2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$에서

$2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 8이다.

<답>④

2.

출제의도 : 삼각함수의 공식을 이용하여 계산할 수 있는가?

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos 2\theta=-\frac{1}{3}$$

<답> ②

3.

출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

$${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)=6\times\frac{1}{64}=\frac{3}{32}$$

<답> ②

4.

출제의도 : 일차변환을 이용하여 직선이 옮겨지는 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

일차변환 f에 의하여 점 (x,y)가 (x',y')으로 옮겨진다고 하면

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -3x-y\end{pmatrix}$$

$x'=x,\ y'=-3x-y$

$\therefore x=x',\ y=-3x'-y'\ \cdots$㉠

㉠을 $x+2y=0$에 대입하면

$x'+2(-3x'-y')=0$

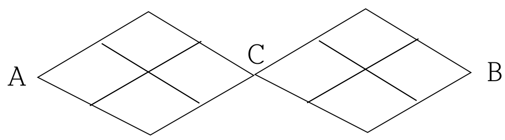
$5x'+2y'=0$

$\therefore 5x+2y=0$

<답> ⑤

5.

출제의도 : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?



A 지점에서 C 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

C 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times 6=36$

<답> ④

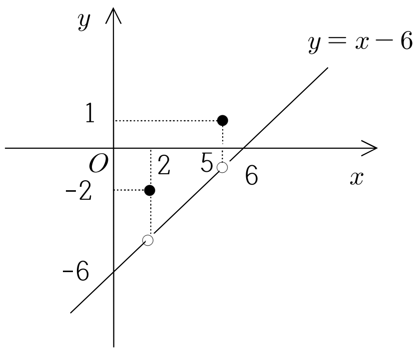
6.

출제의도 : 함수의 연속과 불연속의 정의를 이용하여 불연속이 되는 점을 구할 수 있는가?

$f(x)=\begin{cases} x-3 & (x\neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$ 이고,

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases} x-6 & (x\neq 2,\, x\neq 5) \\ -2 & (x=2) \\ 1 & (x=5) \end{cases}$$

이므로 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=2$ 또는 $x=5$에서 불연속이므로 $0\le a\le 6$에서 모든 a의 값의 합은 $2+5=7$

<답> ⑤

7.

출제의도 : 지수와 로그를 활용할 수 있는가?

$\log T=-kld$에서

$T=10^{-kld}$

이때, 투과길이가 l_0이고 용액의 농도가 $3d_0$일 때의 투과도가 T_1이므로

$T_1=10^{-k\cdot l_0\cdot 3d_0}=10^{-3kl_0d_0}$ -----㉠

또, 투과길이가 $2l_0$이고 용액의 농도가 $4d_0$일 때의 투과도가 T_2이므로

$T_2=10^{-k\cdot 2l_0\cdot 4d_0}=10^{-8kl_0d_0}$ ----㉡

㉠、㉡에서

$T_2=T_1^{\frac{8}{3}}$

이므로

$n=\frac{8}{3}$

<답> ⑤

8.

출제의도 : 일차변환의 합성을 이용하여 점이 옮겨지는 점을 찾을 수 있는가?

일차변환 f는 원점에 대한 대칭변환이다.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

이므로 일차변환 g는 원점을 중심으로 60° 만큼 회전시킨 회전변환이다.

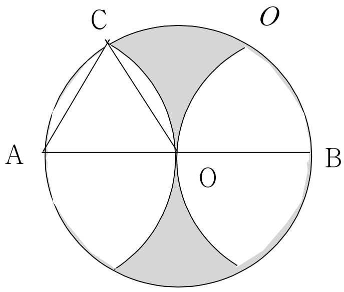
따라서 점 A는 합성변환 $g\circ f$에 의하여 점 E로 옮겨진다.

<답> ④

9.

출제의도 : 무한등비급수에 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가?

아래 그림과 같이 원 O의 중심을 O, 원 O와 중심이 A인 원이 만나는 점을 C라 하자.



