2012학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	④	2	①	3	⑤	4	②	5	⑤
6	⑤	7	④	8	③	9	④	10	②
11	③	12	①	13	①	14	③	15	⑤
16	③	17	①	18	④	19	②	20	②
21	③	22	50	23	7	24	31	25	4
26	16	27	317	28	3	29	81	30	73

해 설

1. [출제의도] 지수가 유리수인 수들의 곱을 계산한다.

$2^{-1}=\frac{1}{2}$, $36^{\frac{1}{2}}=\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$

$\therefore\ 2^{-1}\times 36^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times 6=3$

2. [출제의도] 행렬의 덧셈과 실수배의 뜻을 알고, 이를 계산한다.

$2A=2\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$이므로

$2A+B=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 8 & 7\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 행렬의 곱셈과 분배법칙을 이용하여 계산한다.

$A(B+C)=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ -7 & 3\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 17\\ -7 & -1\end{pmatrix}$

[다른풀이]

행렬의 연산에 대한 분배법칙을 적용하면

$A(B+C)=AB+AC$

$AB=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}$

$AC=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 9\\ -11 & 3\end{pmatrix}$

$\therefore\ AB+AC=\begin{pmatrix}22 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-13 & 9\\ -11 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 17\\ -7 & -1\end{pmatrix}$

4. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 이용하여 값을 구한다.

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a^2 & 0\\ 0 & a^2+1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}1+a^2 & 0\\ 0 & a^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$에서 각각의 성분이 같아야 하므로 $1+a^2=4$

$\therefore\ a^2=3$

5. [출제의도] 지수법칙을 이해하고 지수방정식의 해를 구한다.

$4^x=32$에서 $2^{2x}=2^5$

$2x=5$

$\therefore\ x=\frac{5}{2}$

$8^y=16$에서 $2^{3y}=2^4$

$3y=4$

$\therefore\ y=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 2x+3y=2\times\frac{5}{2}+3\times\frac{4}{3}=9$

[참고]

지수함수 $y=2^x$은 일대일 함수이다. 따라서 $2^{x_1}=2^{x_2}$이면 $x_1=x_2$이다.

6. [출제의도] 행렬의 역행렬을 이용하여 값을 구한다.

$B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$의 역행렬을 구하면

$B^{-1}=\frac{1}{(-3)\times(-2)-5\times 1}\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$

$A+B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & a\\ 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a-5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A+B^{-1}=E$이므로 $a-5=0$

$\therefore\ a=5$

7. [출제의도] 행렬을 이용하여 연립일차방정식의 해의 조건에 맞는 값을 구한다.

주어진 연립방정식을

$\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ ⋯ ㉠

이라 하면 ㉠이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가져야 하므로 행렬 $\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다. 왜냐하면 행렬 $\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}$이 역행렬을 가진다고 가정하면 다음과 같은 모순이 생긴다.

이 행렬의 역행렬을 $\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}^{-1}$이라 하자.

이 역행렬을 ㉠의 양변의 왼쪽에 곱하면

$\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 되어 해는 $x=0$, $y=0$ 뿐이다. 이는 ㉠이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖는다는 조건에 모순이므로 행렬 $\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다. 따라서

$(5-k)\times 3-4\times 3=0$

$\therefore\ k=1$

[다른풀이]

주어진 연립방정식

$\begin{pmatrix}5-k & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

을 정리하면

$\begin{cases}(5-k)x+4y=0\\ 3x+3y=0\end{cases}$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가져야 하므로 해가 무수히 많아야 한다.

$3x+3y=0$에서 $y=-x$이므로 이를 $(5-k)x+4y=0$에 대입하여 x에 관하여 정리하면,

$(1-k)x=0$

위 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 $1-k=0$ $\therefore\ k=1$

8. [출제의도] 지수법칙을 이해하고 식을 간단히 한다.

