2013학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	①	2	⑤	3	④	4	③	5	④
6	②	7	④	8	①	9	③	10	①
11	②	12	④	13	③	14	⑤	15	②
16	③	17	⑤	18	②	19	④	20	⑤
21	①	22	23	23	19	24	98	25	4
26	12	27	112	28	45	29	3	30	160

해 설

1. [출제의도] 지수가 유리수인 수들의 곱을 계산한다.

$2^{\frac{2}{3}}\times 54^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{3}{3}}$

$=6$

2. [출제의도] 행렬의 덧셈의 뜻을 알고, 이를 계산한다.

$A+B=E$에서 $B=E-A$이므로

$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-3\\4&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&3\\-4&2\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 행렬의 정의를 알고 행렬의 성분의 합을 구한다.

$a_{ij}=ij+1$의 i, j에 $i=1, 2$, $j=1, 2$를 각각 대입하면

$a_{11}=1\times1+1=2$

$a_{12}=1\times2+1=3$

$a_{21}=2\times1+1=3$

$a_{22}=2\times2+1=5$

따라서 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은 $2+3+3+5=13$이다.

4. [출제의도] 그래프를 나타내는 행렬과 그래프의 관계를 이용하여 변의 개수를 구한다.

그래프에서 변의 개수가 9이므로 이 그래프를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 9의 2배인 18이다.

5. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$3^a=4$ … ㉠

$9^{a+b}=48$에서

$(3^2)^{a+b}=3^{2(a+b)}=48$ … ㉡

㉡÷㉠에서 $3^{2(a+b)-a}=12$

$\therefore\ 3^{a+2b}=12$

[다른 풀이]

$3^a=4$ … ㉠

$9^{a+b}=48$에서 $9^a9^b=(3^a)^2 9^b=48$ … ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$4^2\times9^b=48$, $9^b=3$

$\therefore\ 3^{a+2b}=3^a3^{2b}=3^a9^b=4\times3=12$

6. [출제의도] 행렬의 연산의 성질을 이용하여 역행렬을 구한다.

$(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$에서

$AB=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}$

$=\frac{1}{0-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ … ㉠

$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&a\\b&-1\end{pmatrix}$이므로

$AB=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&a\\b&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+b&a-1\\-2+3b&2a-3\end{pmatrix}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $-1+b=0$, $a-1=1$, $-2+3b=1$, $2a-3=1$이므로 $a=2$, $b=1$

$\therefore\ a+b=3$

7. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 함숫값을 구한다.

점 C의 y좌표가 $\frac{1}{16}$이므로 점 $\mathrm{C}\left(a, \frac{1}{16}\right)$로 놓으면

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{16}$, $2^{-a}=2^{-4}$에서 $a=4$

$\therefore\ \mathrm{C}\left(4, \frac{1}{16}\right)$

따라서 점 B의 좌표는 B(4, 4)이므로 점 A의 y좌표는 4이다.

점 A(b, 4)로 놓으면

$\left(\frac{1}{2}\right)^b=4$, $2^{-b}=2^2$에서 $b=-2$

따라서 점 A의 x좌표는 -2이다.

8. [출제의도] 치환을 이용하여 지수방정식의 해를 구한다.

$2^{2x+1}-9\cdot2^x+4=0$에서

$2\cdot(2^x)^2-9\cdot2^x+4=0$

$2^x=t\ (t>0)$으로 놓으면 주어진 방정식은

$2t^2-9t+4=0$, $(t-4)(2t-1)=0$

$\therefore\ t=4$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

$2^x=4=2^2$ 또는 $2^x=\frac{1}{2}=2^{-1}$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=-1$

따라서 모든 실근의 곱은 $2\times(-1)=-2$

9. [출제의도] 실생활 관련 문제를 행렬의 곱셈으로 표현한다.

A학과 일반 전형의 지원자 수는 30×5.1

B학과 일반 전형의 지원자 수는 40×10.7

A학과 특별 전형의 지원자 수는 10×21.4

B학과 특별 전형의 지원자 수는 20×11.5

A, B 두 학과의 일반 전형 지원자 수의 합 m은

$m=30\times5.1+40\times10.7$

B학과의 일반 전형과 특별 전형 지원자 수의 합 n은

$n=40\times10.7+20\times11.5$

한편, 두 행렬 $P=\begin{pmatrix}30&40\\10&20\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}5.1&21.4\\10.7&11.5\end{pmatrix}$에서

$PQ=\begin{pmatrix}30\times5.1+40\times10.7&30\times21.4+40\times11.5\\10\times5.1+20\times10.7&10\times21.4+20\times11.5\end{pmatrix}$

$QP=\begin{pmatrix}5.1\times30+21.4\times10&5.1\times40+21.4\times20\\10.7\times30+11.5\times10&10.7\times40+11.5\times20\end{pmatrix}$

이므로 m은 행렬 PQ의 (1, 1)성분과 같고, n은 행렬 QP의 (2, 2)성분과 같다.

