• 2교시 수학 영역 •

[B형]

1	①	**2**	④	**3**	⑤	**4**	②	**5**	④
6	⑤	**7**	②	**8**	③	**9**	①	**10**	②
11	③	**12**	②	**13**	④	**14**	⑤	**15**	④
16	③	**17**	③	**18**	①	**19**	⑤	**20**	①
21	③	**22**	7	**23**	250	**24**	3	**25**	12
26	11	**27**	21	**28**	32	**29**	26	**30**	54

1. [A형 1번과 동일]

2. [A형 2번과 동일]

3. [출제의도] 미분계수의 정의 이해하기

$f(x)=3x^2-x$에서 $f'(x)=6x-1$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$

4. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$16^x-6\times4^x+8=0$ 에서 $4^x=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-6t+8=0$

이 방정식의 두 근이 4^α, 4^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $4^\alpha\times4^\beta=8$ 즉, $4^{\alpha+\beta}=8$

따라서 $\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

ⅰ) $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=0$

ⅱ) $-x=t$라 하면, $x\to1-0$일 때 $t\to-1+0$이므로

$\lim\limits_{x\to1-0}f(-x)=\lim\limits_{t\to-1+0}f(t)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)+\lim\limits_{x\to1-0}f(-x)=1$

6. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$에서

$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$이므로 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\cos^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{8}{9}$

7. [출제의도] 분수부등식을 활용하여 문제해결하기

$\dfrac{1}{v}+\dfrac{8}{4v}+\dfrac{2}{v+1}\le\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{3}{v}+\dfrac{2}{v+1}\le\dfrac{3}{2}$

$v>0$이므로 양변에 $2v(v+1)$을 곱하면

$6(v+1)+4v\le3v(v+1)$

$3v^2-7v-6\ge0$

$(3v+2)(v-3)\ge0$

$v>0$이므로 $v\ge3$

따라서 v의 최솟값은 3(km/시)

8. [출제의도] 무리방정식 이해하기

$f(x)+x=\sqrt{f(x)+x}+2$ 에서

$\sqrt{f(x)+x}=t\ (t\ge0)$라 하면

$t^2-2=t$

$t^2-t-2=(t-2)(t+1)=0$

$t=2\ (\because t\ge0)$

$\therefore\ \sqrt{f(x)+x}=2$에서 $f(x)=-x+4$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-x+4$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 서로 다른 실근의 개수는 2

9. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=n^2(n+1)$ 이라 하면

ⅰ) $n\ge2$일 때, $na_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2(n+1)-(n-1)^2n$

$=3n^2-n$

ⅱ) $n=1$일 때, $1\times a_1=S_1=2$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $na_n=3n^2-n\ (n\ge1)$

즉, $a_n=3n-1\ (n\ge1)$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n}=3$

10. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 추론하기

점 $\mathrm{A}(k,0)$에서 두 점 B, C의 좌표는 각각 $\mathrm{B}(k,2^k)$, $\mathrm{C}(k,4^k)$이다.

점 D의 x좌표를 d라 하면, $2^d=4^k$이므로 $d=2k$이다.

$\overline{\mathrm{CD}}=k$, $\overline{\mathrm{BC}}=4^k-2^k$이므로 삼각형 BDC의 넓이는 $\dfrac{k}{2}(4^k-2^k)$이고, $\overline{\mathrm{OA}}=k$, $\overline{\mathrm{AB}}=2^k$이므로

삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{k}{2}\times2^k$이다.

$\dfrac{k}{2}(4^k-2^k)=3\times\dfrac{k}{2}\times2^k$이므로

$2^k(2^k-1)=3\times2^k$ 즉, $2^k-1=3$에서 $k=2$

따라서 삼각형 BDC의 넓이는 $\dfrac{2}{2}(4^2-2^2)=12$

11. [A형 12번과 동일]

12. [출제의도] 무한급수의 수렴과 일반항의 극한값 이해하기

ⅰ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\dfrac{2n^2}{n+1}\right)=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(na_n-\dfrac{2n^2}{n+1}\right)=0$

$na_n-\dfrac{2n^2}{n+1}=c_n$이라 하면, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{c_n}{n}+\dfrac{2n^2}{n(n+1)}\right\}=2$

ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-5b_n)=3$에서 $3a_n-5b_n=d_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=3$이고, ⅰ)에서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}a_n-\dfrac{1}{5}d_n\right)=\dfrac{3}{5}$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n+5b_n}{a_n+10b_n}=\dfrac{2\times2+5\times\dfrac{3}{5}}{2+10\times\dfrac{3}{5}}=\dfrac{7}{8}$

13. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

$\log_2(x+3)=n$ 에서 $x+3=2^n$

즉, $x=2^n-3$이므로 $a_n=2^n-3$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=\sum\limits_{n=1}^{10}(2^n-3)=\dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1}-30=2016$

14. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 극한 이해하기

$f(x)=\log_2(x+3)$의 역함수는 $g(x)=2^x-3$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x-2)}{g(x)+2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2(x+1)}{2^x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2(x+1)}{x}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2^x-1}$

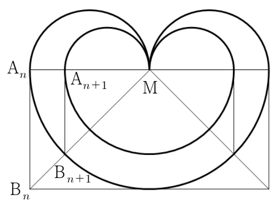
$=\dfrac{1}{\ln2}\times\dfrac{1}{\ln2}=\dfrac{1}{(\ln2)^2}$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x-2)}{g(x)+2}=\dfrac{1}{(\ln2)^2}$

15. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 문제해결하기

ⅰ) $l_1=\dfrac{1}{2}\times2\pi+2\times\dfrac{1}{2}\times\pi=2\pi$

ⅱ)



위 그림에서 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{M}}=\overline{\mathrm{MB}_{n+1}}$이고

삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{M}$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{M}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{MB}_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{M}}$이다.

$\therefore\ l_{n+1}=\pi\times\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{M}}+2\times\pi\times\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{M}}$

$=2\pi\times\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{M}}=2\pi\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{M}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l_n$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 2π, 공비가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}l_n=\dfrac{2\pi}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=(4+2\sqrt{2})\pi$

16. [출제의도] 함수의 미분가능성 추론하기

ㄱ. $xf(x)=\begin{cases}x^2 & (x\ge0)\\-x^2 & (x<0)\end{cases}$이므로

$xf(x)=h_1(x)$라 하면

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{h_1(x)-h_1(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{h_1(x)-h_1(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{-x^2}{x}=0$

$\therefore\ h_1{}'(0)=0$

함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(x)g(x)=\begin{cases}2x^2+x & (x\ge0)\\x^2+x & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(x)g(x)=h_2(x)$라 하면

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{h_2(x)-h_2(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{2x^2+x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{h_2(x)-h_2(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x^2+x}{x}=1$

$\therefore\ h_2{}'(0)=1$

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $f(x)-g(x)=\begin{cases}-x-1 & (x\ge0)\\1 & (x<0)\end{cases}$이고

$x\ge0$에서 $-x-1<0$이므로

$|f(x)-g(x)|=\begin{cases}x+1 & (x\ge0)\\1 & (x<0)\end{cases}$

$|f(x)-g(x)|=h_3(x)$라 하면

$$\lim_{x\to+0}\frac{h_3(x)-h_3(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{(x+1)-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{h_3(x)-h_3(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{1-1}{x}=0$$

함수 $|f(x)-g(x)|$ 는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ

17. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기

$\angle \mathrm{PAO}=\theta$에서 $\angle \mathrm{POQ}=2\theta$이고,

$\angle \mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\tan 2\theta$이다.

$\triangle \mathrm{POQ}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\times 1\times\tan 2\theta=\frac{3}{8}$

$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{3}{4}$

$3\tan^2\theta+8\tan\theta-3=0$

$(3\tan\theta-1)(\tan\theta+3)=0$

따라서 $\tan\theta=\frac{1}{3}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_{10}=8a_4$에서 $ar^9=8ar^3$, $ar^3(r^6-8)=0$

$ar\neq 0$이므로 $r^6=8$ 즉, $r=\sqrt{2}$ $(\because a_n>0)$

$a_3+a_7=10$에서 $2a+8a=10$이므로 $a=1$

$\therefore a_n=(\sqrt{2})^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{a_{n+1}-a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{a_{n+1}-a_n}{(a_{n+1}+1)-(a_n+1)}\left(\frac{1}{a_n+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{a_{11}+1}=\frac{1}{1+1}-\frac{1}{32+1}=\frac{31}{66}$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{a_{n+1}-a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{31}{66}$