$\sqrt{a}\times\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1}$

$=a^{\frac{1}{6}}$

한편 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$이므로

$\frac{1}{6}=\frac{1}{n}$ $\therefore\ n=6$

9. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 추측하여 조건에 맞는 값을 구한다.

$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$이므로

$A^{2012}=(A^2)^{1006}=E^{1006}=E$

따라서

$A^{2012}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$

$\therefore\ p=-2$, $q=3$이므로 $p+q=1$

[참고]

케일리-해밀턴 정리에 의하면

행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에 대하여 등식

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

이 항상 성립한다.

따라서 $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 다음과 같이 성립한다.

$A^2-(-2+2)A+\{(-2)\times 2-3\times(-1)\}E=O$

$A^2-E=O$

$\therefore\ A^2=E$

10. [출제의도] 조건에 맞는 행렬을 이해하고 그 결과를 파악한다.

행렬 A의 거듭제곱을 차례로 구해 보면

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=-EA=-A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$A^5=A^4A=EA=A$

$A^6=A^4A^2=E(-E)=-E$

⋯

위와 같이 반복되어 나타난다. 따라서 음이 아닌 자연수 k에 대하여 다음과 같이 성립한다.

ⅰ) $n=4k$이면 $A^n=(A^4)^k=E^k=E$

ⅱ) $n=4k+1$이면 $A^n=(A^4)^kA=E^nA=EA=A$

ⅲ) $n=4k+2$이면

$A^n=(A^4)^kA^2=E^nA^2=E(-E)=-E$

ⅳ) $n=4k+3$이면

$A^n=(A^4)^kA^3=E^nA^3=E(-A)=-A$

따라서 임의의 자연수 n에 대하여 A^n은 네 행렬 A, $-A$, E, $-E$ 중에서 어느 하나와 일치한다.

$\therefore\ S=\{A, -E, -A, E\}$이므로 집합 S의 원소의 개수는 4이다.

[참고]

케일리-해밀턴 정리에 의하면

행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에 대하여 등식

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

이 항상 성립한다.

따라서 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 다음과 같이 성립한다.

$A^2-(0+0)A+\{0\times 0-1\times(-1)\}E=O$

$A^2+E=O$ $\therefore\ A^2=-E$

11. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하여 대소 관계를 구한다.

지수함수 $y=3^x$에서 밑이 3이므로 1보다 크다. 따라서 함수 $y=3^x$의 그래프에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉, $m<n$이면 $3^m<3^n$이 성립한다.

주어진 조건에서

$a=3$, $b=\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$

한편 지수함수의 성질에 의하여

$\frac{2}{3}<1$이므로 $3^{\frac{2}{3}}<3^1$

따라서 $b=3^{\frac{2}{3}}<3^1=a$ $\therefore\ b<a$ ⋯ ㉠

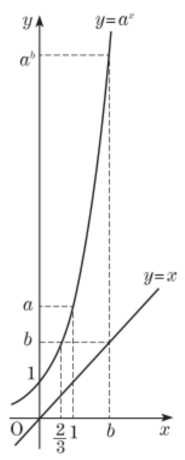
또, $0<\frac{2}{3}$이므로 $3^0<3^{\frac{2}{3}}$, 즉 $1<b$

따라서 $3^1<3^b$이므로 $a<a^b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $b<a<a^b$

[다른풀이]

함수 $y=3^x$의 그래프와 $y=x$의 그래프를 이용하여 a, b, a^b의 대소 관계를 표현하면 다음과 같다.



$\therefore\ b<a<a^b$

12. [출제의도] 지수함수를 이해하고 합성함수의 그래프의 개형을 구한다.

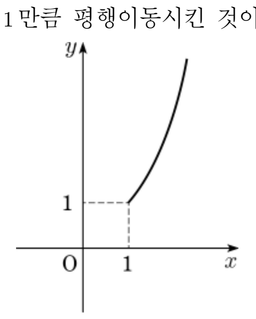
합성함수 $y=(g\circ f)(x)$는 다음과 같다.