이때, 삼각형 AOC는 정삼각형이므로

$S_1 = 1^2 \times \pi - 4 \times \{2 \times (\text{부채꼴 OAC}) - \triangle\text{AOC}\}$

$= 1^2 \times \pi - 4 \times \left\{2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2\right\}$

$= \pi - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$

$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

한편, 도형 R_n에서 가장 작은 원은 개수가 2^{n-1}, 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$S_n = S_1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times S_1 + \cdots + 2^{n-1} \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{n-1} S_1$

$= S_1 + \frac{1}{2} S_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} S_1$

따라서

$\lim_{n \to \infty} S_n = \dfrac{S_1}{1 - \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$

<답> ②

10.

출제의도 : 주어진 상황을 무리방정식으로 표현하고 무리방정식을 풀어 거리를 구할 수 있는가?

주어진 그림에서 두 지점 A, B 사이의 거리를 x라 하자.

원의 반지름의 길이가 1이므로

$\overline{\text{BC}} = \overline{\text{CD}} = 1$이고, 점 D에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 DHE에서

$\overline{\text{DE}} = \sqrt{\overline{\text{DH}}^2 + \overline{\text{HE}}^2}$

$= \sqrt{1 + (5 - x)^2}$

$= \sqrt{x^2 - 10x + 26}$

갑이 산책로 AB를 이동할 때 걸린 시간은 $\frac{x}{4}$, 원 모양의 산책로를 이동할 때 걸린 시간은 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, 산책로 BE를 이동할 때 걸린 시간은 $\frac{6 - x}{4}$이므로 갑이 출발 후 도착할 때까지 걸린 시간은

$\frac{x}{4} + 2 + \frac{6 - x}{4} = \frac{7}{2}$ …㉠

을이 출발 후 도착할 때까지 이동한 거리는 $x + 2 + \sqrt{x^2 - 10x + 26}$이므로 을이 출발 후 도착할 때까지 걸린 시간은

$\dfrac{x + 2 + \sqrt{x^2 - 10x + 26}}{5}$ …㉡

갑이 을보다 2시간 늦게 도착하였으므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2-10x+26}}{5}=\frac{7}{2}-2$$

$$2\sqrt{x^2-10x+26}=11-2x$$

양변을 제곱하면

$$4x^2-40x+104=4x^2-44x+121$$

$$\therefore x=\frac{17}{4}$$

<답> ③

11.

출제의도 : 조건부확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

A가 2개의 동전을 던져서 앞면이 한 개 나오고, B가 동전을 한 번 던져서 앞면이 한 번 나올 확률은

$$\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

A가 2개의 동전을 던져서 앞면이 두 개 나오고, B가 동전을 두 번 던져서 앞면이 한 번 나올 확률은

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{1}{3}$$

<답> ④

12.

출제의도 : 타원에 접하는 직선의 방정식을 구하고 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선은

$y=\pm\frac{b}{a}x$이므로 한 점근선을 $y=\frac{b}{a}x$라 하면 이 점근선에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{b}{a}$이다.

기울기가 $\frac{b}{a}$이고 타원 $\frac{x^2}{8a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x\pm\sqrt{8a^2\times\left(\frac{b}{a}\right)^2+b^2}$$

$$y=\frac{b}{a}x\pm 3b$$

$$\therefore bx-ay+3ab=0 \text{ 또는 } bx-ay-3ab=0$$

이때, 원점과 두 직선 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$$|3ab|=\sqrt{a^2+b^2}$$

양변을 제곱하면

$$9a^2b^2=a^2+b^2$$

양변을 a^2b^2으로 나누면

$$9=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$$

$$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=9$$

<답> ①

13.

출제의도 : 적분의 정의와 도함수, 이계도함수를 이용하여 그래프의 개형을 그릴 수 있는가?

