2015학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 가형 정답

1	③	2	①	3	④	4	②	5	⑤
6	⑤	7	③	8	④	9	②	10	①
11	④	12	③	13	①	14	③	15	①
16	⑤	17	①	18	②	19	④	20	⑤
21	②	22	24	23	16	24	7	25	9
26	75	27	107	28	442	29	46	30	5

해 설

1. [출제의도] 다항식의 합을 계산한다.

두 다항식 $A=2x^2-3x-5$, $B=-x^2+3x$에서

$A+2B=(2x^2-3x-5)+2(-x^2+3x)$

$=2x^2-3x-5-2x^2+6x$

$=3x-5$

2. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산한다.

$2^{-2}\times16^{\frac{1}{2}}=2^{-2}\times(2^4)^{\frac{1}{2}}$

$=2^{-2}\times2^2$

$=2^{-2+2}$

$=2^0=1$

[다른 풀이]

$2^{-2}\times16^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^2}\times\sqrt{16}$

$=\frac{1}{4}\times4=1$

3. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+4=0$의 두 근을 각각 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=4$

[다른 풀이]

$x^2+4=0$에서

$x^2=-4$

$x=2i$ 또는 $-2i$

$\therefore\ \alpha\beta=2i\times(-2i)=-4i^2$

$=4$

4. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$\log_5 30+\log_5\frac{1}{10}-\log_5 15$

$=\log_5\frac{30}{10\times15}$

$=\log_5\frac{1}{5}=\log_5 5^{-1}$

$=-1$

5. [출제의도] 두 집합이 서로 같도록 하는 상수의 값을 구한다.

두 집합 A, B가 서로 같으므로

$a+2=2$ 또는 $a+2=6-a$

(i) $a+2=2$일 때,

$a=0$이므로 $A=\{-2,2\}$, $B=\{2,6\}$

$\therefore\ A\neq B$

(ii) $a+2=6-a$일 때,

$a=2$이므로 $A=B=\{2,4\}$

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

6. [출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 상수의 값을 구한다.

$x^3+a=(x+3)(x^2+bx+9)$에서

$x^3+a=x^3+(3+b)x^2+(9+3b)x+27$

등식의 양변의 계수를 비교하면

$a=27$, $b=-3$

$\therefore\ a+b=24$

[다른 풀이]

등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$-27+a=0$

$\therefore\ a=27$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+27=4(1+b+9)$

$\therefore\ b=-3$

따라서 $a+b=24$이다.

7. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 주어진 함숫값을 구한다.

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(15)=k$라 하면 $f(k)=15$

$f(k)=2k+3=15$

$\therefore\ k=6$

[다른 풀이]

$y=2x+3$에서

$2x=y-3$

$x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

이 식에서 x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

따라서 $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$이므로

$g(15)=\frac{1}{2}\times15-\frac{3}{2}=6$

8. [출제의도] 내분점의 성질을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(a,4)$, $\mathrm{B}(-9,0)$을 $4:3$으로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로 내분점의 x좌표는 0이다.

$\frac{4\times(-9)+3\times a}{4+3}=0$

$-36+3a=0$

$\therefore\ a=12$

9. [출제의도] 충분조건을 만족시키는 실수의 최댓값을 구한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

조건 $p: x^2-2x-8<0$에서

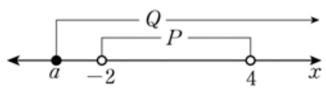
$(x-4)(x+2)<0$

$P=\{x|-2<x<4\}$

조건 $q: x\geq a$에서

$Q=\{x|x\geq a\}$

p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이어야 한다.



$\therefore\ a\leq-2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.

10. [출제의도] 일대일 대응인 함수의 성질을 이용하여 함숫값의 합을 구한다.

