2015학년도 9월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	②	2	⑤	3	①	4	⑤	5	①
6	①	7	②	8	②	9	④	10	③
11	④	12	③	13	④	14	①	15	③
16	⑤	17	④	18	③	19	②	20	⑤
21	⑤	22	50	23	8	24	10	25	21
26	110	27	18	28	45	29	22	30	196

수학 영역

가형 해설

1. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=2^{\frac{1}{3}+\frac{4}{6}}=2$

2. [출제의도] 명제의 참, 거짓 이해하기

명제 '$x=2$이면 $x^3-k=0$이다.'가 참이 되려면

$8-k=0$

따라서 $k=8$

3. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5}=10$

4. [출제의도] 등비수열의 수렴조건 계산하기

수열 $\left\{\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^n\right\}$은 공비가 $\dfrac{x-3}{2}$인 등비수열

이므로 수렴할 조건은 $-1<\dfrac{x-3}{2}\le1$

따라서 $1<x\le5$이므로 모든 정수 x의 값의 합은 $2+3+4+5=14$

5. [출제의도] 미분계수의 정의 이해하기

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4+2h)-f(4-5h)}{3h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4+2h)-f(4)}{3h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4)-f(4-5h)}{3h}$

$=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4+2h)-f(4)}{2h}+\dfrac{5}{3}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4-5h)-f(4)}{-5h}$

$=\dfrac{2}{3}f'(4)+\dfrac{5}{3}f'(4)=\dfrac{7}{3}f'(4)=7$

6. [출제의도] 합성함수와 역함수 이해하기

$h(3)=k$라 하면

$f(h(3))=g(3)$이므로 $f(k)=-4$

$\dfrac{1}{2}k+1=-4,\ k=-10$

따라서 $h(3)=-10$

(별해)

$h=(f^{-1}\circ f)\circ h$

$\quad=f^{-1}\circ(f\circ h)=f^{-1}\circ g$이므로

$h(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(-4)=k$라 하면,

역함수의 성질에 의하여

$f(k)=\dfrac{1}{2}k+1=-4$이므로 $k=-10$

따라서 $h(3)=-10$

7. [출제의도] 절대부등식의 최대 · 최소 이해하기

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{xy}$ ...... ①

$x>0,\ y>0$이므로 절대부등식의 성질에 의하여

$x+y\ge2\sqrt{xy}$ ...... ②

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

그러므로 $(x+y)^2\ge4xy$이고 정리하면

$\dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{4}{(x+y)^2}$ ...... ③

①, ②, ③에 의하여

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{xy}\ge\dfrac{12}{(x+y)^2}=\dfrac{4}{3}$

따라서 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$

(별해)

$x>0,\ y>0$이므로 절대부등식의 성질에 의하여

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(x+y)=\dfrac{1}{3}\left(2+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$

$\ge\dfrac{1}{3}\left(2+2\sqrt{\dfrac{y}{x}\times\dfrac{x}{y}}\right)=\dfrac{4}{3}$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$

8. [출제의도] 급수와 일반항의 관계 이해하기

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{n}-3\right)$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=3$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n}{n+a_n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2a_n}{n}}{\dfrac{n}{n}+\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{3}{2}$

9. [출제의도] 정적분을 활용하여 넓이 구하기

주어진 곡선과 직선이 만나는 점의 x좌표는

$x=-3$ 또는 $x=1$

둘러싸인 부분의 넓이를 S라고 하면

$S=\displaystyle\int_{-3}^{1}\left|(-x^2+6)-(2x+3)\right|dx$

$=\displaystyle\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\dfrac{32}{3}$

10. [출제의도] 기울기가 주어진 접선의 방정식 이해하기

직선 $x+2y-8=0$에 수직인 직선의 기울기는 2

$f(x)=-x^4+6x-2$라 하면

$f'(x)=-4x^3+6=2$이므로 $x=1$

$f(1)=-1+6-2=3$이므로

접선의 방정식은 $y=2(x-1)+3=2x+1$

따라서 $m=2,\ n=1$이므로 $m+n=3$

11. [출제의도] 수열의 합과 일반항의 관계 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2a_k=n^2+n$이므로 $a_1=2$,

$n^2a_n=(n^2+n)-\{(n-1)^2+n-1\}=2n\ (n\ge2)$

이므로 $a_n=\dfrac{2}{n}\ (n\ge1)$

$\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{a_k}{k+1}=\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{2}{k(k+1)}=\dfrac{20}{11}$

12. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$10^a=1+\sqrt{2}$이므로 $10^{2a}=3+2\sqrt{2}$

$\dfrac{10^a+10^{-a}}{10^a-10^{-a}}=\dfrac{10^{2a}+1}{10^{2a}-1}=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

13. [출제의도] 유리함수의 성질 이해하기

$n=3$일 때 $f(x)=\dfrac{x+21}{x-3}=\dfrac{24}{x-3}+1$

이므로 점근선의 방정식은 $x=3,\ y=1$

따라서 $p+q=3+1=4$

14. [출제의도] 유리함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $f(x)=\dfrac{x+2k^2+k}{x-k}$의 그래프와

직선 $y=x$의 제1사분면 위의 교점은

$\mathrm{P}_k(2k+1,\ 2k+1)$이므로 $A_k=(2k+1)^2$

따라서 $\sum\limits_{k=1}^{10}A_k=\sum\limits_{k=1}^{10}(4k^2+4k+1)=1770$

15. [출제의도] 미분계수 이해하기

함수 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=13$

16. [출제의도] 역함수의 성질 추론하기

$f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로 $g(1)=1$

이와 같은 방법으로

$g(2)=5,\ g(3)=2,\ g(4)=3,\ g(5)=4$

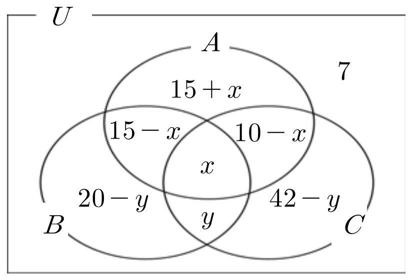
$g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)=5+f^{-1}(g^{-1}(1))=10$

17. [출제의도] 집합의 원소의 개수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

전체집합을 U, $n(A\cap B\cap C)=x$,

$n((B\cap C)-A)=y$라 하고 벤다이어그램에

각각의 영역에 해당하는 원소의 개수를 표시하면



$n(A\cup B\cup C)=102-y=93$이므로 $y=9$

x의 범위는 $0\le x\le10$

두 문제 이상 맞힌 학생 수는 $34-x$이므로

최솟값은 $x=10$일 때 24명

18. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 증명하기

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=2+a_1=3$,

(우변)$=2a_2=2\left(1+\boxed{\dfrac{1}{2}}\right)=3$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\ge2)$일 때

(★)이 성립한다고 가정하면

$m+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}=ma_m$이므로

$(m+1)+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}+a_m$

$=ma_m+\boxed{a_m+1}$

$=(m+1)\left(a_{m+1}-\boxed{\dfrac{1}{m+1}}\right)+1$

$=(m+1)a_{m+1}$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여

$n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여

$\boxed{n+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=na_n}$ 이 성립한다.

$p=\dfrac{1}{2}$, $f(m)=a_m+1$, $g(m)=\dfrac{1}{m+1}$

따라서 $\dfrac{p\times f(3)}{g(11)}=17$

19. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

$f(x)-g(x)=x^3-6x^2+9x-mx$
$\qquad\qquad\quad =x(x-a)(x-b)$

$\displaystyle\int_0^b x(x-a)(x-b)\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}(a+b)x^3+\dfrac{1}{2}abx^2\right]_0^b$

$=\dfrac{1}{4}b^4-\dfrac{1}{3}(a+b)b^3+\dfrac{1}{2}ab^3$

$=\dfrac{b^3}{12}(2a-b)=0$ 이므로 $b=2a$

$x\{x^2-6x+(9-m)\}=x(x-a)(x-2a)$

$6=3a$, $9-m=2a^2$ 이므로 $a=2$, $m=1$, $b=4$

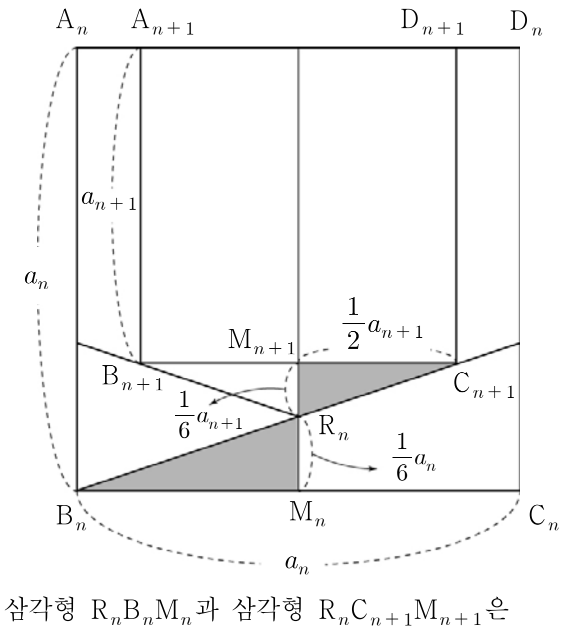
따라서 $\displaystyle\int_a^b\{g(x)\}^2dx=\int_2^4 x^2dx=\dfrac{56}{3}$