$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)=3^{|x-1|}$

따라서 $g(f(x))=\begin{cases}3^{x-1} & (x\ge 1)\\ 3^{-(x-1)} & (x<1)\end{cases}$

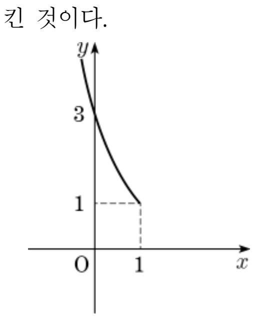
i) $x\ge 1$일 때,

$y=3^{x-1}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

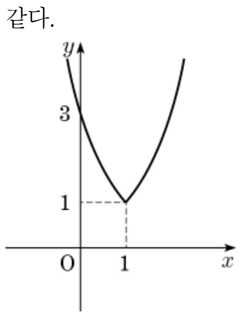


ii) $x<1$일 때,

$3^{-(x-1)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$이므로 $y=3^{-(x-1)}$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

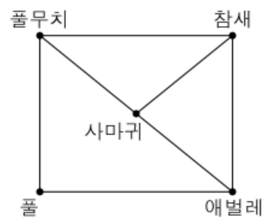


i), ii)에 의하여 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



13. [출제의도] 생태계의 먹이 사슬 관계를 행렬로 표현하고 이를 해석한다.

각 생물을 꼭짓점으로 하고 연결선을 변으로 하는 그래프는 다음과 같다.



한편 위 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬이

$$\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&0&0&1\\1&0&0&0&1\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

이므로 제i행에 있는 모든 성분의 합은 제i행에 해당하는 생물이 먹이 사슬 관계를 가지는 생물의 수와 일치한다. 각 행의 모든 성분의 합은 3, 3, 3, 2, 3이다. 따라서 제4행에 해당하는 생물 D는 2개의 생물과 먹이 사슬 관계를 맺고 있으므로 '풀'이다.

14. [출제의도] 행렬의 역행렬과 거듭제곱을 이용하여 행렬의 성질을 증명한다.

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$를 T의 원소라 하면 어떤 자연수 n에 대하여

$A^n=O\ \cdots\ (*)$

이다.

(i) $n\le 2$일 때, $A\in S$이다.

(ii) $n\ge 3$일 때, A가 역행렬을 갖는다고 하자.

$(*)$의 양변에 $(A^{-1})^{n-1}$을 곱하면 $A=O$

그런데 영행렬 O는 역행렬을 갖지 않으므로 모순이다. 그러므로 A의 역행렬이 존재하지 않는다. 따라서

$\boxed{ad-bc=0}$이다.

이때, $A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a^2+ad&ab+bd\\ac+cd&ad+d^2\end{pmatrix}$

$=(a+d)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$=(a+d)A$

그러므로

$A^n=A^2A^{n-2}$

$=(a+d)AA^{n-2}=(a+d)A^{n-1}$

$=(a+d)A^2A^{n-3}=(a+d)(a+d)AA^{n-3}$

$=(a+d)^2A^{n-2}=\cdots=(a+d)^{n-1}A$에서

$A^n=\boxed{(a+d)^{n-1}}A$이다.

또, $A^n=O$이므로 $a+d=0$이다.

따라서 $A^2=(a+d)A=O$이므로 $A\in S$이다.

$\therefore\ T\subset S$

한편, S의 원소는 모두 T의 원소이므로 $S\subset T$이다.

$\therefore\ S=T$

15. [출제의도] 주어진 조건에 맞는 행렬의 성질을 추론한다.

ㄱ. $A\in S$, $B\in S$이므로 $AP=PA$, $BP=PB$이다.

따라서 $(AB)P=A(BP)=A(PB)$

$=(AP)B=(PA)B=P(AB)$ $\therefore\ AB\in S$ (참)

ㄴ. $A\in S$에 대하여 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하자.