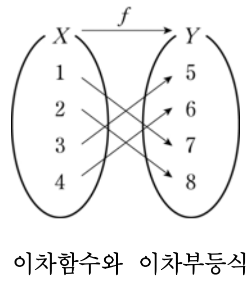
$f(2)-f(3)=3$에서

$f(2)=8$, $f(3)=5$

$f(1)=7$이고, 함수 f가 일대일 대응이므로

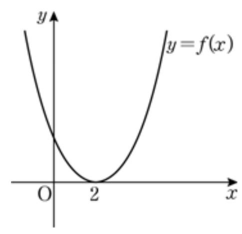
$f(4)=6$

$\therefore\ f(3)+f(4)=5+6=11$



11. [출제의도] 이차함수와 이차부등식의 관계를 이용하여 함숫값을 구한다.

(나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq2$인 모든 실수이므로 이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수는 양수이고 곡선 $y=f(x)$는 x축과 점 $(2,0)$에서 접한다.



$f(x)=a(x-2)^2$ $(a>0)$으로 놓으면 (가)에서

$f(0)=a(0-2)^2=4a=8$

$\therefore\ a=2$

$f(x)=2(x-2)^2$이므로

$f(5)=18$

12. [출제의도] 삼차방정식의 근의 조건을 만족시키는 정수의 개수를 구한다.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax-2a$라 하면

$f(1)=1+(a-1)+a-2a=0$

이므로 인수정리에 의하여 다항식 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a-1 & a & -2a \\ & & 1 & a & 2a \\ \hline & 1 & a & 2a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x^2+ax+2a)$

삼차방정식 $(x-1)(x^2+ax+2a)=0$이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8a<0$

$a(a-8)<0$

$\therefore\ 0<a<8$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다.

13. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선이 만나는 두 점 사이의 거리를 구한다.

$y=x^2+x$와 $y=4x-2$를 연립하면

$x^2+x=4x-2$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=4x-2$의 두 교점의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(2,6)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{17}$

14. [출제의도] 직선의 기울기와 근과 계수의 관계를 이용하여 $\sum$의 값을 구한다.

곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=nx-2$의 교점을 각각 $\mathrm{A}(\alpha,\alpha^2+\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta,\beta^2+\beta)$라 하면 직선 OA의 기울기는

$a_n=\frac{(\alpha^2+\alpha)-0}{\alpha-0}=\alpha+1$

이고, 직선 OB의 기울기는

$b_n=\frac{(\beta^2+\beta)-0}{\beta-0}=\beta+1$

$\therefore\ a_n+b_n=\alpha+\beta+2$

한편 $y=x^2+x$와 $y=nx-2$를 연립하면

$x^2+x=nx-2$

$x^2-(n-1)x+2=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=n-1$

$\therefore\ a_n+b_n=n+1$

$$\therefore\ \sum_{n=4}^{20}(a_n+b_n)=\sum_{n=4}^{20}(n+1)$$

$$=5+6+7+\cdots+21$$

$$=\sum_{n=1}^{21}n-(1+2+3+4)$$

$$=\frac{21\times22}{2}-10$$

$$=221$$

[다른 풀이]

곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=nx-2$의 교점을 각각

$\mathrm{A}(\alpha,\ n\alpha-2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ n\beta-2)$

라 하면

$$a_n=\frac{n\alpha-2}{\alpha}=n-\frac{2}{\alpha}$$

$$b_n=\frac{n\beta-2}{\beta}=n-\frac{2}{\beta}$$

$$a_n+b_n=2n-\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}\right)$$

$$=2n-\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

한편 $y=x^2+x$와 $y=nx-2$를 연립하면

$x^2+x=nx-2$

$x^2-(n-1)x+2=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=n-1$, $\alpha\beta=2$

$$a_n+b_n=2n-\frac{2(n-1)}{2}$$

$$=n+1$$

$$\therefore\ \sum_{n=4}^{20}(a_n+b_n)=\sum_{n=4}^{20}(n+1)$$

$$=5+6+7+\cdots+21$$

$$=\sum_{n=1}^{21}n-(1+2+3+4)$$

$$=\frac{21\times22}{2}-10$$

$$=221$$

[참고]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는

$(\alpha,\ f(\alpha))$ 또는 $(\alpha,\ g(\alpha))$로 놓을 수 있다.

