2014학년도 6월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 수학 영역[A형] •

수학 A형 정 답

1	③	2	①	3	②	4	④	5	③
6	①	7	③	8	②	9	⑤	10	③
11	①	12	⑤	13	④	14	②	15	⑤
16	⑤	17	④	18	③	19	②	20	①
21	④	22	16	23	18	24	11	25	125
26	27	27	32	28	30	29	35	30	25

해 설

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$9^{\frac{1}{2}}\times 3^{-1}=(3^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{3}=3\times\frac{1}{3}=1$

2. [출제의도] 행렬의 덧셈 계산하기

$A=B+E=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-1&2\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 행렬의 성분 계산하기

$a_{ij}=i+3j$이므로 $a_{21}=2+(3\times1)=5$이다.

4. [출제의도] 행렬의 연산 추론하기

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$이고

$A^2+B^2=\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}AB+BA&=(A+B)^2-(A^2+B^2)\\&=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&4\\-2&-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $AB+BA=\begin{pmatrix}2&4\\-2&-4\end{pmatrix}$이다.

5. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}\le\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}$이다.

밑 $\frac{1}{2}$이 1보다 작으므로

$2x+1\ge 3x-3$

이다. 그러므로 $x\le 4$이다.

따라서 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}\le\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$을 만족시키는 자연수가 1, 2, 3, 4이므로 자연수 x의 합은 $1+2+3+4=10$이다.

6. [출제의도] 행렬의 거듭제곱 이해하기

$A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$에 대하여

$A^2=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$이다.

$A^2=E$의 양변에 행렬 A를 곱하면 $A^3=A$이다.

그러므로 $A^2+A^3=E+A$에서 $A+E=\begin{pmatrix}3&-1\\3&-1\end{pmatrix}$이다.

따라서 모든 성분의 합은 4이다.

7. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

-3의 거듭제곱근 중 실수는 없으므로

$f_2(-3)=0$이다.

-2의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{-2}$ 오직 한 개이므로

$f_3(-2)=1$이다.

5의 네제곱근 중 실수는 $\sqrt[4]{5}$, $-\sqrt[4]{5}$로 두 개이므로

$f_4(5)=2$이다.

따라서 $f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)=3$이다.

8. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식 이해하기

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하자.

식 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$를 대입하여 정리하면

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이므로 $a=2,\ c=3$이다. 같은 방법으로 식 $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$에 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$를 대입하여 정리하면 $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$이므로 $b=-1,\ d=2$이다.

$a=2,\ b=-1,\ c=3,\ d=2$이므로 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}$이다.

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$이므로

$p=0,\ q=7$이다. 따라서 $p+q=7$이다.

[다른풀이 1]

두 등식 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$를 행렬의 곱셈과 연관지어 보면 등식

$A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}$이다.

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$이므로

$p=0,\ q=7$이다. 따라서 $p+q=7$이다.

[다른풀이 2]

행렬의 성질에 의해

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}&=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이므로 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$이다. 그러므로 $p=0,\ q=7$이다.

따라서 $p+q=7$이다.

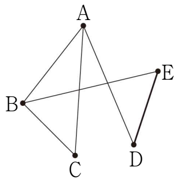
9. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

행렬 M이 아래와 같으므로

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}A&B&C&D&E\end{matrix}\\ \begin{matrix}A\\B\\C\\D\\E\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

[행렬 M]

행렬 M이 나타내는 그래프는 다음과 같다.



따라서 그래프 G에서 추가해야 할 변은 DE이다.

10. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 계산하기

조건 (가)를 변형하면

$(B-3E)A=E$

이다. 역행렬의 정의에 의해 $A^{-1}=B-3E$이고,

정리하면 $B=A^{-1}+3E$이다.

조건 (나)에서 행렬 A^{-1}의 모든 성분의 합이 15이고 단위행렬 E의 모든 성분의 합이 2이므로 행렬 B의 모든 성분의 합은 $15+3\times2=21$이다.

(참고)

행렬 $A+B$의 모든 성분의 합은

(행렬 $\boldsymbol{A}$의 성분의 합)+(행렬 $\boldsymbol{B}$의 성분의 합)

이다.

