수학 영역(가형)

1. $\cos\frac{13}{6}\pi$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

3. $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\ln(1+2x)}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int(2x+1)dx$$

이고 $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+3h)-f(-1)}{h} = 4$$

일 때, $f'(-1)$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$　② 1　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ 2

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-5)=6$$

일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{4a_n}{2a_n-3}$의 값은? (단, $a_n \neq \frac{3}{2}$) [3점]

① 5　② $\frac{11}{2}$　③ 6　④ $\frac{13}{2}$　⑤ 7

7. 부등식 $\log_3(2x+1) \geq 1+\log_3(x-2)$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [3점]

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

8. 함수 $f(x)=\begin{cases}(3x+1)e^{x} & (x \le 0)\\ ax+1 & (x>0)\end{cases}$이 $x=0$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 4 ③ 7 ④ 10 ⑤ 13

9. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

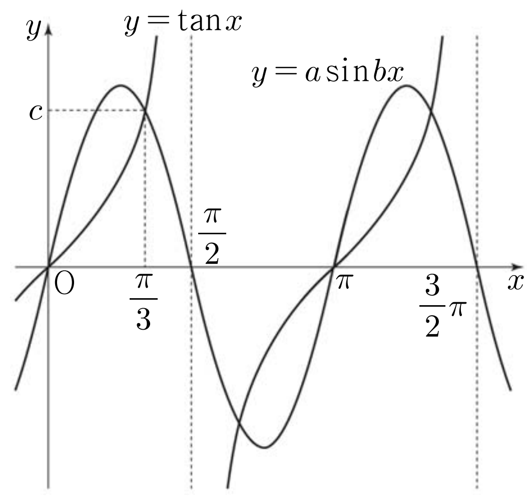
> (가) $\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{2}$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $3-\frac{1}{n} < a_nb_n < 3+\frac{1}{n}$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

10. 그림은 두 함수 $y=\tan x$와 $y=a\sin bx$의 그래프이다.

두 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, c\right)$에서 만날 때, 세 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은? (단, $a>0$, $b>0$) [3점]



① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ 8

11. $\int_0^1 (4x-3)dx + \int_1^k (4x-3)dx = 0$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

12. 지진의 세기를 나타내는 수정머칼리진도가 x이고 km당 매설관 파괴 발생률을 n이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$n = C_d C_g 10^{\frac{4}{5}(x-9)}$$

(단, C_d는 매설관의 지름에 따른 상수이고, C_g는 지반 조건에 따른 상수이다.)

C_g가 2인 어느 지역에 C_d가 $\frac{1}{4}$인 매설관이 묻혀 있다. 이 지역에 수정머칼리진도가 a인 지진이 일어났을 때, km당 매설관 파괴 발생률이 $\frac{1}{200}$이었다. a의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

13. 두 상수 a, b에 대하여

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+a}{\sqrt{x+1}-2}=b$$

일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

14. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} 6t-2t^2 & (0 \le t < 3) \\ \frac{1}{2}(3-t) & (t \ge 3) \end{cases}$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=7$까지 움직인 거리는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

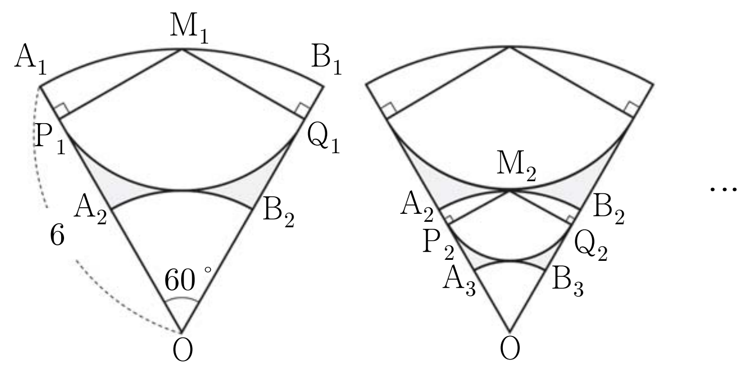
15. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin x+\cos x$가