따라서 $m+n$의 값은 행렬 PQ의 (1, 1)성분과 행렬 QP의 (2, 2)성분의 합과 같다.

10. [출제의도] 지수함수를 활용하여 조건에 맞는 행렬을 찾아 역행렬을 구한다.

A(1, 2), B(2, 4), $\mathrm{C}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{D}\left(2, \frac{1}{4}\right)$이므로

$a=2$, $b=4$, $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{4}$

행렬 $P=\begin{pmatrix}2&4\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$이므로

$P^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}-2}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-4\\-\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}=-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-4\\-\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}&\frac{8}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

따라서 P^{-1}의 모든 성분의 합은

$-\frac{1}{6}+\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=\frac{3}{2}$

11. [출제의도] 곡선 위의 두 점을 잇는 직선의 기울기를 구한다.

직선 AB의 기울기는

$m_1=\frac{4-2}{2-1}=2$

직선 CD의 기울기는

$m_2=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2-1}=-\frac{1}{4}$

$m_2=km_1$에서 $-\frac{1}{4}=2k$

$\therefore\ k=-\frac{1}{8}$

12. [출제의도] 역행렬을 이용하여 연립방정식의 해를 구한다.

$f(2)=3$이므로

$\sqrt{2a+b}=3$에서 $2a+b=9$ … ㉠

$g(2)=3$에서 $f(3)=2$이므로

$\sqrt{3a+b}=2$에서 $3a+b=4$ … ㉡

㉠, ㉡을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$

$m=1$, $n=3$

$\therefore\ m+n=4$

13. [출제의도] 역행렬의 정의를 이용하여 역행렬의 성분의 합을 구한다.

$AB=B-A$에서 $AB+A-B=O$

$A(B+E)-(B+E)=-E$

$(A-E)(B+E)=-E$

$(E-A)(B+E)=E$

$\therefore\ (B+E)^{-1}=E-A$

행렬 A의 모든 성분의 합이 10이므로

행렬 $B+E$의 역행렬인 행렬 $E-A$의 모든 성분의 합은 $2-10=-8$이다.

14. [출제의도] 역행렬이 존재하기 위한 조건을 구한다.

$A=\begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix}$에서 $A-xE=\begin{pmatrix}3-x&4\\2&1-x\end{pmatrix}$

행렬 $A-xE$의 역행렬이 존재하려면

$(3-x)(1-x)-4\times2\neq0$

$x^2-4x-5\neq0$

$(x-5)(x+1)\neq0$

$x\neq5$이고 $x\neq-1$

조건 p를 만족하는 집합을 P, 조건 q를 만족하는 집합을 Q라 할 때

$P=\{x\mid x>a\}$

$Q=\{x\mid x<-1, -1<x<5, x>5\}$

p는 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 $a\geq5$이다.

따라서 a의 최솟값은 5이다.

15. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$P_1=\frac{72-65}{14}\times(1.05)^{10}=\frac{1}{2}\times1.05^{10}$ … ㉠

$4P_1=\frac{79-65}{14}\times(1.05)^x=1.05^x$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$4\times\frac{1}{2}\times1.05^{10}=1.05^x$

$1.05^{x-10}=2$

$1.05^{14}=2$이므로

$1.05^{x-10}=1.05^{14}$
$x-10=14$
$\therefore\ x=24$

16. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 그래프를 추론한다.