$\int_a^b f(x)dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$

$\therefore F(b) - F(a) = 3 \ \cdots$ ㉠

$\int_a^c f(x)dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^c$

$= F(c) - F(a)$

$= F(c) - F(b) + F(b) - F(a)$

$= F(c) - F(b) + 3 = 0$

$\therefore F(c) - F(b) = -3 \ \cdots$ ㉡

㉠+㉡에서 $F(c) - F(a) = 0$

$\therefore F(a) = F(c) \ \cdots$ ㉢

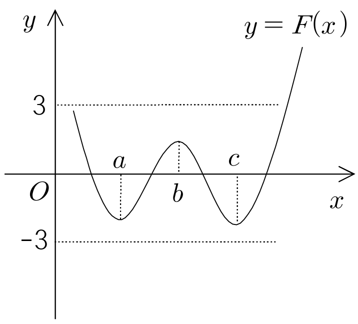
ㄱ. ㉠에서 $F(b) = F(a) + 3$ (참)

ㄴ. $f(x)$가 $x = d$에서 극솟값을 갖는다고 하면, $x > d$일 때, $F''(x) = f'(x) > 0$이므로 점 $(c, F(c))$는 곡선 $y = F(x)$의 변곡점이 아니다. (거짓)

ㄷ. $-3 < F(a) < 0$이면 ㉠, ㉢에서

$0 < F(b) < 3$, $-3 < F(c) < 0$

이므로 $y = F(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



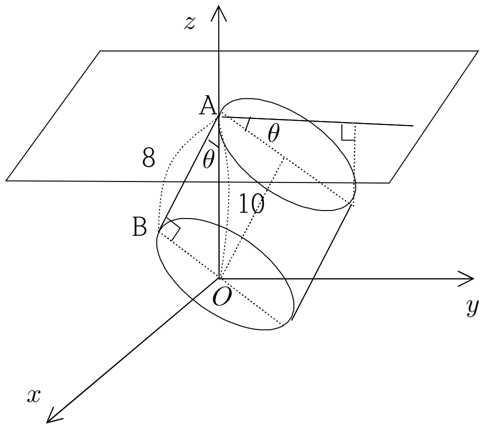
위 그림에서 $y = F(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $F(x) = 0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. (참)

따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

<답> ③

14.

출제의도 : 정사영의 정의를 이용하여 정사영의 넓이를 계산할 수 있는가?



그림의 직각삼각형 ABO에서

$\overline{\mathrm{OA}} = 10$, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$

이므로

$\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

원기둥의 한 밑면과 평면 $z = 10$이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 각 OAB의 크기도 θ이므로

$\cos\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

이때, 원기둥의 한 밑면의 넓이를 S, 이 밑면의 평면 $z = 10$ 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S = \pi \times 6^2 = 36\pi$

$S' = S \times \cos\theta$

$= 36\pi \times \frac{4}{5}$

$= \frac{144}{5}\pi$

<답> ②

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설

15.

출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있고 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

A_n의 x좌표가 $\frac{1}{n}$이므로

$$\mathrm{A}_n\left(\frac{1}{n},\ \log_3\frac{1}{n}\right)$$

한편, B_n의 좌표를 $(b_n,\ \log_3 b_n)$이라 하면 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n+2\times\frac{1}{n}}{1+2},\ \frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{1+2}\right)$$

즉,

$$\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n+\frac{2}{n}}{3},\ \frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{3}\right)$$

이때, 점 C_n의 y좌표가 0이므로

$$\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}=0$$

$$\log_3 b_n=\log_3 n^2$$

$$\therefore\ b_n=n^2$$

따라서,

$$x_n=\frac{b_n+\frac{2}{n}}{3}=\frac{n^2+\frac{2}{n}}{3}=\frac{n^3+2}{3n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2}{3n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^3}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

<답> ①

16.

출제의도 : 역행렬에 관련된 성질을 이해하고 있는가?

ㄱ. $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$에서

$$(A+B)\frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1})=E$$

이므로

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1})$$

즉, $A+B$의 역행렬이 존재한다. <참>

ㄴ. $A=E$이면 $A^{-1}=E$이므로 주어진 식에서

$$(E+B)(E+B^{-1})=4E$$

$$E+B+B^{-1}+E=4E$$

$$B+B^{-1}=2E$$

양변에 B를 곱하면

$$B^2+E=2B$$

$$(B-E)^2=O$$

이때, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$으로 놓으면

$(B-E)^2=O$이지만 $B\neq E$이다.