20. [출제의도] 등비급수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

S_1은 삼각형 $\mathrm{P_1B_1R_1}$의 넓이와 삼각형 $\mathrm{B_1C_1Q_1}$의 넓이의 합이므로 $S_1=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$

선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 중점을 M_n이라 하고

정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 a_n 이라 하자.



삼각형 $\mathrm{R}_n\mathrm{B}_n\mathrm{M}_n$과 삼각형 $\mathrm{R}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}$은 닮음이므로

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{M}_n}:\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_n}=\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}}:\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_{n+1}}$
$\qquad\qquad\qquad =3:1$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{M}_n}=\dfrac{1}{2}a_n$, $\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_n}=\dfrac{1}{6}a_n$

$\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}$, $\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_{n+1}}=\dfrac{1}{6}a_{n+1}$

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}+\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_{n+1}}+\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_n}$

$a_n=a_{n+1}+\dfrac{1}{6}a_{n+1}+\dfrac{1}{6}a_n$

그러므로 $a_{n+1}=\dfrac{5}{7}a_n$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{9}{4}}{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\dfrac{147}{32}$

21. [출제의도] 미적분의 기본정리를 이용하여 다항함수 추론하기

ㄱ. $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=4$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. 사차함수 $f(x)$는 구간 (a,t)에서 미분가능하고 구간 $[a,t]$에서 연속이므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'(c)$

인 c가 구간 (a,t)에 존재한다. 또한 사차함수 $f(x)$는 구간 (t,b)에서 미분가능하고 구간 $[t,b]$에서 연속이므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}=\dfrac{f(b)-f(t)}{b-t}=f'(d)$

인 d가 구간 (t,b)에 존재한다.

함수 $f'(x)$가 구간 (a,b)에서 감소하고 $a<c<t<d<b$이므로 $f'(c)>f'(d)$이다.

그러므로

$\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'(c)>f'(d)=\dfrac{f(b)-f(t)}{b-t}$

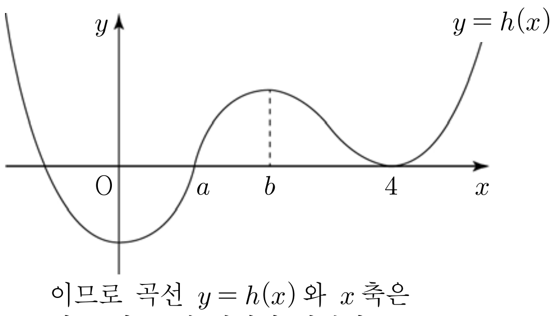
이다. (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-f(a)$라 하자.

주어진 조건에 의하여 함수 $y=h(x)$는 $x=0,\ b,\ 4$일 때 극값을 갖는다.

$0=\displaystyle\int_a^4 f'(x)dx=f(4)-f(a)$ 이므로 $h(4)=0$

함수 $h(x)$의 그래프의 모양은



이므로 곡선 $y=h(x)$와 x축은 서로 다른 세 점에서 만난다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$는 서로 다른 세 점에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 등비수열의 극한값 계산하기

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\times5^{n+1}+3^n}{5^{n-1}+4^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{10+\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^n}=50$

23. [출제의도] 집합의 포함관계 이해하기

$\{1,2,4\}\subset X\subset\{1,2,3,4,6,12\}$이므로

조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 $2^3=8$

24. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 48-\log_2 3+\dfrac{\log_3 64}{\log_3 2}$

$=\log_2\dfrac{48}{3}+\log_2 64=4+6=10$

25. [출제의도] 연속함수의 성질 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-ax+1}{x-1}=b$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}(x^3-ax+1)=2-a=0$, $a=2$

$b=\displaystyle\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x-1)=1$

따라서 $10a+b=21$

26. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열이므로 $2\times\dfrac{4}{3}k=(k-1)+(3k-3)$

그러므로 $k=3$

등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 2이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\dfrac{10(2\times2+9\times2)}{2}=110$

27. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\displaystyle\int_0^3(x+1)^2dx-\int_{-1}^3(x-1)^2dx+\int_{-1}^0(x-1)^2dx$

$=\displaystyle\int_0^3(x+1)^2dx-\int_0^3(x-1)^2dx$

$=\displaystyle\int_0^3 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_0^3=18$

28. [출제의도] 속도와 거리의 관계 이해하기

점 P가 원점을 출발하여 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리가 58이므로 $a>2$

$\displaystyle\int_0^a|3t^2-6t|dt$

$=-\displaystyle\int_0^2(3t^2-6t)dt+\int_2^a(3t^2-6t)dt$

$=-\Big[t^3-3t^2\Big]_0^2+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^a$

$=a^3-3a^2+8=58$

$(a-5)(a^2+2a+10)=0$

따라서 $a=5$이므로 $v(5)=45$

29. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_n$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=b_n$, $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}=c_n$,

$\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n}=d_n$, $\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}=e_n$ 이라 하면,

$b_n=\dfrac{5}{6}a_n$, $c_n=\dfrac{5}{6}b_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2a_n$,

$d_n=\dfrac{5}{6}c_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^3a_n$, $e_n=\dfrac{5}{6}d_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^4a_n$

한편, $a_{n+1}=\dfrac{5}{6}a_n$, $a_1=\overline{\mathrm{A_1B_1}}=66\times\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}+\overline{\mathrm{B_2C_2}}+\overline{\mathrm{C_3D_3}}+\overline{\mathrm{D_4E_4}}+\overline{\mathrm{E_5F_5}}$

$=a_1+b_2+c_3+d_4+e_5$

$=a_1+\dfrac{5}{6}a_2+\left(\dfrac{5}{6}\right)^2a_3+\left(\dfrac{5}{6}\right)^3a_4+\left(\dfrac{5}{6}\right)^4a_5$

$=a_1+\left(\dfrac{5}{6}\right)^2a_1+\left(\dfrac{5}{6}\right)^4a_1+\left(\dfrac{5}{6}\right)^6a_1+\left(\dfrac{5}{6}\right)^8a_1$

$=\dfrac{a_1\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right\}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=25\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{10}\right\}=25-\dfrac{5^{12}}{6^{10}}$

$a=10$, $b=12$

따라서 $a+b=22$

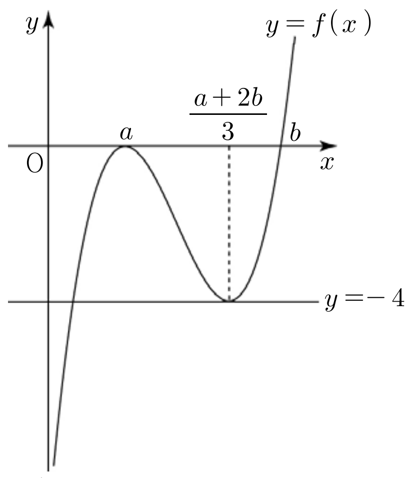
30. [출제의도] 극댓값과 극솟값의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값은 0, 극솟값은 -4

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 a, b라 하면

$f(x)=(x-a)^2(x-b)$

$f'(x)=2(x-a)(x-b)+(x-a)^2$
$\qquad\ =(x-a)(3x-a-2b)$



$f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{4}{27}(a-b)^3=-4$ 이므로 $b=a+3$

$f(0)=-a^2b=-a^2(a+3)=-20$, $a=2$, $b=5$

$f(x)=(x-2)^2(x-5)$

따라서 $f(9)=196$

(별해)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값 0을 갖는다고 하고 함수 $f(x)$를 x축의 음의 방향으로 a만큼 평행이동하여 얻은 함수를 $h(x)=f(x+a)$라 하고 함수 $y=h(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 $\alpha\ (\alpha\neq 0)$라 하자.

$h(x)=x^2(x-\alpha)$

$h'(x)=2x(x-\alpha)+x^2=x(3x-2\alpha)=0$

함수 $y=h(x)$는 $x=\frac{2\alpha}{3}$에서 극솟값 -4를 가지므로

$\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2\left(\frac{2\alpha}{3}-\alpha\right)=-\frac{4\alpha^3}{27}=-4$

$\alpha=3$ 이고 $f(x+a)=x^2(x-3)$

$f(x)=(x-a)^2(x-a-3)$

$f(0)=-20$ 이므로 $a^2(a+3)=20=2^2\times 5$

$a=2$ 이므로 $f(x)=(x-2)^2(x-5)$

따라서 $f(9)=196$