행렬 $P+Q$의 모든 성분의 합이 18이므로
$a+b+c+d+10=18$
$a+b+c+d=8$ … ㉠
그래프를 나타내는 행렬 P, Q의 각 성분은 0 또는 1이므로 행렬 $P+Q$의 성분이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.
이때, ㉠에 의해 $a=b=c=d=2$이므로 두 행렬 P, Q의 $(1, 2)$성분, $(2, 1)$성분, $(3, 4)$성분, $(4, 3)$성분은 모두 1이다.
또한, 행렬 $P+Q$에서 $(2, 3)$성분과 $(3, 2)$성분이 2이므로 두 행렬 P, Q의 $(2, 3)$성분과 $(3, 2)$성분은 모두 1이다.
그러므로 두 행렬 P, Q가 나타내는 그래프는 각각 적어도 3개의 변을 가진다.
$\therefore\ p\geq 3,\ q\geq 3$ … ㉡
행렬 $P+Q$의 모든 성분의 합이 18이므로 $p+q=9$이다.
㉡에서 $p=6,\ q=3$ 또는 $p=3,\ q=6$일 때, $|p-q|$의 최댓값은 3이다.

[참고]
조건을 만족시키는 두 행렬은 각각
$\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$
이다.

17. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 구하는 과정을 추론한다.

$A^2-2A+E=O$에서
$A^2-A=A-E$
$A^3-A^2=A(A^2-A)=A(A-E)=A^2-A$
$\quad=A-E$
$A^4-A^3=A(A^3-A^2)=A(A-E)=A^2-A$
$\quad=A-E$
$\quad\vdots$
$A^n-A^{n-1}=A-E$
위 등식들을 변끼리 더하면
$(A^n-A^{n-1})+(A^{n-1}-A^{n-2})+\cdots+(A^3-A^2)+(A^2-A)$
$=(A-E)+(A-E)+\cdots+(A-E)+(A-E)$
이 식을 정리하면
$A^n-A=\boxed{(n-1)}(A-E)$
$\therefore\ A^n=\boxed{n}A-\boxed{(n-1)}E$
따라서 $f(n)=n-1,\ g(n)=n$이므로
$f(100)+g(100)=99+100=199$

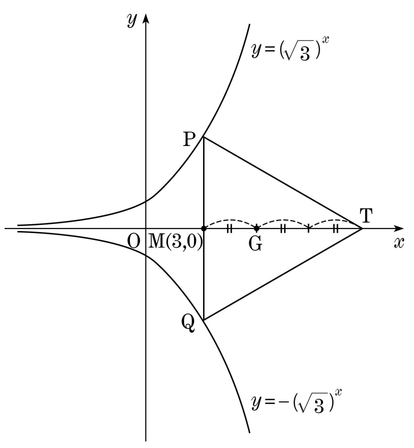
[참고]
$A^2-2A+E=O$에서 $A^2-A=A-E$이므로
$A^n-A^{n-1}=A^{n-2}(A^2-A)=A^{n-2}(A-E)$
$\quad=A^{n-3}(A^2-A)=A^{n-3}(A-E)$
$\quad\vdots$
$\quad=A(A^2-A)=A(A-E)$
$\quad=A^2-A=A-E$

18. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. $AB+A^2=A(B+A)=E$
$A^{-1}=B+A$
따라서 A의 역행렬이 존재한다. (참)
ㄴ. $AB+A^2=E$에서
$AB=E-A^2$ … ㉠
ㄱ에서 $A^{-1}=B+A$이므로
$A(B+A)=(B+A)A=E$
$BA+A^2=E$
$BA=E-A^2$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $AB=BA$ (참)
ㄷ. ㄴ에서 $AB=BA$이므로
$AB+BA=A^2+B^2$에서
$2AB=A^2+B^2$ … ㉢
$AB+A^2=E$에서
$A^2=E-AB$ … ㉣
㉣을 ㉢에 대입하면
$2AB=E-AB+B^2$
$3AB-B^2=E$
$(3A-B)B=E$
$\therefore\ B^{-1}=3A-B$
$p=3,\ q=-1$이므로 $p+q=2$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족하는 점의 좌표를 구한다.

직선 $x=3$이 두 곡선과 만나는 점은 각각
$\mathrm{P}\left(3,\ (\sqrt{3})^3\right)$, $\mathrm{Q}\left(3,\ -(\sqrt{3})^3\right)$이므로
$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=2\left(\sqrt{3}\right)^3=6\sqrt{3}$
삼각형 PQT는 한 변의 길이가 $6\sqrt{3}$인 정삼각형이다.
점 M$(3, 0)$, 삼각형 PQT의 무게중심을 G라 할 때, $\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{QM}}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{MT}}$이므로 G는 x축 위에 있다.