<거짓>

ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$에서 $2AB=2BA=E$이므로

$$A^{-1}=2B,\ B^{-1}=2A$$

주어진 식에 대입하면

$$(A+B)(2A+2B)=4E$$

$$(A+B)^2=2E$$

$$A^2+2AB+B^2=2E$$

$A^2+B^2=E$ <참>

<답> ③

17.

출제의도 : 수열에 관련된 증명을 이해하고 있는가?

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}=\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n-1}{4^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\cdots+\frac{n-1}{4^n}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}-\frac{n-1}{4^n}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

이때, $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}$ 의 양변에 2^n 을 곱하면

$$a_n=2^{n-1}a_1+2^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}$$

$$=2^{n-1}a_1+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

$$=2^{n-1}\left(-\frac{4}{9}\right)+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

$$=\boxed{-\frac{2^{n+1}}{9}}+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

따라서, $f(n)=n-1$, $g(n)=-\frac{2^{n+1}}{9}$ 이므로

$$f(10)\times g(5)=9\times\left(-\frac{2^6}{9}\right)$$

$$=-64$$

<답> ①

18.

출제의도 : 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 이해하고 확률을 구할 수 있는가?

ㄱ. $V(\overline{X})=\frac{2^2}{n}=\frac{4}{n}$ (참)

ㄴ. $E(\overline{X})=10$에서 $\overline{X}$는 정규분포 $N(10,\frac{2^2}{n})$을 따르므로

$P(\overline{X}\leq 10-a)=P(\overline{X}\geq 10+a)$ (참)

ㄷ. $P(\overline{X}\geq a)=P\left(Z\geq\frac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=P(Z\leq b)$

이므로

$\frac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}=-b$, $a-10=-\frac{2}{\sqrt{n}}b$

$\therefore\ a+\frac{2}{\sqrt{n}}b=10$ (참)

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ, 모두 옳다.

<답> ⑤

19.

출제의도 : 삼각함수의 배각공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$\angle BOP_1=\theta_1$, $\angle BOP_2=\theta_2$ 라 하고 세 점 P_1, P_2, P_3가 움직인 거리를 각각 l_{P_1}, l_{P_2}, l_{P_3}이라 하면

$l_{P_1}=1\times\theta_1=\theta_1$

$l_{P_2}=2\times\theta_2=2\theta_2$

$l_{P_3}=4\times\theta=4\theta$

이고 세 점의 속력은 같으므로

$\theta_1=2\theta_2=4\theta$

$\therefore\ \theta_1=4\theta$, $\theta_2=2\theta$

따라서,

$S_1 = \frac{1}{2} \times 8 \times \sin 4\theta = 4\sin 4\theta$

$S_2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sin 2\theta = 8\sin 2\theta$

$S_3 = \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sin\theta = 16\sin\theta$

이고 $3S_3 = 2(S_1 + S_2)$에 대입하면

$48\sin\theta = 2(4\sin 4\theta + 8\sin 2\theta)$

$6\sin\theta = \sin 4\theta + 2\sin 2\theta$

$= 2\sin 2\theta\cos 2\theta + 4\sin\theta\cos\theta$

$= 4\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta + 4\sin\theta\cos\theta$

$3 = 2\cos\theta\cos 2\theta + 2\cos\theta$

$= 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) + 2\cos\theta$

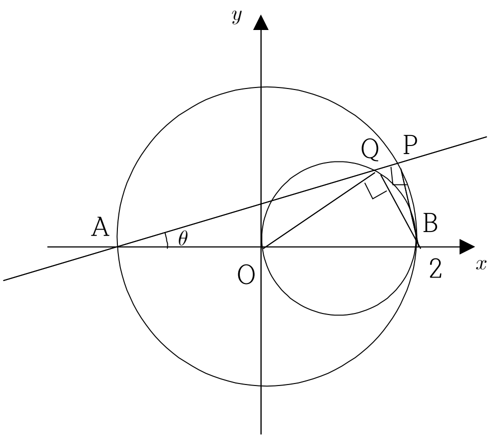
$= 4\cos^3\theta$

$\therefore\ \cos^3\theta = \frac{3}{4}$

<답> ③

20.

출제의도 : 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?