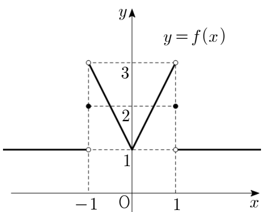
19. [출제의도] 함수의 극한과 연속 추론하기

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n+2|x|+1}{|x|^n+1}$에서

ⅰ) $|x|<1$일 때, $f(x)=2|x|+1$

ⅱ) $|x|=1$일 때, $f(x)=2$

ⅲ) $|x|>1$일 때, $f(x)=1$



ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left|\frac{1}{2}\right|+1=2$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(2|x|+1)=3$ (참)

ㄷ. $g(x)=(x^2-1)f(x)$라 하면, 함수 $y=x^2-1$은 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $y=f(x)$는 $x\neq\pm1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$, $x=-1$에서의 연속성을 조사하면 된다.

ⅰ) $x=1$일 때, $g(1)=0$이고

$$\lim_{x\to1+0}g(x)=\lim_{x\to1+0}\{(x^2-1)\times1\}=0$$
$$\lim_{x\to1-0}g(x)=\lim_{x\to1-0}(x^2-1)(2|x|+1)=0$$

이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ⅱ) $x=-1$일 때, $g(-1)=0$이고

$$\lim_{x\to-1+0}g(x)=\lim_{x\to-1+0}(x^2-1)(2|x|+1)=0$$
$$\lim_{x\to-1-0}g(x)=\lim_{x\to-1-0}\{(x^2-1)\times1\}=0$$

이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [A형 18번과 동일]

21. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. $ABA-A^2=E$에서

$(AB-A)A=E$ ……㉠

$A(BA-A)=E$ 이고 양변에 $AB-A$를 곱하면

$(AB-A)A(BA-A)=AB-A$

$BA-A=AB-A$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $AB-A=-B$이므로 ㉠에서 $-BA=E$이다.

즉, $AB=BA=-E$

$ABA-A^2=-A-A^2=E$ 이므로

$A^2+A+E=O$에서 $A^3=E$

$B^3=A^3B^3=(AB)^3=(-E)^3=-E$

$\therefore A^3+B^3=O$ (거짓)

ㄷ. $AB=A-B=-E$에서 $B=A+E$

$(B+E)^2=(A+2E)^2=A^2+4A+4E$

$=(4A^2+4A+4E)-3A^2=-3A^2$

$\therefore (B+E)^{30}=(-3A^2)^{15}=-3^{15}E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

22. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계 이해하기

주어진 연립일차방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 $4\times(-1)-(k-9)(k-5)=0$

$(k-7)^2=0$

따라서 $k=7$

23. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$b_n=a_{n+1}-a_n$

$=2(n+1)^2+(n+1)-2n^2-n=4n+3$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}b_n=\sum_{n=1}^{10}(4n+3)=250$

[다른 풀이]

$a_{11}=a_1+\displaystyle\sum_{n=1}^{10}b_n$ 에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}b_n=a_{11}-a_1=250$

24. [출제의도] 삼각방정식 이해하기

$\cos x+\cos 2x=0$에서

$2\cos^2x+\cos x-1=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$0\le x\le 2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5\pi}{3}$

따라서 모든 실근의 합은 3π이므로 $a=3$

25. [출제의도] 분수방정식 이해하기

양변에 분모의 최소공배수 $(x-1)(x+2)$를 곱하면

$x^2(x+2)-6x(x-1)=x^2+8x-24$

$x^3-5x^2-2x+24=0$

$(x+2)(x-3)(x-4)=0$

$x=-2$는 무연근이므로 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실근의 곱은 12

26. [출제의도] 다항함수의 미분계수 이해하기

$f(1)=f(2)=f(3)=3$이므로

$f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+3$ (k는 상수)라 하면

$f(0)=k\times(-1)\times(-2)\times(-3)+3=-3$에서 $k=1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+3$