11. [출제의도] 행렬의 거듭제곱 추론하기

$A+B=E$에서 $A=E-B$이다.

$(E-A)(E-B)=E$에 $E-B=A$를 대입하여 정리하면

$(E-A)(E-B)=(E-A)A=-A^2+A=E$

이다. 정리하면 $A^2-A+E=O$이고 양변에 행렬 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

이다. 따라서 $A^3+E=O$ 이고 $A^3=-E$이다.

같은 방법으로 $(E-A)(E-B)=E$에 $B=E-A$을 대입하여 정리하면

$B^3=-E$

이다. 따라서 $A^6+B^6=(A^3)^2+(B^3)^2=E+E=2E$이다.

그러므로 A^6+B^6의 모든 성분의 합은 4이다.

[다른풀이]

조건을 이용하여 행렬의 거듭제곱을 추론한다.

$(E-A)(E-B)=E-(A+B)+AB=E$이므로

$A+B=AB=E$이고

$AB=BA$

이다. 또한

$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=E-2E=-E$

$A^4+B^4=(A^2+B^2)^2-2A^2B^2=E-2E=-E$

이므로

$$\begin{aligned}A^6+B^6&=(A^4+B^4)(A^2+B^2)-A^2B^2(A^2+B^2)\\&=(-E)^2-E(-E)=2E\end{aligned}$$

이다. 그러므로 모든 성분의 합은 4이다.

12. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활 문제 해결하기

먼저 주어진 등식 $T_iV_i^{\,\gamma-1}=T_fV_f^{\,\gamma-1}$에 기체몰 열용량비 $\gamma=\frac{5}{3}$를 대입하여 정리하면

$T_iV_i^{\frac{5}{3}-1}=T_fV_f^{\frac{5}{3}-1}$

$T_iV_i^{\frac{2}{3}}=T_fV_f^{\frac{2}{3}}$

이다. 문제의 조건에서 $T_i=480$, $V_i=5$이고

$T_f=270$이므로 각각을 $T_iV_i^{\frac{2}{3}}=T_fV_f^{\frac{2}{3}}$에 대입하여 정리하면

$480\times5^{\frac{2}{3}}=270\times V_f^{\frac{2}{3}}$

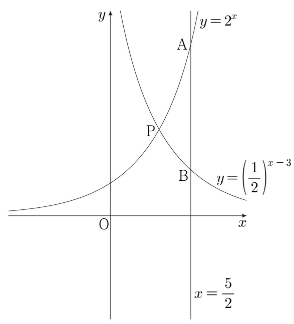
$16\times5^{\frac{2}{3}}=9\times V_f^{\frac{2}{3}}$

$V_f^{\frac{2}{3}}=\frac{16}{9}\times5^{\frac{2}{3}}$

$V_f=\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$V_f=\frac{64}{27}\times5=\frac{320}{27}$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기



함수 $y=2^x$에 $x=\frac{5}{2}$를 대입하면

$y=2^{\frac{5}{2}}=2^2\cdot2^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}$

이고 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$에 $x=\frac{5}{2}$를 대입하면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

이다. 따라서 두 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{5}{2},\ 4\sqrt{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\ \sqrt{2}\right)$이므로 선분 AB의 길이는

$4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ 이다.

14. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 이용하여 문제 해결하기

먼저 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ 이 만나는 점 P의 x좌표를 지수방정식을 이용하여 구하자.

$2^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}$

$2^k=2^{3-k}$

$k=3-k$

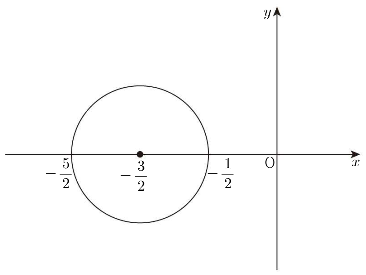
에서 $k=\frac{3}{2}$이다.

행렬 $M=\begin{pmatrix} x+\frac{3}{2} & y \\ y & -x-\frac{3}{2} \end{pmatrix}$에서

$$M^2=\begin{pmatrix} x+\frac{3}{2} & y \\ y & -x-\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+\frac{3}{2} & y \\ y & -x-\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2 & 0 \\ 0 & \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로 도형 C는 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1$인 원이다.