$AP=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2b&-b\\c-2d&-d\end{pmatrix}$

$PA=\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\-2a-c&-2b-d\end{pmatrix}$

따라서 $AP=PA$이므로 $b=0$, $d=a+c$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의해 $A=\begin{pmatrix}a&0\\c&a+c\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}p&0\\r&p+r\end{pmatrix}$라 놓을 수 있다. 그러면

$AB=\begin{pmatrix}a&0\\c&a+c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&0\\r&p+r\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}ap&0\\cp+(a+c)r&(a+c)(p+r)\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}p&0\\r&p+r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\c&a+c\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}pa&0\\ra+(p+r)c&(p+r)(a+c)\end{pmatrix}$

$\therefore\ AB=BA$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16. [출제의도] 지수함수의 그래프 위의 점을 좌표로 표현하여 값을 구한다.

점 A가 선분 OB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=1:2$이다.

따라서 두 점 A, B의 좌표를 $\mathrm{A}(\alpha,\alpha)$, $\mathrm{B}(2\alpha,2\alpha)$로 놓을 수 있다.

곡선 $y=k\cdot 2^x$과 직선 $y=x$가 점 A를 지나므로

$\alpha=k\cdot 2^{\alpha}\cdots$ ㉠

또, 곡선 $y=k\cdot 2^x$과 직선 $y=x$가 점 B를 지나므로

$2\alpha=k\cdot 2^{2\alpha}\cdots$ ㉡

㉡÷㉠에서

$\frac{2\alpha}{\alpha}=\frac{k\cdot 2^{2\alpha}}{k\cdot 2^{\alpha}}$

$2=2^{\alpha}$

$\therefore\ \alpha=1$이고 ㉠에서 $k=\frac{\alpha}{2^{\alpha}}=\frac{1}{2}$

17. [출제의도] 검색과 관련하여 주어진 조건에 맞는 행렬의 성분을 구한다.

1번 책은 1번 키 워드 '기초'와 4번 키 워드 '이론'만 포함하고, 2번 키 워드 '수학'과 3번 키 워드 '심화'는 포함하지 않으므로

$a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{13}=0$, $a_{14}=1$

2번 책은 1번 키 워드 '기초', 2번 키 워드 '수학'과 4번 키 워드 '이론'을 포함하고, 3번 키 워드 '심화'는 포함하지 않으므로

$a_{21}=1$, $a_{22}=1$, $a_{23}=0$, $a_{24}=1$

3번 책은 3번 키 워드 '심화'만 포함하고, 1번 키 워드 '기초', 2번 키 워드 '수학'과 4번 키 워드 '이론'은 포함하지 않으므로

$a_{31}=0$, $a_{32}=0$, $a_{33}=1$, $a_{34}=0$

4번 책은 2번 키 워드 '수학'과 3번 키 워드 '심화'를 포함하고, 1번 키 워드 '기초'와 4번 키 워드 '이론'은 포함하지 않으므로

$a_{41}=0$, $a_{42}=1$, $a_{43}=1$, $a_{44}=0$

따라서 행렬 A를 구하면 다음과 같다.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

[참고]

도서관에 있는 많은 책들 중에서 원하는 도서를 찾아내기 위해서는 검색 엔진을 사용한다. 모든 책에는 키 워드가 부여되어 있는데, 검색어와 키 워드가 맞으면 원하는 도서를 찾을 수 있다.

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$이고 키 워드 '수학'과 '이론'은 각각 두 번째, 네 번째 키 워드에 해당하므로 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$을 곱하여 검색 결과를 찾는다. 그러면

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

이 되어, 키 워드 '수학'과 '이론' 중에서 1번 책은 한 개, 2번 책은 두 개, 4번 책은 한 개를 포함하고 있음을 알 수 있다. 이때, 2번 책이 검색 결과에 따른 우선순위가 가장 높다.