$$\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}=1$$

을 만족시킬 때, $\cos^2 a$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

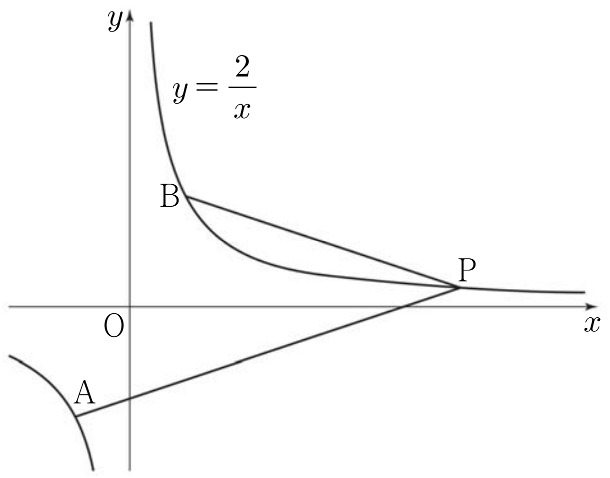
16. 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다.
그림과 같이 호 $\mathrm{A_1B_1}$을 이등분하는 점 $\mathrm{M_1}$에서 두 선분 $\mathrm{OA_1}$, $\mathrm{OB_1}$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 중심이 $\mathrm{M_1}$, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{M_1P_1}}$인 부채꼴 $\mathrm{M_1P_1Q_1}$을 그린다. 점 O를 중심으로 하고 호 $\mathrm{P_1Q_1}$에 접하는 원이 두 선분 $\mathrm{OA_1}$, $\mathrm{OB_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$라 할 때, 호 $\mathrm{P_1Q_1}$, 호 $\mathrm{A_2B_2}$, 선분 $\mathrm{P_1A_2}$, 선분 $\mathrm{Q_1B_2}$로 둘러싸인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 호 $\mathrm{A_2B_2}$를 이등분하는 점 $\mathrm{M_2}$에서 두 선분 $\mathrm{OA_2}$, $\mathrm{OB_2}$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하고, 중심이 $\mathrm{M_2}$, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{M_2P_2}}$인 부채꼴 $\mathrm{M_2P_2Q_2}$를 그린다. 점 O를 중심으로 하고 호 $\mathrm{P_2Q_2}$에 접하는 원이 두 선분 $\mathrm{OA_2}$, $\mathrm{OB_2}$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$이라 할 때, 호 $\mathrm{P_2Q_2}$, 호 $\mathrm{A_3B_3}$, 선분 $\mathrm{P_2A_3}$, 선분 $\mathrm{Q_2B_3}$으로 둘러싸인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 ⋯

① $6(2\sqrt{3}-\pi)$ ② $7(2\sqrt{3}-\pi)$ ③ $8(2\sqrt{3}-\pi)$
④ $9(2\sqrt{3}-\pi)$ ⑤ $10(2\sqrt{3}-\pi)$

17. 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$에 대하여 $\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{4}$가 되도록 점 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$를 정할 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$) [4점]



① $3+\sqrt{2}$　② $2+2\sqrt{2}$　③ $4+\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $3+2\sqrt{2}$

18. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^{n+2}-3\left(3^{n+1}-1\right),\ g(x)=3^{n+1}(n+2)(x-3)$$

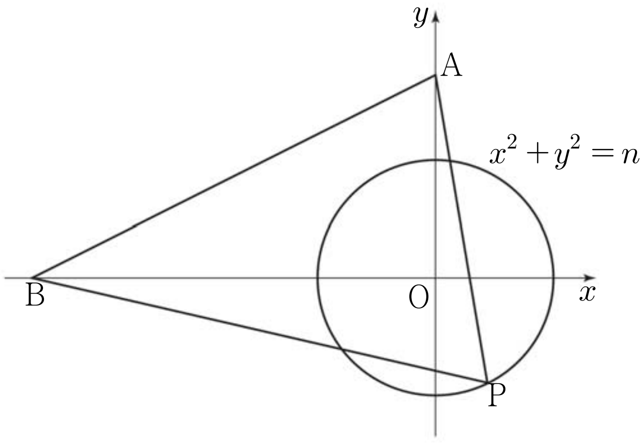
이라 하자. 다음은 $x \ge 3$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립함을 증명하는 과정이다.

> 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
> $h(x)$는 $(n+2)$차 다항함수이다.
> $h'(x)=(n+2)\times\left(\boxed{\text{(가)}}\right)$
> $x>3$에서 $h'(x)>0$ 이므로
> 함수 $h(x)$는 증가한다.
> $x \ge 3$에서 $h(x)$의 최솟값은 $\boxed{\text{(나)}}$
> $x \ge 3$에서 $h(x) \ge \boxed{\text{(나)}}>0$이므로
> $f(x)-g(x)>0$
> 따라서 $x \ge 3$인 모든 실수 x에 대하여
> 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $A(x)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p\times A(4)}{4^n}$의 값은? [4점]

① 4　② 8　③ 12　④ 16　⑤ 20

19. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(0, n)$, $\mathrm{B}(-2n, 0)$과 원 $x^2+y^2=n$이 있다. 원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(a_{n+1}-a_n)$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

20. 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$의 도함수를 $h(x)$라 하자. $f(-1)=f(1)=f(2)=0$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\int_1^2 f(x)dx>0$

ㄴ. $h(0)<0$

ㄷ. $\int_m^n h(x)dx$의 값이 최대일 때, $m+n=\frac{4}{3}$이다. (단, $m<n$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \le -1) \\ 1 & (-1 < x \le 1) \\ x-1 & (x > 1) \end{cases}$$