도형 C 위의 점에서 원점 O까지의 거리의 최댓값은 원점 O에서 점 $\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$까지의 거리이다.

따라서 최댓값은 $\frac{5}{2}$ 이다.

15. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 실생활 문제 해결하기

그릇 A에 들어 있는 물의 양의 $\frac{1}{2}$을 그릇 B에 부은 후에 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 양은 각각

$\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a+b$

이다. 그릇 B에 들어 있는 물의 양의 $\frac{1}{3}$을 그릇 A에 부은 후에 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 양은 각각

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a+b\right)$, $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a+b\right)$

이다. 이 과정을 시행한 후 두 그릇에 들어 있는 물의 양이 각각 200(ml), 300(ml)이므로

$200=\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a+b\right)=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$,

$300=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a+b\right)=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$

이다. 이를 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ...... ①

이고 행렬 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$의 역행렬 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$을 ①의 양변의 왼쪽에 각각 곱하면

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$

이다. 따라서 $\begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$s=2$, $t=-1$이다. 그러므로 $10s+t=19$ 이다.

16. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $B^2=A+E$를 $B^4=A+2E$에 대입하면 $(A+E)^2=A+2E$이다. 따라서 $A^2+A=E$이다. (참)

ㄴ. $B^2-A=E$에서 $B(B^2-A)=B$이므로 $BA=B^3-B$이다. 같은 방법으로 $(B^2-A)B=B$이므로 $AB=B^3-B$이다. 따라서 $AB=BA$이다.(참)

ㄷ. $A^2+A=E$에서 $A(A+E)=E$이고 $B^2=A+E$이므로 $AB^2=E$이다. 따라서 AB의 역행렬은 B이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른풀이]

ㄷ. $A^2+A=E$이므로 A는 역행렬을 가진다.

한편, $A=B^2-E$를 $B^4=A+2E$에 대입하여 정리하면 $B^4-B^2=E$, 즉, $B(B^3-B)=E$이다. 그러므로 B도 역행렬을 가진다. 따라서 행렬 AB의 역행렬이 존재한다. (참)

17. [출제의도] 지수법칙을 이용한 거듭제곱근 추론하기

$\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $\beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 라 두면

$\alpha\beta=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}$
$=\sqrt[3]{-1}=\boxed{-1}$

이다. $\alpha+\beta=x$ 라 하면

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$을 이용하여

삼차방정식 $x^3+3x-4=0$을 얻을 수 있다.

$x^3+3x-4=0$

$(x-1)(x^2+x+4)=0$

에서 이 방정식의 실근은 $x=1$뿐이므로 $\alpha+\beta=1$이다.

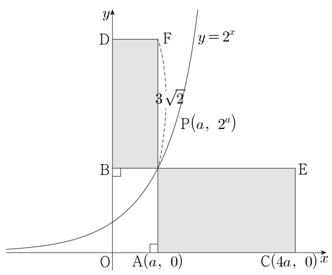
따라서 $\alpha+\beta=1$과 $\alpha\beta=\boxed{-1}$인 실수 α, β를 두 근으로 하는 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $\boxed{x^2-x-1=0}$이다. 이 이차방정식의 두 근 α, β가 $\beta<0<\alpha$이므로 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$이다.

따라서 $a=-1$, $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이므로

$a+10b=-1+10\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=4+5\sqrt{5}$ 이다.

18. [출제의도] 지수함수의 그래프와 지수방정식 이해하기

$\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PE}}=1:3$이므로 점 A, C의 좌표를 각각 A$(a,\ 0)$, C$(4a,\ 0)$이라 하면 점 P의 좌표는 $(a,\ 2^a)$이다.



직사각형 PFDB의 넓이는 $3\sqrt{2}a$이고 직사각형 PACE의 넓이는 $3a\cdot2^a$이다. 직사각형 PACE의 넓이는 직사각형 PFDB의 넓이의 2배이므로

$3a\cdot2^a=3\sqrt{2}a\times2$, $2^a=2\sqrt{2}$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$

점 E의 x좌표는 $4a=4\times\frac{3}{2}=6$이다.