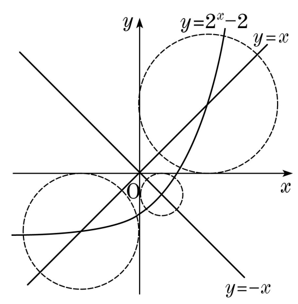


한편, $\overline{\mathrm{MT}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6\sqrt{3}=9$이므로
$\overline{\mathrm{MG}}=\dfrac{1}{3}\times\overline{\mathrm{MT}}=\dfrac{1}{3}\times 9=3$
따라서 무게중심 G의 x좌표는 $3+3=6$이다.

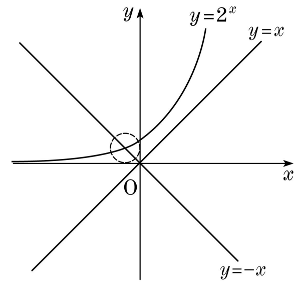
20. [출제의도] 지수함수의 그래프에서 조건을 만족하는 원의 개수를 추론한다.

반지름의 길이가 r이고 x축, y축에 모두 접하는 원의 중심의 좌표는
(r, r), $(r, -r)$, $(-r, r)$, $(-r, -r)$
꼴이므로 원의 중심이 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있다.
그러므로 원의 중심이 곡선 $y=2^x+n$ 위에 있고 x축, y축에 모두 접하는 원의 개수는 곡선 $y=2^x+n$과 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점 중 원점이 아닌 점의 개수와 같다.

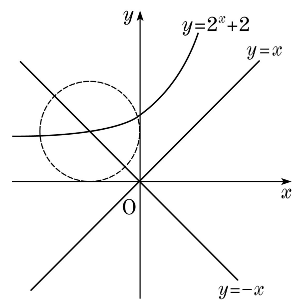
(ⅰ) $n=-2$일 때,
곡선 $y=2^x-2$는 직선 $y=x$와 원점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y=-x$와 원점이 아닌 한 점에서 만난다.
$\therefore\ f(-2)=2+1=3$



(ⅱ) $n=0$일 때,
곡선 $y=2^x$은 직선 $y=x$와 만나지 않고, 직선 $y=-x$와 원점이 아닌 한 점에서 만난다.
$\therefore\ f(0)=1$



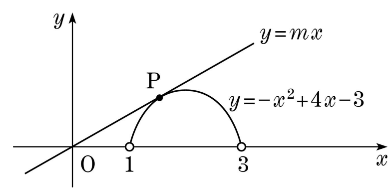
(ⅲ) $n=2$일 때,
곡선 $y=2^x+2$는 직선 $y=x$와 만나지 않고, 직선 $y=-x$와 원점이 아닌 한 점에서 만난다.
$\therefore\ f(2)=1$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
$f(-2)+f(0)+f(2)$
$=3+1+1=5$

21. [출제의도] 해가 무수히 많을 조건을 이용하여 직선의 기울기의 최댓값을 구한다.

$\begin{pmatrix} a & -1\\ b & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}$에서
$\begin{pmatrix} a & -1\\ b & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a-1 & -1\\ b & a-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}$
연립방정식이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지므로 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & -1\\ b & a-3 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.
$(a-1)(a-3)+b=0$
$b=-a^2+4a-3$ $(a>0,\ b>0)$
즉, 점 P(a, b)는 곡선 $y=-x^2+4x-3$의 제1사분면에 있는 부분 위의 점이다.
직선 OP의 기울기를 m이라 하면 직선 OP의 방정식은 $y=mx$이다.
직선 OP가 곡선 $y=-x^2+4x-3$과 제1사분면에서 서로 접할 때 직선 OP의 기울기 m은 최댓값을 갖는다.



두 식 $y=mx$, $y=-x^2+4x-3$을 연립하면
$mx=-x^2+4x-3$
$x^2+(m-4)x+3=0$ … ㉠
㉠의 판별식을 D라 하면
$D=(m-4)^2-12=0$
$\therefore\ m=4-2\sqrt{3}$ 또는 $m=4+2\sqrt{3}$
$0<m<1$이므로 $m=4-2\sqrt{3}$

[다른 풀이]
원점 O와 곡선 위의 점 P(a, b) $(1<a<3)$을 지나는 직선의 기울기는
$\dfrac{b-0}{a-0}=\dfrac{b}{a}$
$\quad=\dfrac{-a^2+4a-3}{a}$

$=-a+4-\frac{3}{a}$

$=4-\left(a+\frac{3}{a}\right)$

a는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$a+\frac{3}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=2\sqrt{3}$

(단, 등호는 $a=\frac{3}{a}$, 즉 $a=\sqrt{3}$일 때 성립)

$\sqrt{3}$은 a의 범위에 포함되므로

(직선 OP의 기울기)$=4-\left(a+\frac{3}{a}\right)\le 4-2\sqrt{3}$

22. [출제의도] 역행렬을 이용하여 연립방정식의 해를 구한다.