이때 구하고자 하는 값에 따라 적절히 점의 좌표를 선택하면 계산 과정이 간단해진다.

15. **[출제의도] 나머지정리를 이용하여 주어진 값을 구한다.**

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 3이므로

$P(x)=(x-2)Q(x)+3$ …… ㉠

다항식 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 2이므로

$Q(x)=(x-1)Q_1(x)+2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$P(x)=(x-2)\{(x-1)Q_1(x)+2\}+3$

$\quad=(x-2)(x-1)Q_1(x)+2(x-2)+3$

$\quad=(x-1)(x-2)Q_1(x)+2x-1$

따라서 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)=2x-1$이다.

$\therefore\ R(3)=5$

[다른 풀이]

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 3이므로

$P(x)=(x-2)Q(x)+3$ …… ㉠

$\therefore\ P(2)=3$

다항식 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 2이므로

$Q(x)=(x-1)Q_1(x)+2$

$\therefore\ Q(1)=2$

㉠에서 $P(1)=(1-2)Q(1)+3=1$

$\therefore\ P(1)=1$

$P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면, 나머지 $R(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

$R(x)=ax+b$로 놓으면

$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+ax+b$이므로

$P(2)=2a+b=3$ …… ㉡

$P(1)=a+b=1$ …… ㉢

㉡과 ㉢을 연립하면

$a=2$, $b=-1$

따라서 $R(x)=2x-1$이므로

$R(3)=5$

16. **[출제의도] 유리함수의 그래프의 점근선을 구하여 상수의 값을 구한다.**

$f(x)=\dfrac{3x+k}{x+4}=\dfrac{3(x+4)+k-12}{x+4}=3+\dfrac{k-12}{x+4}$이고

곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선은

$$y-3=3+\frac{k-12}{(x+2)+4}$$

이므로

$$g(x)=\frac{k-12}{x+6}+6$$

곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $x=-6$, $y=6$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-6,\ 6)$이다.

점 $(-6,\ 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-6)=\frac{3\times(-6)+k}{-6+4}=6$$

$\therefore\ k=6$

[다른 풀이]

$f(x)=\dfrac{3x+k}{x+4}=\dfrac{3(x+4)+k-12}{x+4}=3+\dfrac{k-12}{x+4}$에서

곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식이 $x=-4$, $y=3$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-4,\ 3)$이다.

곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선이므로 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 교점은 점 $(-4,\ 3)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점 $(-6,\ 6)$과 같다.

점 $(-6,\ 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-6)=\frac{3\times(-6)+k}{-6+4}=6$$

$\therefore\ k=6$

17. **[출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 일반항을 추론한다.**

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1=1$, (우변)$=1\times1=1$

따라서 ㉡이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, ㉡이 성립한다고 가정하면

$$a_k=(1+2+3+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

이다.

㉠에서 $\dfrac{a_{k+1}}{k+2}=\dfrac{a_k}{k}+\dfrac{1}{2}$이므로

이 등식의 양변에 $k+2$를 곱하면

$$a_{k+1}=\boxed{\frac{k+2}{k}}a_k+\frac{k+2}{2}$$

$$=\boxed{\frac{k+2}{k}}(1+2+3+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{k+2}{2}$$

$$=\frac{k+2}{k}\times\frac{k(k+1)}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{k+2}{2}$$

$$=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{k+2}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{(k+1)(k+2)}{2(k+1)}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k+1}\right\}$$

$$=\{1+2+3+\cdots+(k+1)\}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉡이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉡이 성립한다.

$f(k)=\dfrac{k+2}{k}$, $g(k)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$이므로

$$f(10)\times g(9)=\frac{12}{10}\times\frac{10\times11}{2}=66$$

18. **[출제의도] 점의 대칭이동과 삼각형의 닮음을 이용하여 상수의 값을 구한다.**

두 점 $\mathrm{A}(4,\ a)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $\mathrm{A'}(a,\ 4)$, $\mathrm{B'}(1,\ 2)$이다.

두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.

따라서 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮은 삼각형이다.