그림에서 $B(2,0)$라 하면

$\overline{AP} = 4\cos\theta$, $\overline{BP} = 4\sin\theta$

이고 $\overline{OQ} = a$, $\overline{BQ} = b$, $\overline{PQ} = x$라 하면

$a^2 + b^2 = 4 \cdots$ ㉠

$b^2 = x^2 + (4\sin\theta)^2 = x^2 + 16\sin^2\theta$

$a^2 = 2^2 + (4\cos\theta - x)^2 - 2 \times 2 \times (4\cos\theta - x)\cos\theta$

$= 4 + (16\cos^2\theta - 8\cos\theta x + x^2) - 16\cos^2\theta + 4\cos\theta x$

$= x^2 - 4\cos\theta x + 4$

따라서, ㉠에 대입하면

$(x^2 - 4\cos\theta x + 4) + (x^2 + 16\sin^2\theta) = 4$

$x^2 - 2\cos\theta x + 8\sin^2\theta = 0$

$\therefore\ x = \overline{PQ} = \cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 8\sin^2\theta}$

$(\because\ 0 < \cos\theta < 1)$

$\therefore\ \lim_{\theta\to+0} \frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to+0} \frac{\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 8\sin^2\theta}}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to+0} \frac{8\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 8\sin^2\theta})}$

$= \lim_{\theta\to+0} 8\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \times \frac{1}{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 8\sin^2\theta}}$

$= 8 \times 1^2 \times \frac{1}{2} = 4$

<답> ④

21.

출제의도 : 역함수의 미분법과 변곡점의 의미를 이해하여 함숫값을 구할 수 있는가?

조건 (나)에서 $x\to3$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to3}\{f(x) - g(x)\} = 0$

$\therefore\ f(3) = g(3)$

또한, $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수의 관계이므로

$f(3) = g(3) = 3 \cdots$ ㉠

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)-g(x)+g(3)}{(x-3)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{g(x)}-\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\times\frac{1}{g(x)}\right\}$$

$$=f'(3)\times\frac{1}{g(3)}-g'(3)\times\frac{1}{g(3)}$$

$$=\frac{1}{3}\{f'(3)-g'(3)\}=\frac{8}{9}$$

이때, $g'(3)=\dfrac{1}{f'(g(3))}=\dfrac{1}{f'(3)}$ 이므로

$$\frac{1}{3}\left\{f'(3)-\frac{1}{f'(3)}\right\}=\frac{8}{9}$$

$3\{f'(3)\}^2-8f'(3)-3=0$

$\{3f'(3)+1\}\{f'(3)-3\}=0$

$\therefore\ f'(3)=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $f'(3)=3$

그런데, $f(x)$의 삼차항의 계수는 양수이고 역함수가 존재해야 하므로

$f'(x)\geq0$ 이다.

$\therefore\ f'(3)=3\cdots$㉡

㉠에 의하여

$f(x)-3=(x-3)(x^2+ax+b)$

라 하고 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+b+(x-3)(2x+a)\cdots$㉢

㉡에 의하여

$f'(3)=9+3a+b=3$

$\therefore\ 3a+b=-6\cdots$㉣

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=2x+a+(2x+a)+2(x-3)$

$\qquad=6x+2a-6$

이때, 변곡점의 x좌표는

$6x+2a-6=0$

에서

$x=\dfrac{3-a}{3}$

그런데, $f'(3)=3$ 에서

$g'(3)=\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{1}{3}$

이므로 조건 (가)에 의하여 $f(x)$의 변곡점의 x좌표는 3이 되어야 한다. 즉,

$\dfrac{3-a}{3}=3$

$\therefore\ a=-6$

㉣에 대입하면 $b=12$ 이므로

$f(x)-3=(x-3)(x^2+ax+b)$

$\qquad=(x-3)(x^2-6x+12)$

$\therefore\ f(1)=-2\times7+3=-11$

<답> ①

22.

출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

주어진 식의 양변을 미분하면

$f'(x^3)\times3x^2=6x^2-2x+32$

따라서, $x=1$을 대입하면

$f'(1)\times3=36$

$\therefore\ f'(1)=12$

<답> 12

23.

