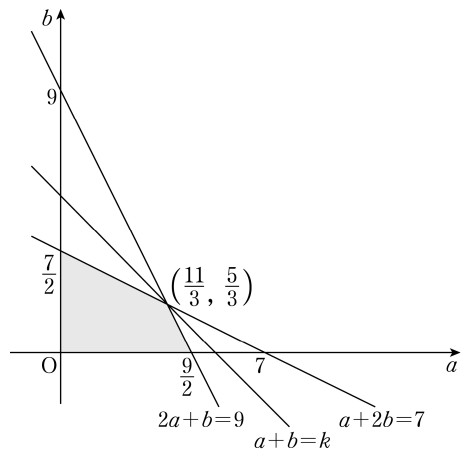
점 $(6-a,\ 3+b)$가 $x-2y+7\ge0$을 만족하여야 하므로 $(6-a)-2(3+b)+7\ge0$에서

$a+2b\le7$ …… ㉠

점 $(6-a,\ 3-b)$가 $2x+y-6\ge0$을 만족하여야 하므로 $2(6-a)+(3-b)-6\ge0$에서

$2a+b\le9$ …… ㉡

$a,\ b$는 모두 양수이므로 ㉠과 ㉡을 동시에 만족하는 부등식의 영역은 다음과 같다. (경계선 포함)



$a+b=k$라 하면 직선 $b=-a+k$가 직선 $a+2b=7$과 직선 $2a+b=9$의 교점인 점 $\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$를 지날 때 k가 최댓값을 갖는다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 $\dfrac{11}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{16}{3}$

$M=\dfrac{16}{3}$, $30M=30\times\dfrac{16}{3}=160$