이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $f(x)g(x+k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k가 존재한다. (단, $k \ne 0$)

$g(0) < 0$일 때, $g(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

단답형

22. $\lim_{n \to \infty} \frac{8n^2+5}{n^2+1}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+10 & (x \ne 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

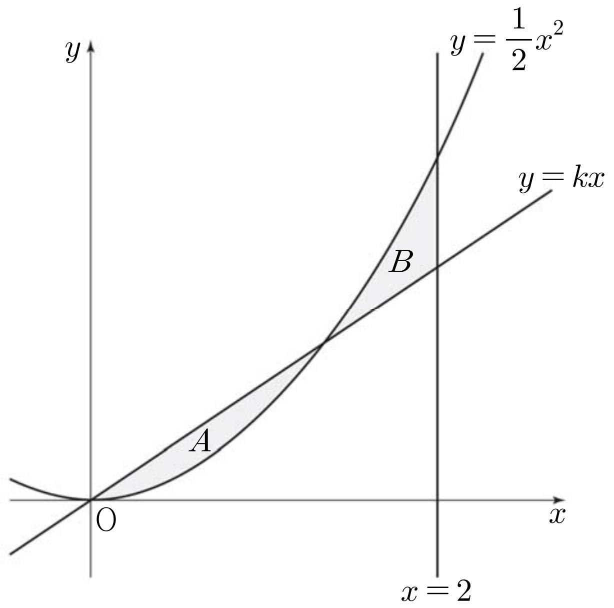
24. $0 \le x \le 4\pi$일 때, 방정식 $2\sin x = \sqrt{2}$의 모든 실근의 합은 $k\pi$이다. 실수 k의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_{1}^{x}(t^3+2t+5)dt$$

일 때, $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=kx$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 두 직선 $x=2$, $y=kx$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, $30k$의 값을 구하시오. (단, k는 $0<k<1$인 상수이다.) [4점]

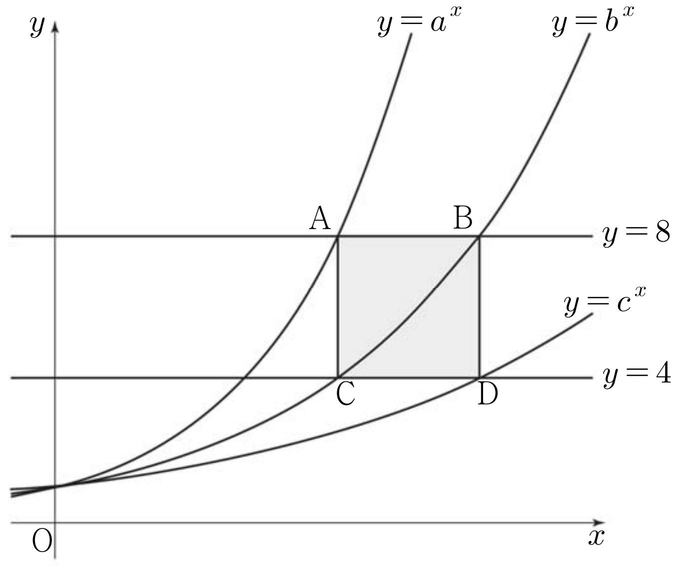


27. 다항함수 $f(x)$는 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2x^2-5x \leq f(x) \leq 2x^2+2$
(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}$

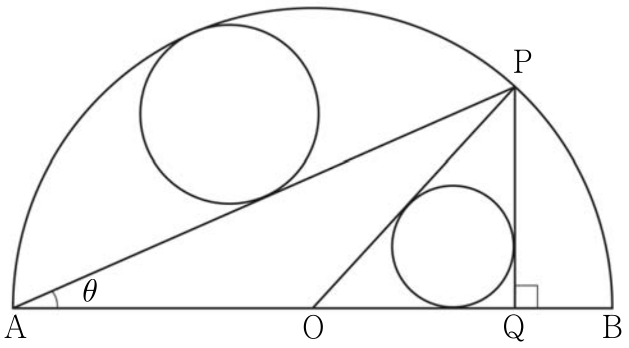
$f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 $a>b>c>1$인 세 상수 a, b, c에 대하여 두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x$과 직선 $y=8$이 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=b^x$, $y=c^x$과 직선 $y=4$가 만나는 점을 각각 C, D라 하자.
사각형 ACDB가 정사각형일 때, $abc=2^{\frac{q}{p}}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 선분 AP와 호 AP에 동시에 접하는 가장 큰 원의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 POQ의 내접원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^2 \times T(\theta)}{S\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)=2x^2-x-4$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)-g(x)$는 x좌표가 2인 점에서 x축에 접한다. (나) 함수 $y=\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f'(0)=2$일 때, $f(1)$의 최댓값은 α이다. 40α의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.