제 2 교시

수학 영역 (B형)

성명		수험 번호					2				

- 자신이 선택한 유형('A'형/'B'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\sqrt{2} \div \sqrt[5]{4\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

2. 두 행렬 A, B 에 대하여

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B - A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때, $BA - A^2$ 은? [2점]

① $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3. 지수방정식 $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

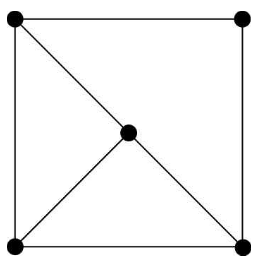
4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = -1$, $a_4 + a_6 + a_8 = 33$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [3점]

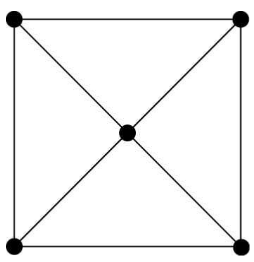
① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

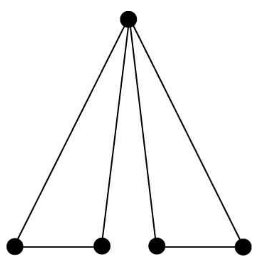
5. 꼭짓점의 개수가 5 인 그래프 G의 두 꼭짓점을 잇는 변의 개수를 행렬의 성분으로 하는 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬이 다음과 같다.

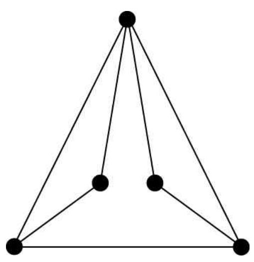
$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

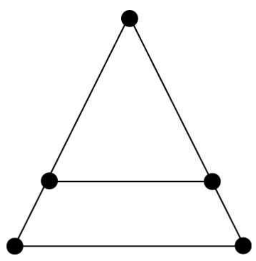
이때, 그래프 G로 가능한 것은? [3점]

①


②


③


④


⑤


6. 세 실수 x, y, z가 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ 과 $2^x=3^y=5^z$ 을 만족시킬 때, $2^x+3^y+5^z$ 의 값은? [3점]

① 2100 ② 2400 ③ 2700 ④ 3000 ⑤ 3300

7. 2012 년 9 월 초부터 월이율 0.4 %, 1 개월마다의 복리로 매월 초에 10 만 원씩 24 개월 동안 은행에 적립할 때, 2014 년 8 월 말의 원리합계는? (단, $1.004^{24}=1.1$ 로 계산한다.) [3점]

① 251 만 원 ② 256 만 원 ③ 261 만 원
④ 266 만 원 ⑤ 271 만 원

8. 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

(가) 모든 실수 t에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} t-k & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재한다.

(나) x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} k^2 & k+3 \\ k & k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖는다.

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

9. 이차부등식 $x^2-2(3^a+1)x+10(3^a+1) \geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

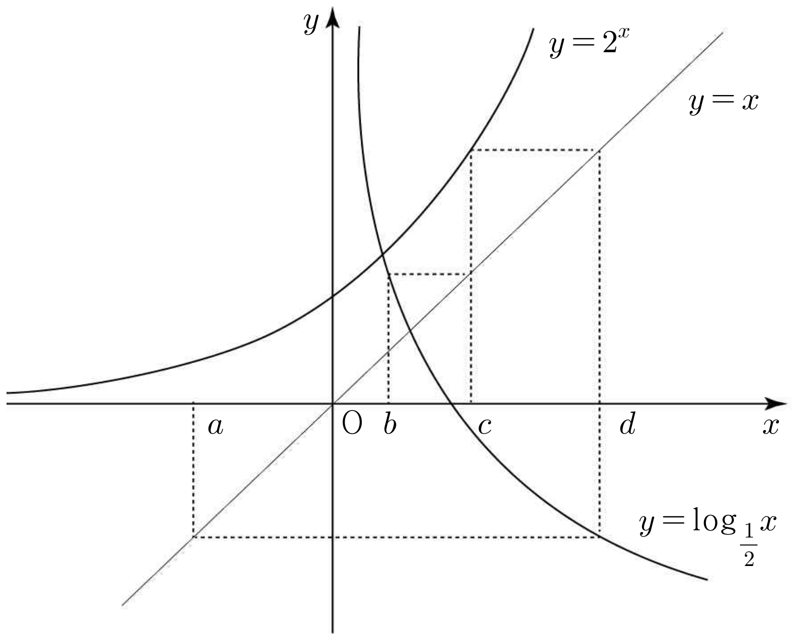
10. 평행한 두 전선에 교류 전류가 흐르면 각 전선에 전류의 흐름을 방해하는 기전력이 발생하고, 이 기전력의 크기를 결정하는 값을 인덕턴스라고 한다. 평행한 두 전선 사이의 거리가 $D(\mathrm{m})$, 평행한 두 전선의 반지름이 모두 $r(\mathrm{m})$일 때, 인덕턴스 $L(\mu\mathrm{H/m})$는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$L = 0.46\log\frac{D}{r}+0.05$$

