2014학년도 대수능 예비 시행 5월 모의평가 수학 B형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 행렬 A의 역행렬을 구할 수 있는가?

$A=\begin{pmatrix}1&1\\4&5\end{pmatrix}$에서

$A^{-1}=\dfrac{1}{5-4}\begin{pmatrix}5&-1\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\-4&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-1\\-4&1\end{pmatrix}$

그러므로 A^{-1}의 모든 성분의 합은 1이다

<답> ②

2.

출제의도 : 한 점에서 함수의 연속의 정의를 알고 있는가?

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 이다.

$\therefore\ b=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}+a}{x}$

$x\to0$일 때, (분모) → 0 이므로

(분자) → 0 이어야한다.

$\therefore 0=1+a \quad \therefore a=-1$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times2\right)=1\times2=2$

$\therefore b=2$

따라서 $a+b=(-1)+2=1$

<답> ①

3.

출제의도 : 좌표공간에서 두 점을 이은 선분의 외분점을 구할 수 있는가?

두 점 $\mathrm{P}(6,\ 7,\ a)$, $\mathrm{Q}(4,\ b,\ 9)$를 이은 선분 PQ를 2:1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{8-6}{2-1},\ \dfrac{2b-7}{2-1},\ \dfrac{18-a}{2-1}\right)$이므로

$(2,\ 2b-7,\ 18-a)=(2,\ 5,\ 14)$이다.

$\therefore\ 2b-7=5$, $18-a=14$

$\therefore\ a=4$, $b=6$ 이므로 $a+b=10$

<답> ⑤

4.

출제의도 : 여사건의 확률, 확률의 덧셈정리, 독립사건의 정의와 성질을 이해하고 있는가?

$\mathrm{P}(A^c)=\dfrac{3}{4}$에서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

또, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A와 B^c도 서로 독립이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B^c)$

한편, $\mathrm{P}(A\cup B^c)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^c)-\mathrm{P}(A\cap B^c)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^c)-\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B^c)$

이므로 $\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{4}+\mathrm{P}(B^c)-\dfrac{1}{4}\mathrm{P}(B^c)$이다.

$\dfrac{3}{4}\mathrm{P}(B^c)=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{20}$

$\mathrm{P}(B^c)=\dfrac{1}{15}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^c)=1-\dfrac{1}{15}=\dfrac{14}{15}$

<답> ⑤

5.

출제의도 : 그래프를 이용하여 분수부등식을 풀 수 있는가?

$\dfrac{g(x)}{f(x)}\geq1$에서 $\dfrac{g(x)}{f(x)}-1\geq0$, $\dfrac{g(x)-f(x)}{f(x)}\geq0$

양변에 $\{f(x)\}^2$를 곱하면

$f(x)\{g(x)-f(x)\}\geq 0\,(단, f(x)\neq 0)$

ⅰ) $f(x)>0$ 이고 $g(x)-f(x)\geq 0$ 일 때,

즉, $f(x)>0$ 이고 $f(x)-g(x)\leq 0$ 인 경우

$\{x|x>5 \text{ 또는 } x<1\}\cap\{x|-3\leq x\leq 3\}$

이므로 $\{x|-3\leq x<1\}$

∴ 정수 x는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0$ 이므로 4개이다.

ⅱ) $f(x)<0$ 이고 $g(x)-f(x)\leq 0$ 일 때,

즉, $f(x)<0$ 이고 $f(x)-g(x)\geq 0$ 인 경우

$\{x|1<x<5\}\cap\{x|x\leq -3 \text{ 또는 } x\geq 3\}$

이므로 $\{x|3\leq x<5\}$

∴ 정수 x는 3, 4이므로 2개이다.

그러므로 ⅰ), ⅱ)에 의해 $\dfrac{g(x)}{f(x)}\geq 1$을

만족시키는 정수 x의 개수는 6이다.

[다른 풀이]

$f(x)=a(x-1)(x-5)\ (a>0)$,

$f(x)-g(x)=b(x-3)(x+3)$ (단, $b>0$) 이라

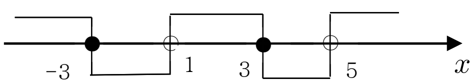
놓으면 $\dfrac{g(x)}{f(x)}-1\geq 0$, $\dfrac{g(x)-f(x)}{f(x)}\geq 0$에서

$$\frac{-b(x-3)(x+3)}{a(x-1)(x-5)}\geq 0$$

$$\therefore\ \frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-5)}\leq 0$$

양변에 분모의 제곱을 곱하면

$(x-1)(x-5)(x-3)(x+3)\leq 0$ (단, $x\neq 1$, $x\neq 5$)



따라서 $-3\leq x<1$ 또는 $3\leq x<5$

∴ 정수 x는 -3,-2,-1, 0 ,3 ,4로 6개이다.

<답> ②

6.

출제의도 : 원순열의 수를 구할 수 있는가?