$\begin{pmatrix}2&-3\\-5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\-5&8\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{16-15}\begin{pmatrix}8&3\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}14\\9\end{pmatrix}$

$\therefore\ \alpha+\beta=14+9=23$

23. [출제의도] 행렬의 연산의 성질을 이용하여 행렬의 합을 구한다.

$A+2B=\begin{pmatrix}5&13\\2&10\end{pmatrix}$, $2A+B=\begin{pmatrix}4&11\\1&11\end{pmatrix}$에서

두 식을 변끼리 더하면

$3A+3B=\begin{pmatrix}9&24\\3&21\end{pmatrix}$

$\therefore\ A+B=\begin{pmatrix}3&8\\1&7\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은

$3+8+1+7=19$

[다른 풀이]

$A+2B=\begin{pmatrix}5&13\\2&10\end{pmatrix}$ … ㉠

$2A+B=\begin{pmatrix}4&11\\1&11\end{pmatrix}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $3A=\begin{pmatrix}3&9\\0&12\end{pmatrix}$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}$

㉡에 대입하면 $B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$

24. [출제의도] 지수방정식의 해를 구한다.

방정식 $2^{x+3}-2^x=n$에서 $7\cdot 2^x=n$

주어진 방정식이 정수인 해를 갖기 위해서는 $n=7\cdot 2^k$ (k는 음이 아닌 정수)의 꼴이어야 한다.

이 조건을 만족하는 두 자리 자연수는 14, 28, 56이므로 모든 두 자리 자연수 n의 값의 합은

$14+28+56=98$

25. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 구한다.

$A^2=\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$A^4=(-E)^2=E$

$A^{2013}=(A^4)^{503}A=E^{503}A=A$

따라서 A^{2013}의 모든 성분의 합은

$2-1+5-2=4$

[참고]

n이 자연수일 때,

$A^{4n-3}=A,\ A^{4n-2}=-E,\ A^{4n-1}=-A,\ A^{4n}=E$

26. [출제의도] 조건을 만족하는 그래프의 변의 개수를 구한다.

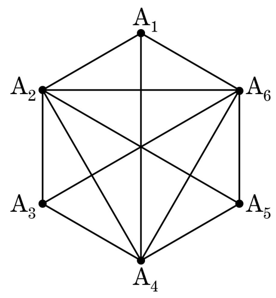
mn의 값이 홀수이려면 m, n이 모두 홀수이어야 한다.

따라서 변의 개수는 6개의 점 중 서로 다른 두 점을 선택하는 경우의 수에서 세 점 A_1, A_3, A_5 중 서로 다른 두 점을 선택하는 경우의 수를 빼면 된다.

${}_6C_2-{}_3C_2=15-3=12$

[다른 풀이]

조건을 만족하도록 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 변의 개수는 12개

27. [출제의도] 지수부등식의 해를 구한다.

부등식 $2^{2x}+3\cdot 2^{x+1}-a<0$의 해가 $x<3$이므로 $2^x<8$

$2^{2x}+3\cdot 2^{x+1}-a=(2^x-8)(2^x+14)<0$

양변을 비교하면

$-a=-112$

$\therefore\ a=112$

[다른 풀이]

$2^{2x}+3\cdot 2^{x+1}-a<0$에서 $2^x=t\,(t>0)$라 하면

집합 A에서 $0<t<8$

집합 B에서 $t^2+6t-a<0\,(t>0)$

함수 $f(t)=t^2+6t-a\,(t>0)$의 그래프에 대하여 t축보다 아래에 있는 t값의 범위가 $0<t<8$이 되기 위해서는 $f(8)=0$이어야 한다.

$f(8)=64+48-a=0$

$\therefore\ a=112$

28. [출제의도] 역행렬이 존재하지 않을 조건을 이용하여 도형의 길이를 구한다.