두 삼각형 APA′, BPB′의 넓이의 비가 $9:4$이므로 두 삼각형 APA′, BPB′의 닮음비는 $3:2$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{BB'}}=3:2$

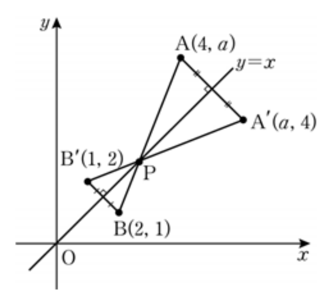
$\overline{\mathrm{AA'}}=\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}=\sqrt{2}(a-4)$ $(\because\ a>4)$

$\overline{\mathrm{BB'}}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{BB'}}=3:2$에서

$\sqrt{2}(a-4):\sqrt{2}=3:2$

$2(a-4)=3$에서 $a=\dfrac{11}{2}$



[다른 풀이1]

두 점 $\mathrm{A}(4,\ a)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $\mathrm{A'}(a,\ 4)$, $\mathrm{B'}(1,\ 2)$이다.

두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.

따라서 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮은 삼각형이다.

두 삼각형 APA′, BPB′의 넓이의 비가 $9:4$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $3:2$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:2$

점 P는 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3\times2+2\times4}{3+2},\ \frac{3\times1+2\times a}{3+2}\right)$$

즉 $\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{2a+3}{5}\right)$

두 직선 AB, A′B′은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 두 직선 AB, A′B′의 교점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$$\frac{14}{5}=\frac{2a+3}{5}$$

$\therefore\ a=\dfrac{11}{2}$

[다른 풀이2]

두 점 $\mathrm{A}(4,\ a)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $\mathrm{A'}(a,\ 4)$, $\mathrm{B'}(1,\ 2)$이다.

두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.

따라서 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮은 삼각형이다.

점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리와 점 B와 직선 $y=x$ 사이의 거리의 비가 닮음비 3 : 2와 같다.

$$\frac{|4-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} : \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3:2$$

$2(a-4)=3$ ($\because a>4$)

$\therefore\ a=\frac{11}{2}$

[참고]

a의 값에 따라 두 삼각형 APA′, BPB′의 존재 여부와 두 삼각형의 닮음비가 달라진다.

(1) $a<-1$ 또는 $-1<a<3$ 또는 $a>5$일 때
두 삼각형 APA′, BPB′이 존재하고, 점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리가 점 B와 직선 $y=x$ 사이의 거리보다 크므로 삼각형 APA′의 넓이가 삼각형 BPB′의 넓이보다 크다.

(2) $a=3$일 때
두 직선 AB, A′B′이 서로 평행하므로 두 삼각형 APA′, BPB′이 존재하지 않는다.

(3) $a=5$일 때
두 삼각형 APA′, BPB′이 존재하고, 점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리와 점 B와 직선 $y=x$ 사이의 거리가 같으므로 삼각형 APA′의 넓이와 삼각형 BPB′의 넓이가 같다.

(4) $3<a<4$ 또는 $4<a<5$일 때
두 삼각형 APA′, BPB′이 존재하고, 점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리가 점 B와 직선 $y=x$ 사이의 거리보다 작으므로 삼각형 APA′의 넓이가 삼각형 BPB′의 넓이보다 작다.

(5) $a=4$일 때
점 A가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 삼각형 APA′이 존재하지 않는다.

(6) $a=-1$일 때
점 A, A′, B, B′이 모두 직선 $y=-x+3$ 위에 있으므로 두 삼각형 APA′, BPB′이 존재하지 않는다.

19. [출제의도] 원의 접선의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 점의 좌표를 구한다.

점 P의 좌표를 P$(a, 0)$이라 하자.

직각삼각형 OPQ에서 피타고라스 정리를 이용하면

$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2$$
$$=a^2-1$$

$x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=2^2$

원 C_2는 중심이 $(4, -3)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원 C_2의 중심을 A라 하면 A$(4, -3)$이다.