6개의 날개 중 한 곳에 빨간색이 칠해지면
파란색은 맞은편의 날개에 칠해지므로
빨간색과 파란색을 같은 색으로 취급하면
서로 다른 5개의 색을 원형으로 배열하는
원순열의 수와 같다.

$\therefore (5-1)!=4!=24$

<답> ③

(다른 풀이)

6개의 날개 중 한 곳에 빨간색이 칠해지면
파란색은 맞은편의 날개에 칠해지므로
나머지 4개의 날개에 4가지의 색을 칠하는
방법의 수는 $4!=24$이다.

7.

출제의도 : 일차변환의 합성을 알고 있는가?

합성변환 $f\circ g$를 나타내는 행렬이

AB 이므로 $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\3x\end{pmatrix}$ 이므로

$y=x'$, $x=\dfrac{1}{3}y'$ ……㉠

㉠을 $(x-2)^2+(y+3)^2=5^2$에 대입하면

$(\dfrac{1}{3}y'-2)^2+(x'+3)^2=5^2$,

즉 $(x+3)^2+(\dfrac{1}{3}y-2)^2=5^2$ ……㉡

㉡이 y축과 만나는 두 점의 y좌표는

$x=0$ 일 때의 y의 값이므로

$x=0$ 을 ㉡에 대입하면

$9+(\dfrac{1}{3}y-2)^2=5^2$, $(\dfrac{1}{3}y-2)^2=16$

$\therefore\ \frac{1}{3}y-2=\pm 4$

$\frac{1}{3}y-2=4$에서 $y=18$

$\frac{1}{3}y-2=-4$에서 $y=-6$

따라서 y축과 만나는 두 점의 좌표는

$(0,\ 18)$, $(0,\ -6)$ 이므로 $a+b=12$

<답> ④

8.

출제의도 : 그래프를 이용하여
지수·로그방정식을 풀 수 있는가?

$y=f(x)$는 $y=-2^x$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선이므로 $y=-2^x+m$

$\therefore\ f(x)=-2^x+m$

$y=f(x)$가 x축과 만나는 점 A의 x좌표는

$0=-2^x+m$에서 $2^x=m$, $x=\log_2 m$

따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(\log_2 m,\ 0)$

또, 점 B는 $y=2^x$ 과 $y=-2^x+m$의 교점이므로 $2^x=-2^x+m$ 에서

$2\cdot 2^x=m$, $2^x=\frac{m}{2}$

$\therefore\ x=\log_2\frac{m}{2}$

따라서 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\log_2\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{BC}}$에서

$\log_2 m=2\log_2\frac{m}{2}$, $\log_2 m=\log_2\left(\frac{m}{2}\right)^2$

$\therefore\ m=\frac{m^2}{4}$, $m^2-4m=0$

$\therefore\ m=4\ \ (\because\ m>2)$

<답> ②

9.

출제의도 : 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

$m=5$일 때, $y=-2^x+5$에서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(\log_2 5,\ 0)$이므로 구하는 회전체의 부피를 V라 하면

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^{\log_2 5}(2^x)^2dx=\pi\int_0^{\log_2 5}4^x dx$$

$$=\frac{\pi}{\ln 4}\left[4^x\right]_0^{\log_2 5}=\frac{\pi}{\ln 4}\left(4^{\log_2 5}-1\right)$$

$$=\frac{\pi}{\ln 4}\left(2^{\log_2 5^2}-1\right)=\frac{\pi}{2\ln 2}(25-1)=\frac{12}{\ln 2}\pi$$

<답> ①

10.

출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

주머니 A를 선택하는 사건을 A,
주머니 B를 선택하는 사건을 B,
꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은색일 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(E|A)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(E|B)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

따라서 두 주머니 A, B중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은색일 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

따라서 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은색일 때, 선택된 주머니가 B이었을 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{1}{7}$$

<답> ④

11.
출제의도 : 행렬의 거듭제곱을 간단하게 표현할 수 있고 수열의 규칙성을 발견할 수 있는가?

$$\begin{aligned}(A-E)^{n+1} &= a_nA^2-a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E\\ &= a_n(3A)-a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E\\ &= 2a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E\\ &= \{2a_n+(-1)^n\}A+(-1)^{n+1}E\end{aligned}$$

그러므로 (가)$=(-1)^n$

$$a_n+a_{n+1}=2(a_{n-1}+a_n)$$

이고 $a_1+a_2=1+1=2$

이므로 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이다. 즉,

$$a_n+a_{n+1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

그러므로 (나)$=2^n$

따라서 $f(n)=(-1)^n$이고 $g(n)=2^n$이므로

$$f(9)\times g(5)=(-1)^9\times 2^5=-32$$

<답> ①

12.
출제의도 : 합성함수에서 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

$t=g(x)$라 하면

$t=\sin x-\cos x$

$=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$

$y=t^2+2t-1 \quad (-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$

$y=(t+1)^2-2$이므로

$t=-1$에서 최솟값 -2

$t=\sqrt{2}$에서 최댓값 $1+2\sqrt{2}$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $2\sqrt{2}-1$

<답> ③

13.
출제의도 : 무리방정식의 해를 구할 수 있는가?