평행하고 반지름이 같은 두 전선 사이의 거리가 $K(\mathrm{m})$일 때의 인덕턴스는 L_1이고, 이 두 전선 사이의 거리가 $8K(\mathrm{m})$일 때의 인덕턴스는 L_2이다. 이때, L_2-L_1의 값은? (단, $\log 2=0.30$으로 계산한다.) [3점]

① 0.114　② 0.214　③ 0.314　④ 0.414　⑤ 0.514

[11~12] 그림은 세 함수 $y=2^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=x$의 그래프와 $a<0<b<c<d$인 네 실수 a, b, c, d의 관계를 나타낸 것이다. 11번과 12번의 두 물음에 답하시오. (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.)



11. 세 수 b, $2c$, $5d$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ -1
④ $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

12. 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, x축, 그리고 직선 $x=d$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하고 곡선 $y=2^x$, x축, y축, 그리고 직선 $x=c$로 둘러싸인 영역의 넓이를 T라 하자. $a=-3$일 때, $S+T$의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

13. 모든 항이 실수이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_1 < 0$ 이면 $a_{101} < 0$ 이다.

ㄴ. $a_1 < a_2 < 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

ㄷ. $a_1 < a_2 < 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < a_1$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 어느 상점에서 표와 같이 사탕과 초콜릿이 들어 있는 두 종류의 상품 P, Q를 만들었다. 상품 P, Q의 개당 판매이익금은 각각 5000원, 4500원이다.

	사탕	초콜릿
상품 P	15개	16개
상품 Q	18개	12개

사탕 1260개와 초콜릿 1020개를 모두 이용하여 상품 P, Q를 만든 후, 이를 모두 팔았을 때의 총 판매이익금을 행렬

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5000 & 4500 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & a+2 \\ a & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 420 \\ 255 \end{pmatrix}$$

로 표현할 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)3^n} \quad \cdots\cdots (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$= \sum_{k=1}^{1} \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} = \boxed{(가)}$ =(우변)

이므로 (★)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} = 1 - \frac{1}{(m+1)3^m}$ 이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \cdot \boxed{(나)}$$

$$= 1 - \frac{1}{(m+1)(m+2)} \cdot \boxed{(다)} + \frac{2m+5}{(m+1)(m+2)3^{m+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(m+2)3^{m+1}}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

위 증명에서 (가)에 알맞은 값을 p라 하고 (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p \times f(1) \times g(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{54}$ ② $\frac{13}{27}$ ③ $\frac{29}{54}$ ④ $\frac{16}{27}$ ⑤ $\frac{35}{54}$

16. 자연수 n과 양수 A에 대하여

이차방정식 $x^2-\left(3n+\dfrac{1}{3n}\right)x+1=0$의 한 근은 $\log A^3$의 지표이고, 다른 한 근은 $\log A^2$의 가수이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