직각삼각형 APR에서 피타고라스 정리를 이용하면

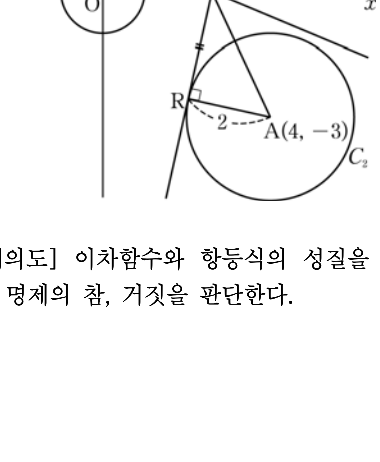
$$\overline{PR}^2=\overline{AP}^2-\overline{AR}^2$$
$$=\{(a-4)^2+(0+3)^2\}-2^2$$
$$=a^2-8a+21$$

$\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

$a^2-1=a^2-8a+21$

$8a=22$

$\therefore\ a=\frac{11}{4}$



20. [출제의도] 이차함수와 항등식의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. (참) $k=1$일 때
$f(x)=(x-1)^2-2$이므로 A$(1, -2)$
$\therefore\ \overline{OA}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

ㄴ. (참) $y=k(x-1)^2-4k+2$를 k에 대하여 정리하면
$k\{(x-1)^2-4\}+2-y=0$
이 등식이 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 성립하려면
$(x-1)^2=4,\ 2-y=0$
이어야 하므로
$x=3,\ y=2$ 또는 $x=-1,\ y=2$
따라서 곡선 $y=f(x)$는 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 점 $(3, 2)$, $(-1, 2)$를 지난다.

ㄷ. (참) A$(1, -4k+2)$, B$(0, -3k+2)$이고
직선 AB의 기울기는
$\frac{(-4k+2)-(-3k+2)}{1-0}=-k$
따라서 직선 AB의 방정식은
$y=-kx-3k+2$
이 등식을 k에 대하여 정리하면
$k(x+3)+y-2=0$
이 등식이 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 성립하려면
$x+3=0,\ y-2=0$
이어야 하므로
$x=-3,\ y=2$
따라서 직선 AB는 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, 2)$를 지난다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 직선의 기울기를 구한다.

원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{OH}=a$, $\overline{HP}=b$라 하면 두 삼각형 OHP, OHA는 모두 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=10$ …… ㉠

$a^2+(b+3)^2=25$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=1$

직선 l의 기울기를 m이라 하면

직선 l의 방정식은 $y=m(x-4)+3$이고 원의 중심 O와 직선 $mx-y-4m+3=0$ 사이의 거리가 3이므로

$\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$|-4m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$16m^2-24m+9=9m^2+9$

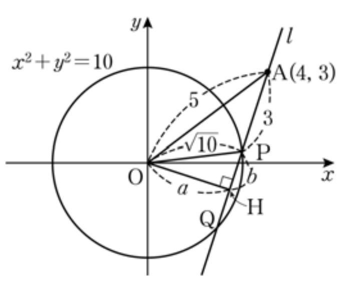
$7m^2-24m=0$

$m(7m-24)=0$

$\therefore\ m=0$ 또는 $m=\frac{24}{7}$

직선 l의 기울기는 양수이므로

$m=\frac{24}{7}$



[다른 풀이1]

직선 AO와 원의 교점을 그림과 같이 각각 B, C라 하면

$\overline{AB}=\overline{AO}-\overline{OB}=5-\sqrt{10}$

$\overline{AC}=\overline{AO}+\overline{OC}=5+\sqrt{10}$

이고 원의 성질에 의하여

$\overline{AP}\times\overline{AQ}=\overline{AB}\times\overline{AC}$

$3\times\overline{AQ}=(5-\sqrt{10})(5+\sqrt{10})$

$\therefore\ \overline{AQ}=5$

$\overline{PQ}=2$이고 현 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overline{PM}=1$

직각삼각형 OMP에서

$\overline{OM}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3$

직선 l의 기울기를 m이라 하면

직선 l의 방정식은 $y=m(x-4)+3$이고 원의 중심 O와 직선 $mx-y-4m+3=0$ 사이의 거리가 3이므로

$\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$|-4m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$16m^2-24m+9=9m^2+9$