[다른풀이]

□PFDB : □PACE = 1 : 2이고 $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PE}}=1:3$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{CE}}=1:\frac{2}{3}$

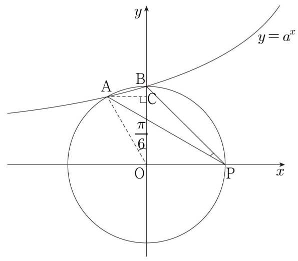
이다. $\overline{\mathrm{PF}}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{CE}}=\frac{2}{3}\times3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

이다. 점 P의 좌표를 $(a,\ 2^a)$이라 하면 $\overline{\mathrm{CE}}=2^a$이므로 $2\sqrt{2}=2^a$이고 $a=\frac{3}{2}$이다.

따라서 점 E의 x좌표는 $4a=4\times\frac{3}{2}=6$이다.

19. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기



그림의 직각삼각형 AOC에서 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이고

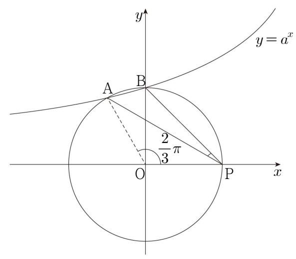
$\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이다. 따라서 점 A의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$y=a^x$에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}=a^{-\frac{1}{2}}$이고 $a=\frac{4}{3}$ 이다.

[다른풀이]

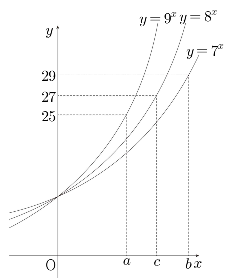


$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{12}$ 에서 원주각과 중심각의 관계에 의해

$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{6}$이므로 점 A의 x좌표는 $\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$,

y좌표는 $\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. $y=a^x$에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}=a^{-\frac{1}{2}}$ 이고 $a=\frac{4}{3}$ 이다.

20. [출제의도] 지수함수의 그래프 추론하기



$(3^a)^2=9^a=25$, $7^b=29$, $8^c=27$이고 $25<27<29$에서 $9^a<8^c<7^b$이므로 그림에서 세 양수 a, b, c의 대소 관계는 $a<c<b$이다.

[다른풀이]

(i) $3^a=5$과 $7^b=29$의 비교

$(3^a)^2=9^a=25$, $7^b=29$에서

$9^a - 7^b = 25 - 29 < 0$

$9^a < 7^b$, $9^a < 7^b < 9^b$

이므로 $9^a < 9^b$이다. 따라서 $a < b$이다.

(ii) $7^b = 29$과 $8^c = 27$의 비교

$7^b = 29$, $8^c = 27$에서

$8^c - 7^b = 27 - 29 < 0$

$8^c < 7^b$, $8^c < 7^b < 8^b$

이므로 $8^c < 8^b$이다. 따라서 $c < b$이다.

(iii) $3^a = 25$와 $8^c = 27$의 비교

$(3^a)^2 = 9^a = 25$, $8^c = 27$에서

$9^a - 8^c = 25 - 27 < 0$

$9^a < 8^c$, $9^a < 8^c < 9^c$

이므로 $9^a < 9^c$이다. 따라서 $a < c$이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 $a < c < b$이다.

21. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 문제 해결하기

행렬 $\begin{pmatrix} 2+2t-bt & t+1 \\ at-a & 2 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖기 위해서는 모든 실수 t에 대해

$2(2+2t-bt) - (t+1)(at-a) \neq 0$

즉, $at^2 + 2(b-2)t - 4 - a \neq 0$이 성립해야 한다.

(i) $a = 0$인 경우

모든 실수 t에 대하여 $2(b-2)t - 4 \neq 0$이 성립해야 하므로 $b = 2$이다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b) = (0,\ 2)$는 모든 실수 t에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} 2+2t-bt & t+1 \\ at-a & 2 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖도록 한다.

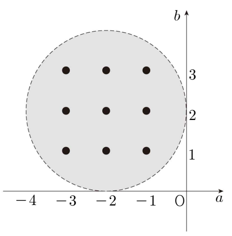
(ii) $a \neq 0$인 경우

모든 실수 t에 대해 $at^2 + 2(b-2)t - 4 - a \neq 0$이다. 즉, 이차방정식 $at^2 + 2(b-2)t - 4 - a = 0$의 실근이 존재하지 않아야 되므로

$\dfrac{D}{4} = (b-2)^2 - a(-4-a) < 0$

를 만족해야 한다.