18. [출제의도] 재료와 관련하여 연립일차방정식을 세워 행렬의 성분을 구한다.

제품 P, Q를 각각 x개, y개 만들 때 사용되는 금과 은의 양이 각각 130g, 145g이므로 연립방정식을 세우면

$\begin{cases}4x+2y=130\\x+3y=145\end{cases}$

정리하면

$\begin{cases}2x+y=65\\x+3y=145\end{cases}$

이고, 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}65\\145\end{pmatrix}$

행렬 $\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$의 역행렬을 양변의 왼쪽에 곱하면

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}65\\145\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}65\\145\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\29\end{pmatrix}$

한편 주어진 조건에서 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-1\\-1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\29\end{pmatrix}$이므로

$a=3,\ b=2\quad\therefore\ a+b=5$

19. [출제의도] 역행렬이 존재하기 위한 조건을 이용하여 값을 구한다.

주어진 행렬이 역행렬을 가지려면

$x(x-2)-3(2x-k)\neq 0$

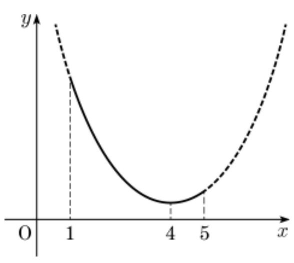
$x^2-8x+3k\neq 0$

$f(x)=x^2-8x+3k$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만날 때, $f(x)$의 값은 0이다. 따라서 위 조건을 만족시키려면 $1\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 한다. 그러기 위해서는 $1\le x\le 5$인 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$ 또는 $f(x)<0$이어야 한다.

$f(x)=x^2-8x+3k=(x-4)^2+3k-16$이므로 다음과 같은 두 가지 경우를 생각한다.

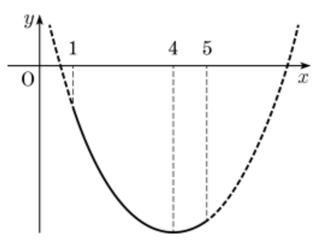
ⅰ) $f(x)>0$인 경우

최솟값 $f(4)=3k-16>0$에서 $k>\frac{16}{3}$



ⅱ) $f(x)<0$인 경우

최댓값 $f(1)=3k-7<0$에서 $k<\frac{7}{3}$



ⅰ), ⅱ)에서 구하는 k값의 범위는

$k>\frac{16}{3}$ 또는 $k<\frac{7}{3}$

따라서 10 이하의 자연수 k의 값은

1, 2, 6, 7, 8, 9, 10이고 개수는 7이다.

20. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 그래프를 이해한다.

$t^4=x^2-4$에서

ⅰ) $x^2-4>0$일 때,

$(x-2)(x+2)>0$

즉, $x<-2$ 또는 $x>2$일 때,

$t=\sqrt[4]{x^2-4}$ 또는 $t=-\sqrt[4]{x^2-4}$이므로 실수 t의 값은 2개이다.

$\therefore\ f(x)=2$

ⅱ) $x^2-4=0$일 때,

$(x-2)(x+2)=0$

즉, $x=-2$ 또는 $x=2$일 때, $t=0$이므로 실수 t의 값은 1개이다.

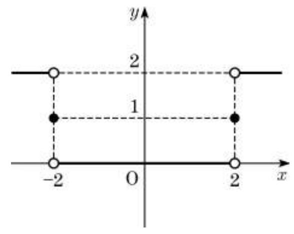
$\therefore\ f(x)=1$

ⅲ) $x^2-4<0$일 때,

$t^4=x^2-4<0$을 만족시키는 실수 t의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore\ f(x)=0$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[다른풀이]

$t^4=x^2-4$를 만족시키는 실수 t는 x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것이다.