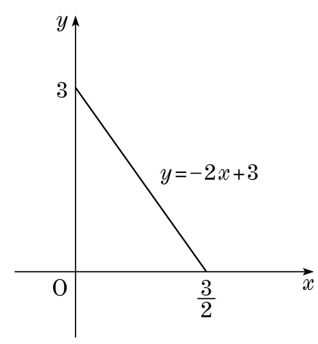
행렬 $\begin{pmatrix}1&9^{-a}\\27&3^b\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$1\cdot 3^b-9^{-a}\cdot 27=0$

$3^b=3^{-2a+3}$

$\therefore\ b=-2a+3$

$a\ge 0$, $b\ge 0$이므로 점 (a, b)가 나타내는 도형의 길이는 직선 $y=-2x+3$이 x축, y축과 만나는 두 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $(0, 3)$을 양 끝점으로 하는 선분의 길이와 같다.



따라서 구하는 값은

$4l^2=4\left(\frac{9}{4}+9\right)=45$

29. [출제의도] 행렬의 연산과 역행렬의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 행렬을 구한다.

조건 (가)에서

$2A^2-A=E$

$A(2A-E)=E$

$A^{-1}=2A-E$ … ㉠

조건 (나)에서 등식의 양변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면

$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

㉠에서 $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=(2A-E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ … ㉡

조건 (다)에서 등식의 양변의 왼쪽에 B를 곱하면

$B(A-B^{-1})\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$BA\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$BA\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

㉡에서 $BA\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이므로

$B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=1$, $b=2$이므로 $a+b=3$

[다른 풀이]

조건 (가)에서 등식의 양변의 오른쪽에 행렬 $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$을 곱하면

$(2A^2-A-E)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$2A^2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

조건 (나)에서

$2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ … ㉠

조건 (다)와 ㉠에서

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-B^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$B^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

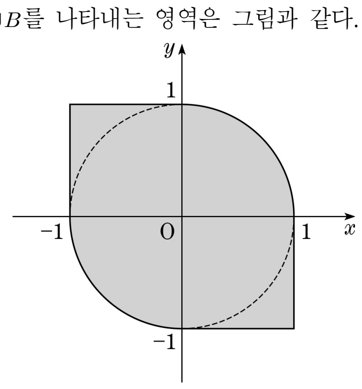
이 등식의 양변의 왼쪽에 B를 곱하면

$B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\therefore\ a+b=3$

30. [출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 지수함수의 최댓값을 구한다.

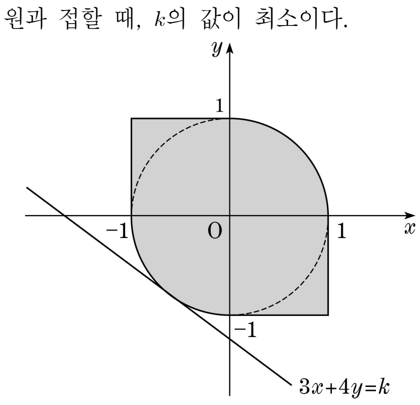
집합 $A\cup B$를 나타내는 영역은 그림과 같다.



$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4y}$에서 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$3x+4y$가 최솟값을 가질 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4y}$은 최댓값을 갖는다.

$3x+4y=k$로 놓으면 직선 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$가 제3사분면에서 원과 접할 때, k의 값이 최소이다.

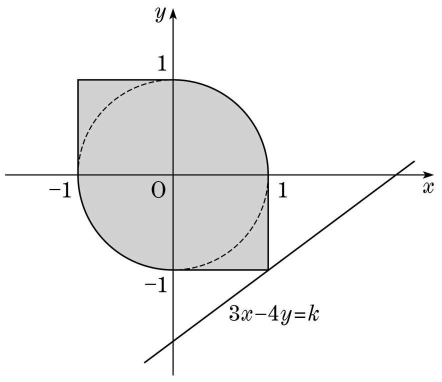


따라서 $\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$, $k=-5$ ($\because\ k<0$)

$\therefore\ M_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$

또, 2^{3x-4y}에서 $2>1$이므로 $3x-4y$가 최댓값을 가질 때, 2^{3x-4y}은 최댓값을 갖는다.

$3x-4y=k$로 놓으면 직선 $y=\frac{3}{4}x-\frac{k}{4}$가 점 $(1, -1)$을 지날 때, k의 값이 최대이다.



$k=3\cdot1-4\cdot(-1)=7$

$\therefore\ M_2=2^7=128$

따라서 $M_1+M_2=32+128=160$