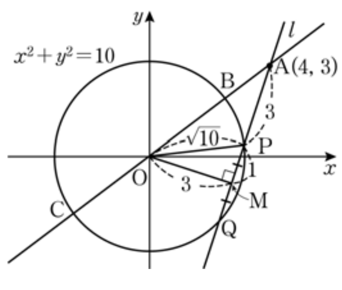
$7m^2-24m=0$

$m(7m-24)=0$

$\therefore\ m=0$ 또는 $m=\frac{24}{7}$

직선 l의 기울기는 양수이므로

$m=\frac{24}{7}$



[다른 풀이2]

점 P의 좌표를 P(a, b)라 하면

점 P는 원 $x^2+y^2=10$위의 점이므로

$a^2+b^2=10$ …… ㉠

선분 AP의 길이는 3이므로

$(a-4)^2+(b-3)^2=9$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{79}{25}$, $b=\frac{3}{25}$이다.

따라서 직선 l의 기울기는

$$\frac{3-b}{4-a}=\frac{3-\frac{3}{25}}{4-\frac{79}{25}}=\frac{72}{21}=\frac{24}{7}$$ 이다.

22. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 주어진 항을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_3=2a_2$에서 $\frac{a_3}{a_2}=2=r$

$\therefore\ a_4=a_1\times r^3=3\times 2^3=24$

23. [출제의도] i의 성질을 이용하여 복소수의 거듭제곱을 계산한다.

$i^2=-1,\ i^4=1$이므로

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

$(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4$
$=(2i)^4=2^4\times i^4=16$

24. [출제의도] 판별식을 이용하여 연립방정식의 해를 구한다.

$2x-y=5$에서 $y=2x-5$

위의 식을 $x^2-2y=k$에 대입하면

$x^2-2(2x-5)=k$

$x^2-4x+10-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(10-k)=0$

$\therefore\ k=6$

$x^2-4x+4=0$ 을 풀면 $x=2$ 이므로

$y=2x-5=-1$

$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=-1$

$\therefore\ \alpha+\beta+k=2+(-1)+6$
$=7$

25. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 두 수를 구한다.

$\log_a b=\frac{4}{3}$ 에서 로그의 정의에 의하여

$b=a^{\frac{4}{3}}$ …… ㉠

$\log_9 a+\log_3 b=\log_9 a+\log_9 b^2$
$=\log_9 ab^2=11$

에서

$ab^2=9^{11}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2=a^{\frac{11}{3}}=9^{11}$

$\therefore\ a=9^3$

㉠에서 $b=a^{\frac{4}{3}}=(9^3)^{\frac{4}{3}}=9^4$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{9^4}{9^3}=9$

26. [출제의도] 집합의 연산의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 집합의 원소의 개수를 구한다.

어느 고등학교의 2학년 학생 212명의 집합을 U, 문학 체험을 신청한 학생들의 집합을 A, 역사 체험을 신청한 학생들의 집합을 B, 과학 체험을 신청한 학생들의 집합을 C라 하자.

$n(U)=212$

(가)에서 $n(A)=80,\ n(B)=90$

(나)에서 $n(A\cap B)=45$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=80+90-45=125$

(다)에서 $n(A^C\cap B^C\cap C^C)=12$이고

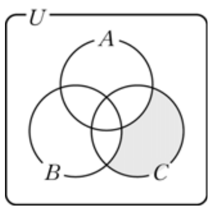
$A^C\cap B^C\cap C^C=(A\cup B\cup C)^C$

이므로

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)$
$=212-12=200$

따라서 과학 체험만 신청한 학생의 수는

$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)=200-125=75$



27. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

가용 대역폭이 B(Hz)로 일정하고, 수신 신호 전력이 1.2W일 때, 잡음 전력이 0.4W인 채널 용량을 C_1(bps)이라 하면

$C_1=B\log_2\left(1+\frac{1.2}{0.4}\right)=B\log_2 4=2B$

가용 대역폭이 B(Hz)로 일정하고, 수신 신호 전력이 1.2W일 때, 잡음 전력이 a(W)인 채널 용량을 C_2(bps)라 하면

$C_2=B\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)$

$C_2=3C_1$이므로

$B\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)=3\times 2B$

$\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)=6$

로그의 정의에 의하여

$1+\frac{1.2}{a}=2^6$

$\frac{1.2}{a}=63$

$\therefore\ a=\frac{1.2}{63}=\frac{2}{105}$

$p=105,\ q=2$이므로

$p+q=107$

28. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 주어진 집합의 모든 원소의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d로 놓으면