ⅰ) $x^2-4>0$일 때,

x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{x^2-4}$, $-\sqrt[4]{x^2-4}$이므로 $f(x)=2$

ⅱ) $x^2-4=0$일 때,

x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{0}=0$이므로 $f(x)=1$

ⅲ) $x^2-4<0$일 때,

x^2-4의 네제곱근 중 실수는 존재하지 않으므로 $f(x)=0$

21. [출제의도] 국악과 관련하여 지수함수의 함숫값을 이용하여 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. $\frac{f(4)}{f(3)}=\frac{C\cdot 2^{\frac{4-1}{12}}}{C\cdot 2^{\frac{3-1}{12}}}=2^{\frac{3}{12}-\frac{2}{12}}=2^{\frac{1}{12}}$ (참)

ㄴ. '고선'의 진동수 a는

$a=f(5)=C\cdot 2^{\frac{5-1}{12}}=C\cdot 2^{\frac{4}{12}}=C\cdot 2^{\frac{1}{3}}$

이때, '무역'의 진동수는

$f(11)=C\cdot 2^{\frac{11-1}{12}}=C\cdot 2^{\frac{10}{12}}=C\cdot 2^{\frac{4+6}{12}}=C\cdot 2^{\frac{4}{12}+\frac{6}{12}}$

$=C\cdot 2^{\frac{4}{12}}\cdot 2^{\frac{6}{12}}=a\cdot 2^{\frac{6}{12}}=a\cdot 2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\,a$ (참)

ㄷ. '대려'의 진동수 b는

$b=f(2)=C\cdot 2^{\frac{2-1}{12}}=C\cdot 2^{\frac{1}{12}}$

이때, '협종'의 진동수는

$f(4)=C\cdot 2^{\frac{4-1}{12}}=C\cdot 2^{\frac{3}{12}}$

또, '중려'의 진동수는

$f(6)=C\cdot 2^{\frac{6-1}{12}}=C\cdot 2^{\frac{5}{12}}$

$f(4)\times f(6)=\left(C\cdot 2^{\frac{3}{12}}\right)\left(C\cdot 2^{\frac{5}{12}}\right)=C^2\cdot 2^{\frac{3}{12}+\frac{5}{12}}$

$=C^2\cdot 2^{\frac{8}{12}}=\left(C\cdot 2^{\frac{1}{12}}\right)^2\cdot 2^{\frac{6}{12}}=b^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{2}\,b^2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른풀이]

ㄱ. $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{C\cdot 2^{\frac{(n+1)-1}{12}}}{C\cdot 2^{\frac{n-1}{12}}}=2^{\frac{(n+1)-1}{12}-\frac{n-1}{12}}=2^{\frac{1}{12}}$

이므로 번호가 1씩 증가할 때마다 진동수는 $2^{\frac{1}{12}}$배가 된다. (참)

ㄴ. '무역'의 번호는 '고선'의 번호보다 6만큼 크므로 '무역'의 진동수는 a의 $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^6=2^{\frac{6}{12}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$배이다. (참)

ㄷ. '협종'의 번호는 '대려'의 번호보다 2만큼 크고, '중려'의 번호는 '대려'의 번호보다 4만큼 크므로 '협종'과 '중려'의 진동수의 곱은

$\left(2^{\frac{2}{12}}\cdot b\right)\left(2^{\frac{4}{12}}\cdot b\right)=2^{\frac{1}{2}}\cdot b^2=\sqrt{2}\,b^2$ (거짓)

22. [출제의도] 행렬이 서로 같을 조건을 이해하여 값을 구한다.

$A=B$가 성립하려면 두 행렬 A, B의 각각의 성분이 같아야 하므로 $10=2a$, $-b=a-15$, $a-b=-5$,

따라서 $a=5$, $b=10$

$\therefore\ ab=50$

23. [출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 이해하고, 이를 이용하여 값을 구한다.

