2014학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[A형]

1	⑤	**2**	④	**3**	②	**4**	③	**5**	①
6	①	**7**	②	**8**	④	**9**	③	**10**	②
11	②	**12**	⑤	**13**	④	**14**	①	**15**	④
16	③	**17**	⑤	**18**	⑤	**19**	①	**20**	③
21	⑤	**22**	18	**23**	27	**24**	14	**25**	9
26	17	**27**	505	**28**	64	**29**	553	**30**	79

1. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산하기

$2^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=2^2=4$

2. [출제의도] 행렬의 실수배와 뺄셈 계산하기

$2A-B=2\begin{pmatrix}-1&1\\2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&1\\6&6\end{pmatrix}$

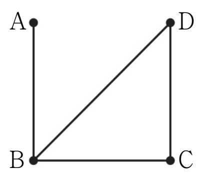
따라서 행렬 $2A-B$의 모든 성분의 합은 8

3. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

4. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

그림과 같이 주어진 그래프의 꼭짓점을 A, B, C, D라 할 때, 이를 행렬로 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}\mathrm{A}&\mathrm{B}&\mathrm{C}&\mathrm{D}\end{matrix}\\ \begin{matrix}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\\\mathrm{C}\\\mathrm{D}\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

따라서 행렬의 성분 중 1의 개수는 8

[다른 풀이]

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 그래프의 변의 개수의 2배이므로 8

5. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$X=(A^{-1})^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix}$

6. [출제의도] 로그부등식 이해하기

로그의 진수는 양수이므로 $x+1>0$, $x-5>0$

$\therefore\ x>5$ ……㉠

$\log_3(x+1)(x-5)<\log_3 27$

$(x+1)(x-5)<27$

$x^2-4x-32<0$

$(x+4)(x-8)<0$

$\therefore\ -4<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $5<x<8$

$5<x<8$을 만족시키는 정수 x는 6, 7

따라서 정수 x의 개수는 2

7. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_3=\frac{1}{36}$에서 $a^2r^2=\frac{1}{6^2}$이므로

$ar=\frac{1}{6}$ $(\because\ ar>0)$ ……㉠

$a_5=\frac{4}{81}$에서 $ar^4=\frac{4}{81}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $r=\frac{2}{3}$, $a=\frac{1}{4}$

따라서 $a_4=ar^3=\frac{2}{27}$

8. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$3^x=t\,(t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-11t+28=0$

$(t-4)(t-7)=0$

$t=4$ 또는 $t=7$

$3^\alpha=4$, $3^\beta=7$이라 하면

$9^\alpha+9^\beta=(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2=16+49=65$

따라서 $9^\alpha+9^\beta=65$

9. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$2a_1=a_2+3$ ……㉠

$a_{n+1}=a_n+3n$에서 $a_2=a_1+3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a_1=6$

따라서

$$a_{10}=a_1+\sum_{n=1}^{9}3n=6+\frac{3\times 9\times 10}{2}=141$$

10. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-\frac{a_n}{9^n}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{a_n}{9^n}\right)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{9^n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{9^n}{2a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\times\frac{a_n}{9^n}+\frac{1}{9^n}}=\frac{1}{4}$

11. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

처음 물의 높이가 64 cm일 때, 실험을 시작한 지 40분 후의 물의 높이가 16 cm이므로

$k=\frac{C}{40}(\log 64-\log 16)=\frac{C}{20}\log 2$

실험을 시작한 지 x분 후의 물의 높이가 2 cm이므로

$\frac{C}{20}\log 2=\frac{C}{x}(\log 64-\log 2)=\frac{C}{x}\times 5\log 2$

따라서 $x=20\times 5=100$

12. [출제의도] 함수의 우극한과 좌극한 이해하기

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to 1+0}f(x)=1$

$1-x=t$라 하면 $x\to 1+0$일 때, $t\to -0$이므로

$\lim_{x\to 1+0}f(1-x)=\lim_{t\to -0}f(t)=2$

따라서 $\lim_{x\to 1+0}f(x)f(1-x)=1\times 2=2$

13. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\overline{\mathrm{OR}}=1+r$, $\overline{\mathrm{QR}}=2+r$