식을 정리하면 $(a+2)^2 + (b-2)^2 < 4$이고, 영역은 다음 그림과 같다.



따라서 $(a+2)^2 + (b-2)^2 < 4$를 만족하는 부등식 영역 내부의 정수 순서쌍 (a, b)는

$(-1,\ 1)$, $(-1,\ 2)$, $(-1,\ 3)$

$(-2,\ 1)$, $(-2,\ 2)$, $(-2,\ 3)$

$(-3,\ 1)$, $(-3,\ 2)$, $(-3,\ 3)$

9개로 각각의 순서쌍은 모든 실수 t에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} 2+2t-bt & t+1 \\ at-a & 2 \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖도록 한다.

그러므로 (i)과 (ii)에 의해 정수 순서쌍 (a, b)의 개수는 10이다.

22. [출제의도] 역행렬을 이용하여 연립일차방정식 계산하기

등식 $A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -6 \end{pmatrix}$

이므로 $a = 22$, $b = -6$이고 $a + b = 16$이다.

23. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

주어진 그래프의 꼭짓점의 개수는 6이고 변의 개수는 9이다. 따라서 이 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬로 나타내면 6×6행렬이고 행렬의 성분 중 1의 개수는 $2\times 9 = 18$이다.

[다른풀이]

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬 중 한 가지를 구하면

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 행렬의 성분 중 1의 개수는 18이다.

24. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 연립일차방정식 이해하기

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 22 & a-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x = 0$, $y = 0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 22 & a-7 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$a(a-7) - 2\times 22 = 0$, $a^2 - 7a - 44 = 0$

$a = 11(\because a$는 양수$)$

이다.

25. [출제의도] 지수함수를 이용하여 문제 해결하기

$y = 5^{x^2-4x-2} = 5^{(x-2)^2-6}$에서 지수 $(x-2)^2 - 6$의 범위를 알아보자. $-1 \le x \le 4$일 때, $-6 \le (x-2)^2 - 6 \le 3$이다. 그러므로 $5^{-6} \le 5^{(x-2)^2-4} \le 5^3$이다.

따라서 최댓값은 125이다.

26. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$9^x - 4\cdot 3^{x+1} + k = 0$의 두 근을 $x = \alpha, \beta$라 하고

$3^x = X$라 두면 주어진 지수방정식은

$X^2 - 12X + k = 0$

이다. 이차방정식의 해는 $X = 3^\alpha$ 또는 $X = 3^\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해 $k = 3^\alpha \times 3^\beta = 3^{\alpha+\beta} = 3^3$이므로 $k = 27$이다.

27. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 이용하여 문제 해결하기

$BA = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -E$이다.

그러므로 $AB = BA$이다. 준식을 정리하면

$B^4A^8 = (BA)^4A^4 = (-E)^4A^4 = A^4$

이므로 행렬 A^4을 구하자.

행렬 A의 거듭제곱을 구하면

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 A^4의 모든 성분의 합은 32이다.

28. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 이용하여 문제 해결하기

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$에서

$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & 2ab \\ 2ac & a^2+bc \end{pmatrix}$

이므로 $a^2 + bc > 0$, $2ab > 0$, $2ac > 0$이다. 이를 정리하면 $ab > 0$, $ac > 0$

이다. 따라서 서로 다른 세 원소 a, b, c의 부호는 모두 같아야 한다. a, b, c가 모두 양수인 행렬 A의 개수는 집합 $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 양수 4개 중 서로 다른 3개를 선택하여 배열하는 방법의 수와 같으므로 ${}_4P_3 = 24$이다. a, b, c가 모두 음수인 행렬 A의 개수는 위와 같은 방법으로 음수 3개 중 서로 다른 3개를 선택하여 배열하는 방법의 수와 같으므로 $3! = 6$이다.

따라서 행렬의 개수는 $24 + 6 = 30$이다.

29. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

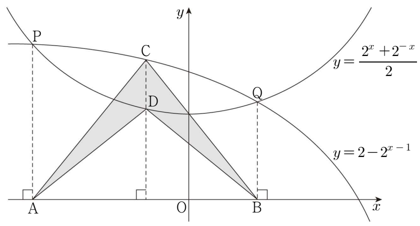
색칠된 도형의 넓이 S는 두 삼각형 ACB, ADB의 넓이의 차와 같으므로

$S = (\triangle\mathrm{ACB}$의 넓이$) - (\triangle\mathrm{ADB}$의 넓이$)$

$= \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\times($두 삼각형의 높이 차$)$

$= \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{2}(b-a)\times\overline{\mathrm{CD}}$

이다.



$S = \dfrac{1}{2}(b-a)\times\overline{\mathrm{CD}}$ 에서 S가 최댓값을 갖는 것은 선분 CD의 값이 최대가 될 때이다. 선분 CD의 길이는 $x = c$에서 점 C, D의 y좌표의 차이므로

$\overline{\mathrm{CD}} = 2 - 2^{t-1} - \dfrac{2^t + 2^{-t}}{2} = 2 - \dfrac{2\cdot 2^t + 2^{-t}}{2}$

이다. 여기서 $2\cdot 2^t$, 2^{-t}는 모두 양수이므로 산술평균과 기하평균의 부등식에 의해

$\dfrac{2\cdot 2^t + 2^{-t}}{2} \ge \sqrt{2\cdot 2^t \times 2^{-t}} = \sqrt{2}$

(단, 등호는 $2\cdot 2^t = 2^{-t}$일 때 성립한다.)

이므로 $\dfrac{2\cdot 2^t + 2^{-t}}{2}$은 최솟값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

$\overline{\mathrm{CD}} = 2 - \dfrac{2\cdot 2^{\mathrm{t}} + 2^{-\mathrm{t}}}{2}$ 에서

$\overline{\mathrm{CD}} = 2 - \dfrac{2\cdot 2^{\mathrm{t}} + 2^{-\mathrm{t}}}{2} \le 2 - \sqrt{2}$

이므로 $\overline{\mathrm{CD}}$는 최댓값 $2 - \sqrt{2}$을 갖는다.

따라서 S의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}(b-a)\times\overline{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{2}(b-a)(2-\sqrt{2})$

이므로 $k = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$이다. 따라서 $70(k-1)^2 = 35$이다.

30. [출제의도] 지수방정식과 지수부등식을 이용하여 문제 해결하기

(i) 조건 (가)에서 $f(2)g(11) = a^2b^{11} = 2^{2015}$이므로

$a^2b^{11} = 2^{2015}$ …… ①

이다. a, b는 각각 1보다 큰 자연수이면서 2의 거듭제곱꼴이어야 하므로

$a = 2^m$, $b = 2^n$ (m, n은 자연수)

로 두자. $a = 2^m$, $b = 2^n$을 식 ①에 대입하면

$2m + 11n = 2015$ …… ②

이다. 그런데 $2m$은 짝수이므로 $11n$은 홀수이어야 한다. 따라서 n은 홀수이므로

$n = 2k - 1$ …… ③(k는 자연수)

이다. ③을 ②에 대입하면

$2015 = 2m + 11n = 2m + 11(2k-1) = 2m + 22k - 11$

이고 정리하면

$m = 1013 - 11k$ …… ④

이다. m과 k가 자연수이므로 ④식에서

$m = 1013 - 11k \ge 1$

이고 정리하면 $1 \le k \le \dfrac{1012}{11} = 92$이다.

(ii) 조건(나)에서 $a^2 = f(2) < g(4) = b^4$이고

$a = 2^m$, $b = 2^n$ (m, n은 자연수)에서

$2^{2m} < 2^{4n}$이므로 $m < 2n$ …… ⑤

이다. ③과 ④를 ⑤에 대입하면

$1013 - 11k < 2(2k-1)$, $k > \dfrac{1015}{15} = 67.6\cdots$

이다. k가 자연수이므로 $k \ge 68$이다.

(i)과 (ii)를 모두 만족하는 자연수 k의 범위는 $68 \le k \le 92$이다.

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 자연수 k의 개수와 같으므로 $92 - 68 + 1 = 25$이다.