$a=\sqrt[3]{2}$, $b=\sqrt[4]{3}$을 등식 $6=a^x b^y$에 대입하면

$2\times 3=(\sqrt[3]{2})^x(\sqrt[4]{3})^y$

$=2^{\frac{x}{3}}\cdot 3^{\frac{y}{4}}$

즉, $2^{1-\frac{x}{3}}=3^{\frac{y}{4}-1}$

x, y가 유리수이므로 $1-\frac{x}{3}=0$, $\frac{y}{4}-1=0$

따라서 $x=3$, $y=4$

$\therefore\ x+y=7$

24. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 이용하여 값을 계산한다.

$A^2=\begin{pmatrix}-1&a\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&a\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2a\\0&1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1&-2a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&a\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3a\\0&-1\end{pmatrix}$

따라서 $A^3=\begin{pmatrix}-1&3a\\0&-1\end{pmatrix}$이고, 모든 성분의 합은

$3a-2=91$

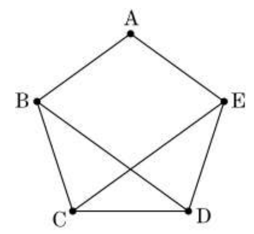
$\therefore\ a=31$

[참고]

$A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&(-1)^{n+1}na\\0&(-1)^n\end{pmatrix}$임을 추론할 수 있다.

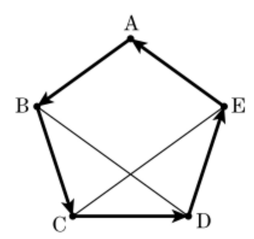
25. [출제의도] 행렬이 나타내는 그래프를 그려서 조건에 맞는 경로를 추론한다.

주어진 행렬을 그래프로 나타내면

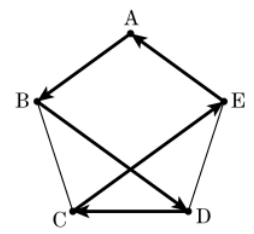


이다. 꼭짓점 A를 출발하여 모든 꼭짓점을 오직 한 번씩만 지나 꼭짓점 A로 돌아오는 경로를 살펴보면,

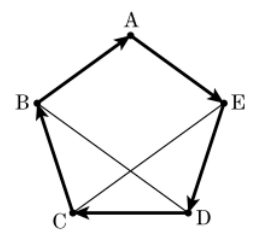
ⅰ) ABCDEA



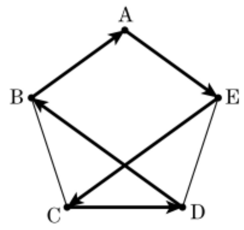
ⅱ) ABDCEA



ⅲ) AEDCBA



iv) AECDBA



이상에서 구하는 개수는 4이다.

26. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 선분의 길이를 구한다.

두 점 A, B의 x좌표가 a이므로

A$(a,\ 3^a)$, B$\left(a,\ \left(\frac{1}{3}\right)^a\right)$

선분 AB의 중점의 y좌표가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{3^a+3^{-a}}{2}=\sqrt{5}$

$3^a+3^{-a}=2\sqrt{5}$

양변에 3^a를 곱하여 정리하면

$3^{2a}-2\sqrt{5}\times3^a+1=0$

이를 풀면

$3^a=\sqrt{5}-2$ 또는 $3^a=\sqrt{5}+2$

$a>0$이므로 $3^a>1$

$3^a=\sqrt{5}+2$에서

$3^{-a}=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}-2$

따라서 선분 AB의 길이 l은

$l=(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)=4$

∴ $l^2=16$

[다른풀이]

$3^a=s$, $\left(\frac{1}{3}\right)^a=t$라 하면

선분 AB의 길이는 $s-t$이다.

선분 AB의 중점의 y좌표가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{s+t}{2}=\sqrt{5}$, $s+t=2\sqrt{5}$

$st=3^a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^a=1$

∴ $l^2=(s-t)^2=(s+t)^2-4st=(2\sqrt{5})^2-4\times1=16$

27. [출제의도] 역행렬의 정의를 이용하여 행렬의 성분의 값을 구한다.