$\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OR}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(1+r)^2=1\times(2+r)$

$r^2+r-1=0$

따라서 $r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because\ 0<r<\sqrt{2})$

14. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$x^2+y^2=1$ ……㉠

$(x-1)^2+y^2=r^2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x=\frac{1}{2}(2-r^2)$이므로

$f(r)=\frac{1}{2}(2-r^2)$

따라서
$$\lim_{r\to\sqrt{2}-0}\frac{f(r)}{4-r^4}=\lim_{r\to\sqrt{2}-0}\frac{2-r^2}{2(4-r^4)}=\lim_{r\to\sqrt{2}-0}\frac{1}{2(2+r^2)}=\frac{1}{8}$$

15. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_c b=\frac{1}{2}\log_a b$이므로 $\log_b c=2\log_b a$

$\therefore\ c=a^2$

$\log_b c=\frac{1}{3}\log_a c$이므로 $\log_c b=3\log_c a$

$\therefore\ b=a^3$

a, b, c는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로

$a=2$, $b=8$, $c=4$

따라서 $a+2b+3c=30$

16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

주어진 식의 양변에 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$을 곱하면

$\frac{2n+1}{n^4}\times\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$이므로

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2a_{n+1}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2a_n+\boxed{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}$

이다. $b_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2a_n$이라 하면, $b_1=0$이고

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{2n+1}{(n+1)^2-n^2}\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$이므로

$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n^2}-\boxed{\frac{1}{(n+1)^2}}$ $(n\geq 1)$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$
$$=0+\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right\}$$
$$=1-\frac{1}{n^2}$$ $(n\geq 2)$이고, $b_1=0$이므로

$b_n=\boxed{\frac{n^2-1}{n^2}}$ $(n\geq 1)$

이다. 그러므로

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \boxed{\frac{n^2-1}{n^2}}\times\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 & (n\geq 2)\end{cases}$$

이다.

$\therefore\ f(n)=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $g(n)=\frac{1}{(n+1)^2}$

$h(n)=\frac{n^2-1}{n^2}$

따라서 $\frac{f(1)\times h(4)}{g(7)}=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{15}{16}}{\frac{1}{64}}=45$

17. [출제의도] 함수의 연속의 뜻 이해하기

i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로

$f(x)=ax^2+bx-2$

ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx-2}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{ax^2}{x^{2n}}+\frac{bx}{x^{2n}}-\frac{2}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

iii) $x=1$일 때, $f(1)=\frac{a+b-1}{2}$

iv) $x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{a-b-3}{2}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

① $x=-1$에서 연속이므로

$a-b-2=-1=\frac{a-b-3}{2}$

$\therefore\ a-b=1$ ……㉠

② $x=1$에서 연속이므로

$a+b-2=1=\frac{a+b-1}{2}$

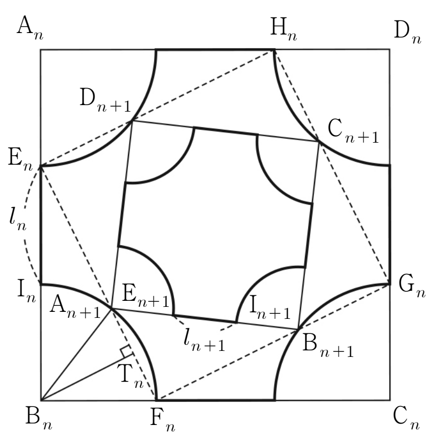
$\therefore\ a+b=3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=1$

따라서 $ab=2$

18. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

그림과 같이 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$에서 점 B_n을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n$을 반지름으로 하는 사분원이 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 만나는 점을 I_n이라 하고, $\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{I}_n}=l_n$이라 하자.