출제의도 : 실생활 관련한 분수부등식의 해를 구할 수 있는가?

A그릇에 있는 소금의 양을 a라 하면

$a=30\times\dfrac{10}{100}=3(\mathrm{g})$

B그릇에 있는 소금의 양을 b라 하면

$b=2\times\dfrac{50}{100}=1(\mathrm{g})$

따라서,

$f(x)=\dfrac{3}{x+10}\times 100,\ g(x)=\dfrac{2x+1}{x+50}\times 100$

이므로

$\dfrac{3}{x+10}\times 100<\dfrac{2x+1}{x+50}\times 100$

$\dfrac{3}{x+10}-\dfrac{2x+1}{x+50}<0$

$\dfrac{3x+150+(-2x^2-21x-10)}{(x+10)(x+50)}<0$

$\dfrac{x^2+9x-70}{(x+10)(x+50)}>0$

$\dfrac{(x-5)(x+14)}{(x+10)(x+50)}>0$

이때, $x+10>0,\ \ x+14>0,\ \ x+50>0$

이므로

$x-5>0$

$\therefore\ x>5$

따라서, 자연수 x의 최솟값은 6이다.

<답> 6

24.

출제의도 : 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

$\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$ 에서 $\sqrt{\ln x}=1$ 이므로

$\ln x=1$

$\therefore\ x=e$

$V=\pi\displaystyle\int_1^e\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{\ln x}{x}}\right)^2\right\}dx$

$\quad=\pi\displaystyle\int_1^e\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)dx$

이때, $1-\ln x=t$라 하면 $-\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=e$일 때 $t=0$이므로

$V=\pi\displaystyle\int_1^0 t(-dt)\quad=\pi\int_0^1 tdt$

$\quad=\pi\left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^1=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ \dfrac{100V}{\pi}=50$

<답> 50

25.

출제의도 : 확률밀도함수의 그래프의 특징을 이용하여 연속확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$

이므로

$\displaystyle\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$

$\therefore\ E(X)=0$

$h(x)=x^2f(x)$라 하면

$h(-x)=(-x)^2f(-x)=x^2f(x)=h(x)$

이므로

$\displaystyle\int_{-1}^1 x^2f(x)dx=2\int_0^1 x^2f(x)dx=2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$

$\therefore V(X)=\displaystyle\int_{-1}^1 x^2f(x)dx-\left\{\int_{-1}^1 xf(x)dx\right\}^2$

$\qquad=\dfrac{1}{5}$

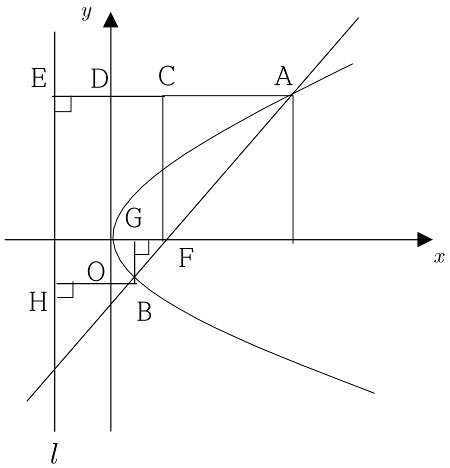
$\therefore\ V(10X+3)=100V(X)=100\times\dfrac{1}{5}=20$

<답> 20

26.

출제의도 : 포물선의 정의와 포물선과 직선의 위치 관계를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설



그림에서 제 1사분면의 정사각형의 한 꼭짓점을 C, 점 A에서 y축과 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 점 B에서 x축과 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하자.