조건 (가)에서

$(A+E)(A+2E)=E$

$A^2+3A+E=O$

$A(A+3E)=-E$

조건 (나)에서

$(A+3E)\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+3E\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-3E\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\11\end{pmatrix}$ ⋯ ㉠

조건 (나)의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A(A+3E)\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=-E\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$A\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-1\\11&3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}-4&-1\\11&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}-4&-1\\11&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}8+3&4+1\\-22-9&-11-3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}11&5\\-31&-14\end{pmatrix}$

∴ $a=11$, $d=-14$이므로

$a^2+d^2=11^2+(-14)^2=121+196=317$

28. [출제의도] 지수부등식과 집합의 관계를 이해하고 주어진 최댓값을 구한다.

$x^2-(a+b)x+ab<0$

$(x-a)(x-b)<0$, $a<b$이므로 $a<x<b$

∴ $A=\{x\mid a<x<b\}$

한편, $2^{2x+2}-9\cdot2^x+2<0$

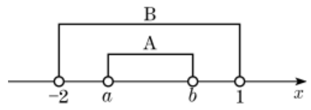
$4(2^x)^2-9\cdot2^x+2<0$

$(4\cdot2^x-1)(2^x-2)<0$

$\frac{1}{4}<2^x<2$, $2^{-2}<2^x<2^1$

∴ $B=\{x\mid-2<x<1\}$

$A\subset B$이므로



$-2\le a<b\le1$

따라서 $b-a$의 최댓값은 $1-(-2)=3$

29. [출제의도] 두 직선의 수직조건과 지수함수의 그래프를 활용하여 주어진 값을 구한다.

점 P의 좌표는 $(0,1)$이다.

곡선 $y=3^x$ 위의 점 Q의 좌표를 Q$(t,3)$이라 하면

$3^t=3$, $t=1$ ∴ Q$(1,3)$

직선 PQ의 기울기는 2이고 ∠RPQ$=90°$이므로

직선 PR의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

두 점 P, R를 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+1$

점 R의 y좌표가 3이므로 점 R의 좌표는 $(-4,3)$

또, 점 R는 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$3=a^{-4}$, $\left(\frac{1}{a}\right)^4=3$

∴ $\left(\frac{1}{a}\right)^{16}=3^4=81$

[다른풀이]

두 점 P, Q의 좌표는 P$(0,1)$, Q$(1,3)$이다.

이때, $\overline{PQ}=\sqrt{(1-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

곡선 $y=a^x$ 위의 점 R의 좌표를 R$(b,3)$이라 하면

$a^b=3$ ⋯(*)

이때, $\overline{RQ}=1-b$이고

$\overline{RP}=\sqrt{(b-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{b^2+4}$이다.

삼각형 PQR는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해

$\overline{RQ}^2=\overline{PQ}^2+\overline{RP}^2$

$(1-b)^2=5+(b^2+4)$

$1-2b+b^2=b^2+9$

$2b=-8$ ∴ $b=-4$

$b=-4$를 (*)에 대입하면

$a^{-4}=3$

∴ $\left(\frac{1}{a}\right)^{16}=81$

30. [출제의도] 연립방정식과 행렬의 성질을 이용하여 주어진 조건에 맞는 값을 구한다.

주어진 연립방정식은 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖는다. 정리하면

$\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}5-k&2\\2&5-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ⋯ ㉠

㉠이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(5-k)^2-4=0$ ∴ $k=7$ 또는 $k=3$

ⅰ) $k=7$일 때, 주어진 연립방정식의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하면

$\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

따라서 $\alpha-\beta=0$이고 $\alpha\beta=\alpha^2>0$이므로 $p=7$

ⅱ) $k=3$일 때, 주어진 연립방정식의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하면

$\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

따라서 $\alpha+\beta=0$이고 $\alpha\beta=-\alpha^2<0$이므로 $q=3$

∴ $10p+q=73$