$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}=l_n$, $\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{B}_n}=2l_n$이므로 $\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}=\sqrt{5}\,l_n$

점 B_n에서 선분 $\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1}$에 내린 수선의 발을 T_n이라 하자.

$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n\mathrm{T}_n \backsim \triangle\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n\mathrm{B}_n$이므로

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}:\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{T}_n}=\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}:\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{B}_n}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{F}_n\mathrm{T}_n}=\frac{(\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n})^2}{\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}}=\frac{\sqrt{5}}{5}l_n$

$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1}$이 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1}}=2\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{T}_n}=\frac{2\sqrt{5}}{5}l_n$

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_n}=\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}-\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}l_n$

$\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_n\mathrm{D}_{n+1}\equiv\triangle\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1}$이므로

$\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{B}_{n+1}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}l_n$

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=\frac{\sqrt{65}}{5}l_n$

$l_{n+1}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=\frac{\sqrt{65}}{15}l_n$이므로

$S_{n+1}=\frac{13}{45}S_n$

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 $S_1=9-\pi$이고, 공비가 $\frac{13}{45}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{9-\pi}{1-\frac{13}{45}}=\frac{45}{32}(9-\pi)$

19. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

함수 $y=\log_2 x$는 함수 $y=2^x$의 역함수이므로

점 Q_n의 좌표는 $(2^n, n)$

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 방정식은 $x+y-2^n-n=0$이고,

원점 O와 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 사이의 거리는 $\frac{2^n+n}{\sqrt{2}}$,

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 $\sqrt{2}\,(2^n-n)$ ($\because\ 2^n>n$)

$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\times\frac{2^n+n}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}(2^n-n)$

$=\frac{4^n-n^2}{2}$

따라서 $2\sum_{n=1}^{5}S_n=\sum_{n=1}^{5}(4^n-n^2)$

$=\frac{4(4^5-1)}{4-1}-\frac{5\times6\times11}{6}$

$=1309$

20. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

함수 $y=|x^2-9|$의 그래프는 y축 대칭이므로

$a_2=-a_3$

이 등차수열의 공차는 $a_3-a_2=2a_3$이므로

$a_4=a_3+2a_3=3a_3$

점 (a_3, k)는 곡선 $y=-x^2+9$ 위의 점이므로

$-{a_3}^2+9=k$ ……㉠

점 (a_4, k)는 곡선 $y=x^2-9$ 위의 점이므로

${a_4}^2-9=9{a_3}^2-9=k$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $10k=72$

따라서 $k=\frac{36}{5}$

21. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. $(B+A+E)B=E$이므로

$B(B+A+E)=E$이고

$(B+A+E)B=B(B+A+E)$

$B^2+AB+B=B^2+BA+B$

$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄴ. $A^2+2A+E=E$, $(A+E)^2=E$

$\therefore\ (A+E)^{-1}=A+E$ (참)

ㄷ. $B^2+AB+B=E$

$B^2+(A+E)B=E$

$B^2+(A+E)B-2E=-E$

$B^2+(A+E)B-2(A+E)^2=-E$

$\{B-(A+E)\}\{B+2(A+E)\}=-E$

$(B-A-E)(-B-2A-2E)=E$

$\therefore\ B-A-E$의 역행렬이 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_3=S_3-S_2=(3^3-1)-(3^2-1)=18$

23. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기

$\begin{pmatrix}a-5 & 4\\ 2 & a-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix}a-5 & 4\\ 2 & a-7\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로 $(a-5)(a-7)-8=0$

$(a-3)(a-9)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=9$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 27

24. [출제의도] 함수의 극한의 성질 이해하기

$\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이고 $\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}=6$

이므로 $\lim_{x\to-2}(\sqrt{x+a}-b)=0$

$\therefore\ b=\sqrt{a-2}$

$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2}}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})=2\sqrt{a-2}=6$

$\therefore\ a=11$, $b=3$

따라서 $a+b=14$

25. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$3^{a-1}=2$에서 $3^a=6$

$5=6^{2b}=(3^a)^{2b}=3^{2ab}$

따라서 $5^{\frac{1}{ab}}=(3^{2ab})^{\frac{1}{ab}}=3^2=9$

[다른 풀이]