$a_{11}+a_{21}=82$에서

$2a+30d=82$

$a_{11}-a_{21}=6$에서

$-10d=6$ 즉, $d=-\frac{3}{5}$

$a=41-15d=41-15\times\left(-\frac{3}{5}\right)$
$=50$

$\therefore\ a_n=50+(n-1)\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

a_n이 자연수이려면 $n-1=5k$, 즉 $n=5k+1$(k는 음이 아닌 정수)의 형태이어야 하고,

$a_n=50+(n-1)\times\left(-\frac{3}{5}\right)>0$에서

$n<\frac{253}{3}=84.3\cdots$

이므로 n이 가질 수 있는 값은

1, 6, 11, ⋯, 81

이고 그 개수는 17이다.

수열 $a_1,\ a_6,\ a_{11},\ \cdots,\ a_{81}$은 첫째항이 50이고 제17항이 2인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{17(50+2)}{2}=442$

29. [출제의도] 수열의 규칙을 발견하여 조건을 만족시키는 자연수를 구한다.

집합 $A_n=\{x\,|\,(x-n)(x-2n+1)\le 0\}$에서

$(x-n)(x-2n+1)\le 0$

$n\le x\le 2n-1$

$\therefore\ A_n=\{x\,|\,n\le x\le 2n-1\}$

$25\in A_n$인 n의 값의 범위를 구하면

$n\le 25\le 2n-1$

$n\le 25$이고 $n\ge 13$에서 $13\le n\le 25$

$\therefore\ a_n=\begin{cases}-1 & (1\le n\le 12 \text{ 또는 } n\ge 26)\\ 1 & (13\le n\le 25)\end{cases}$

$\sum_{k=1}^{m}a_k=-20$에서 $m\ge 26$이므로

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{25}a_k+\sum_{k=26}^{m}a_k$
$=(-1)\times 12+1\times 13+(-1)\times(m-25)$
$=-m+26=-20$

$\therefore\ m=46$

30. [출제의도] 조건을 만족시키는 점이 나타내는 부등식의 영역을 이용하여 최댓값을 구한다.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}}\ \ge\ \overline{\mathrm{A'P}}$

이고 (나)에서

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}\ \le 6$

인 점 Q가 존재하므로

$\overline{\mathrm{A'P}}\le 6$

이어야 한다.

주어진 조건을 모두 만족시키는 점 P의 좌표를

$\mathrm{P}(x,\ y)$ $(x>0,\ y>0)$

로 놓으면 $\overline{\mathrm{A'P}}\le 6$에서

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}\le 6$

$\therefore\ x^2+(y+1)^2\le 36$ $(x>0,\ y>0)$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 점 P가 나타내는 영역 D는 그림과 같이 중심이 A′(0, −1)이고 반지름의 길이가 6인 원의 둘레와 그 내부를 포함하는 영역 중 제1사분면에 있는 부분이다.

$x+y=k$로 놓고 직선 $x+y=k$가 영역 D와 만나도록 움직일 때, y절편 k가 최대가 되는 경우는 직선 $x+y=k$가 원 $x^2+(y+1)^2=36$에 접할 때이다.

원의 중심 $(0,\ -1)$과 직선 $x+y-k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 6과 같아야 하므로

$\frac{|-1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=6$

$k+1=6\sqrt{2}$ $(\because k>0)$

$\therefore\ k=-1+6\sqrt{2}$

$p=-1,\ q=6$이므로 $p+q=5$