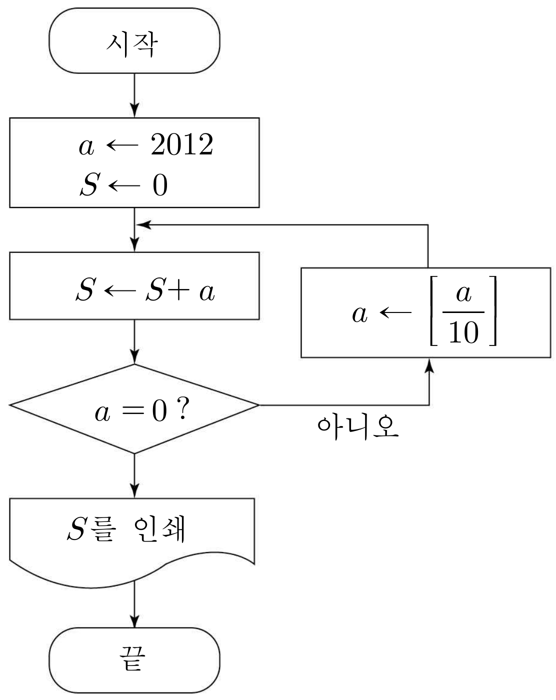
ㄱ. $n=1$이면 $\log A^3$의 지표는 3이다.

ㄴ. $\log A$의 가수는 $\dfrac{1}{6n}$이다.

ㄷ. A^{12}이 자연수가 되도록 하는 n의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

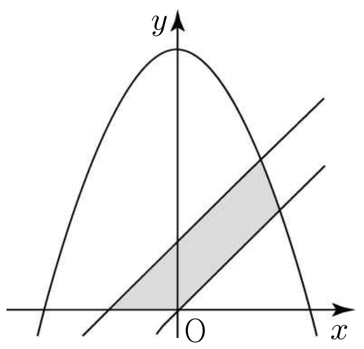


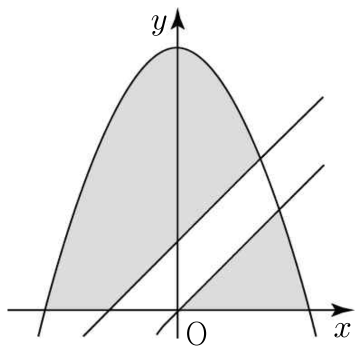
① 2230 ② 2235 ③ 2240 ④ 2245 ⑤ 2250

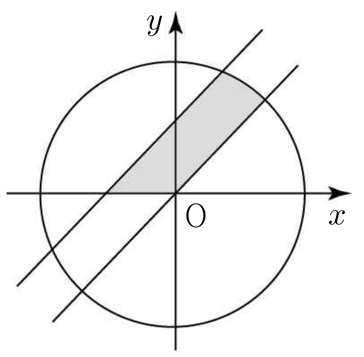
18. 두 실수 x, y가 다음 조건을 만족시킨다.

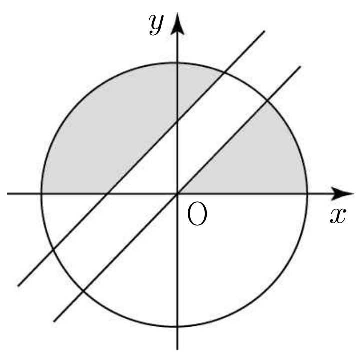
(가) $\log_2(y-x)<0$
(나) $\log_2 y<\log_4(4-x^2)$

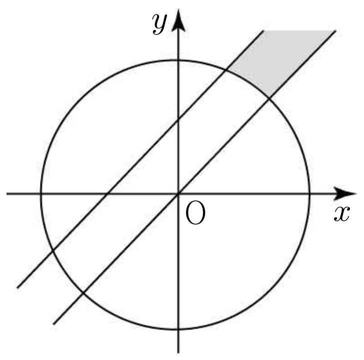
이때, 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 존재하는 영역을 어두운 부분으로 바르게 나타낸 것은? (단, 경계선은 제외한다.) [4점]