$3^{a-1}=2$에서 $3^a=6$이므로 $a=\log_3 6$

$6^{2b}=5$이므로 $b=\frac{1}{2}\log_6 5$

$ab=\frac{1}{2}\log_3 6\times\log_6 5=\frac{1}{2}\log_3 5$

따라서 $5^{\frac{1}{ab}}=5^{2\log_5 3}=9$

26. [출제의도] 지수부등식을 활용하여 추론하기

주어진 부등식의 양변에 $3^{-2}\times3^p$을 곱하면

$(3^x-3^{-2})(3^x-3^p)\le0$

p가 자연수이므로 $3^{-2}\le3^x\le3^p$

$\therefore\ -2\le x\le p$

$-2\le x\le p$를 만족시키는 정수 x는

-2, -1, 0, 1, $\cdots$, p

이때, 정수 x의 개수는 $p+3=20$

따라서 $p=17$

27. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=\frac{6^n}{x}$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는 6^n의 양의 약수의 개수와 같다.

$6^n=2^n\times3^n$이므로 $a_n=(n+1)^2$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(n+1)^2$

$=\sum_{n=1}^{10}(n^2+2n+1)$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}+10$

$=505$

28. [출제의도] 무한수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

직각삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$에서

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n = \dfrac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{OP}_n} = n+2$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_n} = \dfrac{1}{2}(n+2)$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(n+2)$

$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OQ}_n} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \dfrac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}$

S_n은 $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이에서 원 C_n의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$을 빼면 된다.

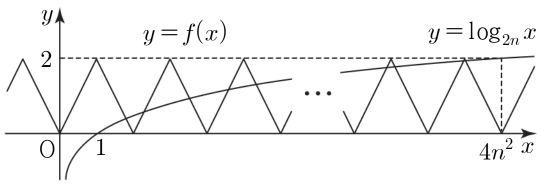
$\therefore\ S_n = \dfrac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8} - \dfrac{n\pi}{6}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\dfrac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8} - \dfrac{n\pi}{6}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = a$$

따라서 $3a^2 = 64$

29. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 곡선 $y = \log_{2n} x$는 점 $(4n^2, 2)$를 지난다.



그러므로 자연수 k에 대하여 닫힌 구간 $[k, k+1]$에서 곡선 $y = \log_{2n} x$와 함수 $y = f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 1이다. (단, $1 \le k \le 4n^2 - 1$)

$\therefore\ a_n = 4n^2 - 1$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} a_n = \sum_{n=1}^{7} (4n^2 - 1)$

$\displaystyle = 4 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 7 = 553$

30. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질 이해하기

(가)에서 $f(a) + g(b) = 2 + \dfrac{1}{4}$이므로

$f(a) = 2,\ g(b) = \dfrac{1}{4}$

(나)에서 $g(b) = \dfrac{1}{4}$이므로 $g(a) \neq 0$

이때 $g\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1 - g(a)$이므로

$g(a) = 1 - g(a) + \dfrac{1}{4}$, 즉 $g(a) = \dfrac{5}{8}$

$\log a = f(a) + g(a) = 2 + \dfrac{5}{8} = \dfrac{21}{8}$

$\therefore\ a = 10^{\frac{21}{8}}$

(다)에서 $g(b) \neq 0$이므로 $f\left(\dfrac{1}{b}\right) = -1 - f(b)$,

$a^5 = 10^{\frac{105}{8}} = 10^{13 + \frac{1}{8}}$에서 $f(a^5) = 13$이므로

$f(b) = -1 - f(b) + 13$, 즉 $f(b) = 6$

$\log b = f(b) + g(b) = 6 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{4}$

$\therefore\ b = 10^{\frac{25}{4}}$

$\therefore\ ab = 10^{\frac{21}{8} + \frac{25}{4}} = 10^{\frac{71}{8}}$

따라서 $m + n = 79$