$=x^3-6x^2+11x-3$

$f'(x)=3x^2-12x+11$

따라서 $f'(4)=3\times4^2-12\times4+11=11$

27. [출제의도] 상용로그의 성질을 활용하여 추론하기

ⅰ) $1\le n\le 9$일 때, $f(n)=0$이므로

$f(3n)=f(n)+1=1$이기 위해서는

$10\le 3n\le 99$ 즉, $\frac{10}{3}\le n\le 33$

$\therefore 4\le n\le 9$

ⅱ) $10\le n\le 50$일 때, $f(n)=1$이므로

$f(3n)=f(n)+1=2$이기 위해서는

$100\le 3n\le 999$ 즉, $\frac{100}{3}\le n\le 333$

$\therefore 34\le n\le 50$

$\therefore A=\{n|4\le n\le 9$ 또는 $34\le n\le 50$, n은 자연수$\}$

$g(40)=g(4)$, $g(50)=g(5)$

인 경우 이외에는 $g(n)$은 서로 다른 값을 갖는다.

$n(B)=n(A)-2=23-2=21$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 21

28. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

삼각형 OPA가 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}$인 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{PAO}=\angle\mathrm{APO}=\theta$, $\angle\mathrm{AOP}=\pi-2\theta$

삼각형 AOQ에서 $\angle\mathrm{AOQ}=2\angle\mathrm{AOP}$이므로

$\angle\mathrm{AOQ}=2\pi-4\theta$이고, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OQ}}=4$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times4^2\times\sin(2\pi-4\theta)=8\sin(2\pi-4\theta)$

$\theta-\frac{\pi}{4}=t$라 하면, $\theta\to\frac{\pi}{4}+0$일 때 $t\to+0$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}+0}\frac{S(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}+0}\frac{8\sin(2\pi-4\theta)}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$
$$=\lim_{t\to+0}\frac{8\sin(\pi-4t)}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{8\sin4t}{t}=32$$

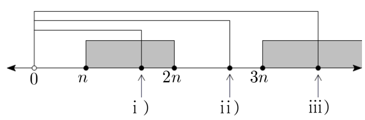
따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}+0}\frac{S(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{4}}=32$

29. [출제의도] 고차부등식을 활용하여 문제해결하기

$\frac{x-20}{x}\le 0$에서 $0<x\le 20$

$(x-n)(x-2n)(x-3n)\ge 0$에서

$n\le x\le 2n$ 또는 $x\ge 3n$



ⅰ) $n\le 20<2n$ 즉, $10<n\le 20$인 경우

$20-n+1=10$이므로 $n=11$

ⅱ) $2n\le 20<3n$ 즉, $\frac{20}{3}<n\le 10$인 경우

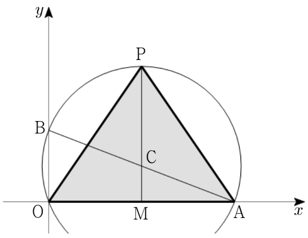
$2n-n+1=10$이므로 $n=9$

iii) $3n \le 20$ 즉, $n \le \dfrac{20}{3}$인 경우

$(2n-n+1)+(20-3n+1)=10$이므로 $n=6$

따라서 모든 n의 값의 합은 $11+9+6=26$

30. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원은 원점 O를 지난다. ($\because \angle \mathrm{BOA}=90^\circ$)

선분 OA의 중점을 M이라 하면, 점 M을 지나고 x축에 수직인 직선이 제1사분면에서 원과 만나는 점이 P일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대이다.

이때, 선분 AB와 선분 PM의 교점 C가 원의 중심이다.

$$\overline{\mathrm{PC}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{(12n+1)^2+(5n)^2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{169n^2+24n+1}}{2}$$

$$\overline{\mathrm{CM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BO}}=\frac{5n}{2}$$

$$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{CM}}=\frac{\sqrt{169n^2+24n+1}+5n}{2}$$

$$\therefore\ S(n)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{PM}}$$

$$=\frac{(12n+1)\left(\sqrt{169n^2+24n+1}+5n\right)}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(12n+1)\left(\sqrt{169n^2+24n+1}+5n\right)}{4n^2}=54$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^2}=54$