①


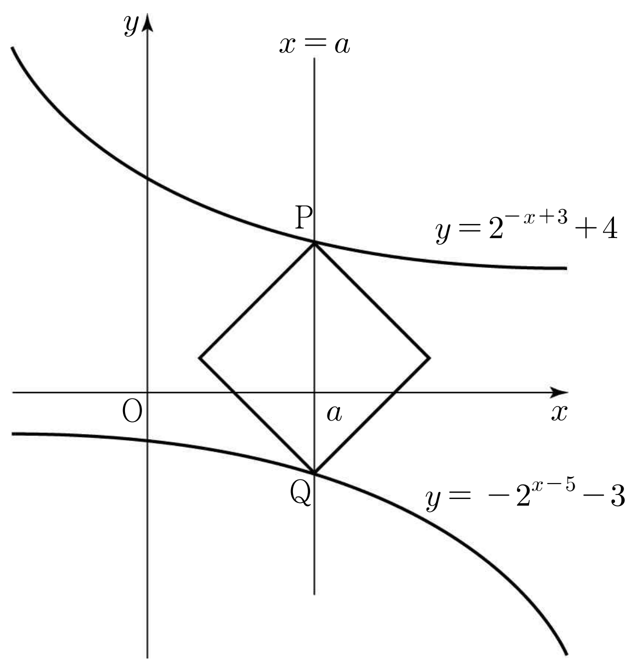
②


③


④


⑤


19. 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=2^{-x+3}+4$, $y=-2^{x-5}-3$의 교점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이의 최솟값은? [4점]



① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

20. 자연수 n에 대하여

$A_n = \begin{pmatrix} n & 1 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ 이고 $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{3}{2}$

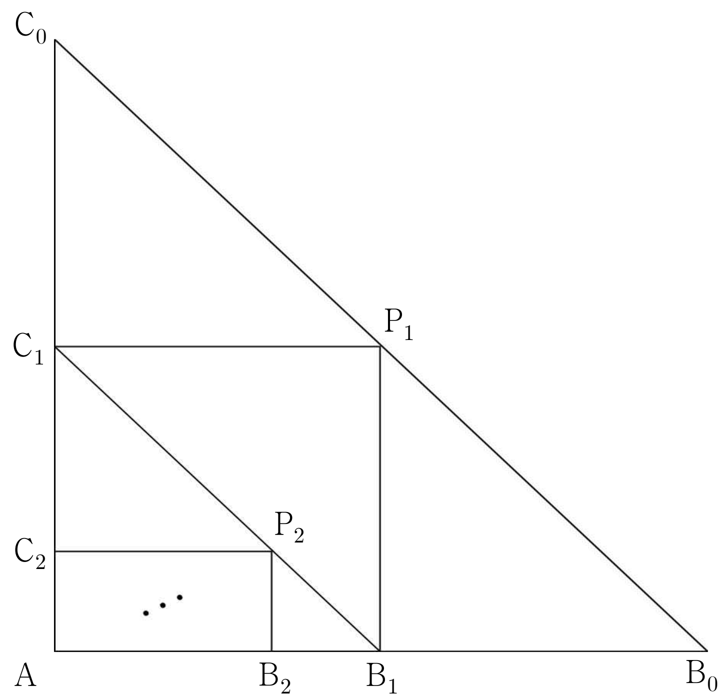
ㄴ. $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A_{n+1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

ㄷ. $\dfrac{a_n}{b_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 AB_0C_0이 있다. 선분 B_0C_0 위에 꼭짓점 P_1이 있고, 각 A를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_1, C_1이 있는 직사각형 $AB_1P_1C_1$을 $\overline{P_1B_1} : \overline{P_1C_1} = 1 : 1$이 되도록 그린다. 선분 B_1C_1 위에 꼭짓점 P_2가 있고, 각 A를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_2, C_2가 있는 직사각형 $AB_2P_2C_2$를 $\overline{P_2B_2} : \overline{P_2C_2} = 1 : 2$가 되도록 그린다.
이와 같은 방법으로 선분 $B_{n-1}C_{n-1}$ 위에 꼭짓점 P_n이 있고, 각 A를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_n, C_n이 있는 직사각형 $AB_nP_nC_n$을 $\overline{P_nB_n} : \overline{P_nC_n} = 1 : n$이 되도록 그린다.