$\overline{AF}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $\overline{AC}=2$ 이므로

$\overline{CE}=\overline{AE}-\overline{AC}=\overline{AF}-\overline{AC}$

$=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)$

또한, $\overline{BF}=k$라 하면

$\overline{CE}=\overline{BH}+\overline{GF}=\overline{BF}+\overline{GF}$

$=k+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k=\dfrac{k}{2}(2+\sqrt{2})$

따라서, $\dfrac{k}{2}(2+\sqrt{2})=2(\sqrt{2}-1)$ 이므로

$k=\dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}}=6\sqrt{2}-8$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BF}+\overline{AF}$

$=(6\sqrt{2}-8)+2\sqrt{2}$

$=8\sqrt{2}-8$

$\therefore\ a^2+b^2=(-8)^2+8^2=128$

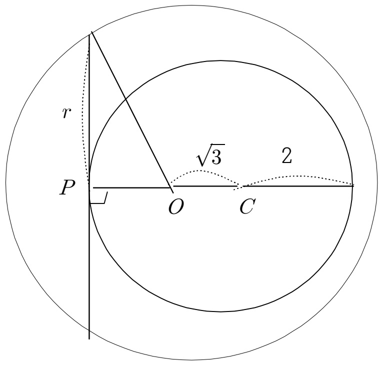
<답> 128

27.

출제의도 : 두 구의 위치관계를 이용하여 단면이 만나서 생기는 도형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4\cdots$㉠는 중심이 $C(1,1,1)$이고 반지름의 길이가 2인 구이고 구 $x^2+y^2+z^2=16\cdots$㉡은 중심이 원점 $O(0,0,0)$이고 반지름의 길이가 4인 구이다.

이때, $\overline{OC}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ 이므로 ㉠은 ㉡에 포함되고, ㉡의 중심은 ㉠에 포함된다.



따라서 ㉠에 접하는 평면이 ㉡과 만나서 생기는 도형은 원이고 넓이가 최대가 되려면 점 O에서 평면 사이의 거리가 가장 짧아야 한다. 즉, 두 구의 중심 C, O 를 지나는 직선과 구 ㉠과의 교점 중에서 점 O에 가까운 점을 P라 하면 점 P가 평면의 접점이 될 때이다.

이때, 단면이 나타내는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r^2=4^2-(2-\sqrt{3})^2$

$=16-(7-4\sqrt{3})=9+4\sqrt{3}$

따라서, 넓이의 최댓값은

$\pi r^2=\pi(9+4\sqrt{3})$

$\therefore\ a+b=13$

<답> 13

28.

출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 수열의 극한을 구할 수 있는가?

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$에서

$$(a_{n+1}-a_n)^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{16}{9^n}\ (n \geq 2)$$

이때, $n=1$이면

$$(a_2-a_1)^2 = 2(1-\frac{1}{9}) = \frac{16}{9}$$

이므로

$$(a_{n+1}-a_n)^2 = \frac{16}{9^n}\quad (n \geq 1)$$

한편, $a_{n+1} > a_n$이므로

$$a_{n+1}-a_n = \frac{4}{3^n}$$

$$\therefore\ a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$$

이때, $a_1 = 10$이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3^k}$$

$$= 10 + \frac{\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 10 + 2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}(n \geq 2)$$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 12$$

<답> 12

29.

출제의도 : 벡터의 내적의 계산과 의미를 이해하여 벡터의 크기의 최댓값을 구할 수 있는가?

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right) = \cos\frac{2}{3}\pi$$

$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_0A_3}|^2 = -1 \cdots ㉠$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_0A_3}|^2 = 1 \cdots ㉡$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_3}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right) = 1$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{A_0A_3}| = 2$$

이때, ㉠, ㉡에 대입하면

$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1} = 1$, $\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2} = 3$

이고 $\overrightarrow{A_0A_3}$과 $\overrightarrow{A_0A_1}$이 이루는 각의 크기를 θ_1, $\overrightarrow{A_0A_3}$과 $\overrightarrow{A_0A_2}$가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1} = 2|\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\theta_1 = 1$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\theta_1 = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2} = 4\cos\theta_2 = 3$$

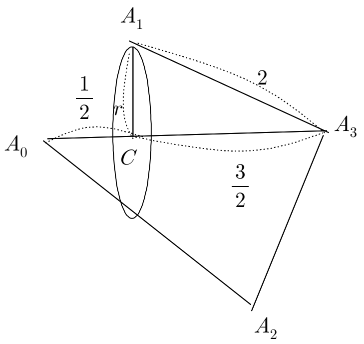
$$\therefore\ \cos\theta_2 = \frac{3}{4}$$

이때,

$$|\overrightarrow{A_2A_3}|^2 = 2^2+2^2-2\times2\times2\times\frac{3}{4} = 2$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{A_2A_3}| = \sqrt{2}$$

따라서, $|\overrightarrow{A_1A_3}| = 2$ 이고 $|\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\theta = \frac{1}{2}$ 이므로 점 A_1이 나타내는 도형은 선분 A_0A_3을 1 : 3 으로 내분하는 점을 C라 할 때, 점 C를 중심으로 하는 원이다.