선분 P_nB_n의 길이를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값은?
(단, 점 B_n은 선분 AB_0 위에 있다.) [4점]



① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

단답형(22 ~ 30)

22. $\sum_{k=1}^{10} 2k(k+1)$의 값을 구하시오. [3점]

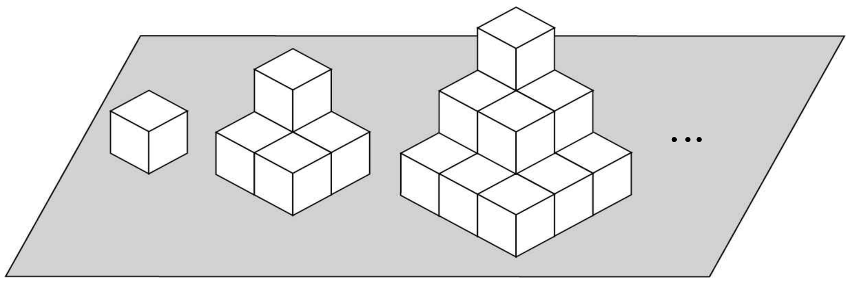
23. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-5}{7}\right)^n$이 수렴하기 위한 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 32이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이룰 때, $\sum_{k=1}^{11}\left|\log_2 a_k\right|$의 값을 구하시오. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=2a_n$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n+2}+a_8}{a_{3n-2}+a_2}$의 값을 구하시오. [3점]

26. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가 $A^2-A+E=O$, $B^2+2B=O$을 만족시킬 때, $A^7B^7=kAB$이 성립하도록 하는 실수 k의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.) [3점]

27. 불투명한 평면 위에 크기가 같은 정육면체 모양의 나무 블록을 이용하여 그림과 같은 규칙으로 n 층을 쌓고 한 면이라도 보이는 나무 블록의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 13$이다. 이때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]



28. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+1} - 2 = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$을 만족시킬 때, $a_8 = pa_5 + qa_4$를 만족하는 두 자연수 p, q에 대하여 $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표평면 위에 두 점 A(4, 0), B(0, −3)이 있고, 자연수 n에 대하여 점 P_n이 원 $C_n : (x+2)^2+(y-2)^2=\left(\frac{2}{n}\right)^2$ 위를 움직일 때, 다음 [단계]와 같이 수열 $\{a_n\}$을 정한다.

> [1단계] 원 C_1 위를 움직이는 점 P_1에 대하여 삼각형 ABP_1의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차를 a_1이라 하자.
> [2단계] 원 C_2 위를 움직이는 점 P_2에 대하여 삼각형 ABP_2의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차를 a_2라 하자.
> ⋮
> [n단계] 원 C_n 위를 움직이는 점 P_n에 대하여 삼각형 ABP_n의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차를 a_n이라 하자.

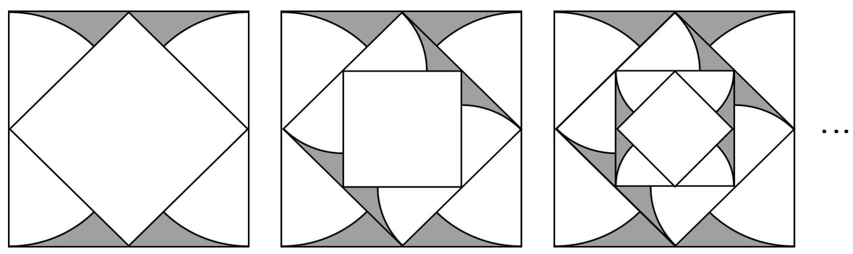
이때, $\sum_{n=1}^{19} a_n a_{n+1}$의 값을 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 R의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_1을 붙여서 만든 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_1이라 하자.

그림 T_1에서 정사각형 R_1의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R_1의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_2를 붙여서 만든 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_2라 하자.

그림 T_2에서 정사각형 R_2의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R_2의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_3을 붙여서 만든 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 T_n이라 하고 그림 T_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = p+q\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



T_1 T_2 T_3 …

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.