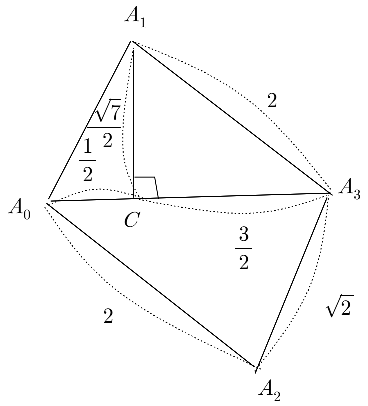


따라서, 반지름의 길이를 r라 하면

$$r^2 = 2^2 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{7}{4}$$

$$\therefore\ r = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

이때, $|\overrightarrow{A_1A_2}|$가 최대가 되려면 즉, 선분 $\overline{A_1A_2}$가 가장 긴 경우는 점 A_1이 평면 $A_0A_2A_3$과 같은 평면에 있을 때이다.



그런데, $\overline{A_0A_1} = \sqrt{(\frac{\sqrt{7}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2}$

이므로 두 삼각형 $A_0A_1A_3$, $A_0A_2A_3$은 합동이므로 $\angle A_1A_0A_3 = \theta_3$이라 하면

$$M^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\times 2\times \sqrt{2}\cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$= 6 - 4\sqrt{2}(\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3)$$

$$= 6 - 4\sqrt{2}(\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{14}}{4})$$

$$= 6 - (\frac{3}{2} - \frac{7}{2}) = 8$$

<답> 8

30.

출제의도 : 로그부등식을 활용하여 정사각형의 개수를 구할 수 있는가?

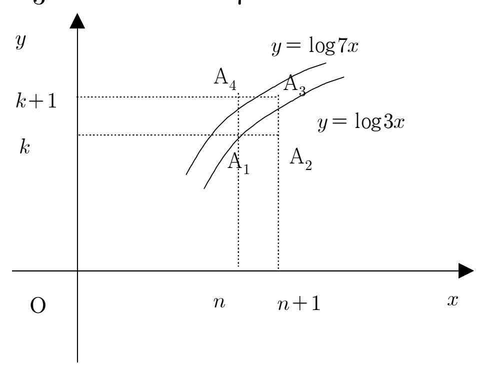
두 자연수 n, k에 대하여 아래 그림과 같이 네 꼭짓점 $\mathrm{A}_1(n, k)$, $\mathrm{A}_2(n+1, k)$, $\mathrm{A}_3(n+1, k+1)$, $\mathrm{A}_4(n, k+1)$으로 하는 정사각형이 두 함수 $y = \log 7x$, $y = \log 3x$와 모두 만나기 위해서는

$\log 7n \le k+1$ 이고 $\log 3(n+1) \ge k$

이어야 한다.

즉, $n \le \frac{10^{k+1}}{7}$ 이고 $n \ge \frac{10^k}{3} - 1$

$$\therefore\ \frac{10^k}{3} - 1 \le n \le \frac{10^{k+1}}{7}$$



(i) $k = 1$일 때,

$$\frac{10}{3} - 1 \le n \le \frac{100}{7}$$

그러므로 자연수 n은 3, 4, $\cdots$, 14로 12개다.

(ii) $k = 2$일 때,

$$\frac{100}{3} - 1 \le n \le \frac{1000}{7}$$

그리고 꼭지점의 x좌표는 모두 100이하이므로 $n + 1 \le 100$이다.

그러므로 99이하의 자연수 n은

33, 34, $\cdots$, 99로 67개다.

따라서 모든 정사각형의 개수는

$12 + 67 = 79$

<답> 79