$y=f(x)$, $y=g(x)$는 기울기가 m이고 y절편이 각각 2, 0인 두 직선이므로

$f(x)=mx+2$, $g(x)=mx$

$\sqrt{f(x)}=g(x)$의 실근이 α이므로

$\sqrt{m\alpha+2}=m\alpha$

$(m\alpha)^2=m\alpha+2$

$(m\alpha-2)(m\alpha+1)=0$

$m\alpha=2$ 또는 $m\alpha=-1$

$m\alpha\ge 0$이므로 $m\alpha=2$

$\alpha=\frac{2}{m}$ ……㉠

$\sqrt{f\left(\frac{x}{2}\right)}=g(x-\alpha)$의 실근이 2이므로

$\sqrt{m+2}=m(2-\alpha)$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{m+2}=2m-2$ ……㉢

$m+2=4m^2-8m+4$

$4m^2-9m+2=0$

$(4m-1)(m-2)=0$

$\therefore m=2$ ($\because$ ㉢에서 $m\ge 1$)

㉠에서 $\alpha=1$

따라서 $m+\alpha=3$

<답> ①

14.

출제의도 : 무한등비급수의 규칙성을 찾고 그 극한값을 구할 수 있는가?

각 단계에서 만들어지는 도형의 넓이는 등비수열을 이루므로 공비와 첫째항을 구하여 무한등비급수의 합을 구할 수 있다.

R_1에서 두 반지름을 각각 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 두 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 그린 후, 두 내접원 안에 두  모양의 도형을 그리고 칠한 것이 R_2이다. 그러므로 R_2에서 만들어지는 내접원의 반지름은 R_1의 반지름의 $\frac{1}{4}$이다.

또 R_1에서는  모양의 도형이 하나이지만 R_2에서는 2개의 도형이므로 공비는 $2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$이다.

첫째항은 점 D가 선분 OC를 1:2로 내분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\times 3=1$

각 AOB를 이등분한 각이 COB이므로 $\angle\mathrm{COB}=\frac{\pi}{4}$

그러므로 첫째항은

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 3\times\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{12\sqrt{2}}{7}$

<답> ②

15.

출제의도 : 역행렬과 행렬의 곱을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판정할 수 있는가?

ㄱ. (참) $(AB)^2=E$이므로 $ABAB=E$이다. 두 행렬 M, N에 대하여 $MN=NM=E$이면 $N^{-1}=M$이고 $M^{-1}=N$이므로 $A^{-1}=BAB$이고 $B^{-1}=ABA$이다.

ㄴ. (참) $A^2=A-E$에서 $E=A-A^2=A(E-A)$이다.
즉, $A^{-1}=E-A$
그러므로 $BAB=E-A=-(A-E)=-A^2$

ㄷ. (참) $B^2AB^2=B(BAB)B=B(E-A)B$
$=B^2-BAB=B^2-(-A^2)$
$=A^2+B^2$

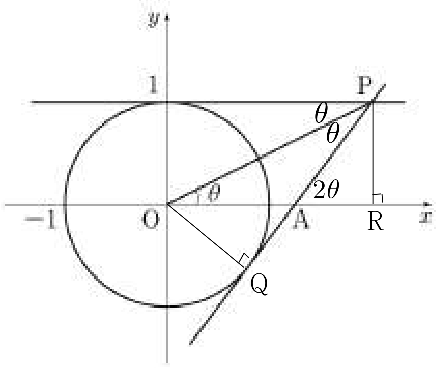
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

<답> ⑤

16.

출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리를 알고 있는가?

직선과 원의 접점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자.



$\triangle$OQA에서 $\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1^2}=\frac{3}{4}$이고

$\triangle AOQ \equiv \triangle APR$이므로 $\overline{AR}=\frac{3}{4}$이다.

이때, $\tan\theta$는 직선 OP의 기울기이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{PR}}{\overline{OR}}=\frac{1}{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\text{이다.}$$

$\tan 2\theta$는 직선 AP의 기울기이므로

$$\tan 2\theta=\frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\quad (\because \angle PAR=2\theta)$$

$$\tan 3\theta=\frac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\cdot\tan 2\theta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}}=\frac{11}{2}$$

<답> ④

17.

출제의도 : 타원의 성질을 알고 활용할 수 있는가?

점 P의 좌표를 $(c,\ \sqrt{1-c^2})$라 하면, 타원의 초점의 좌표는 $P'(c,\ 0)$이고, 타원의 장축의 길이가 2이므로

타원의 방정식은 $x^2+\frac{y^2}{1-c^2}=1$

기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 그림과 같은 타원의 접선의 방정식은

$$y=-\frac{3}{2}x+\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1-c^2}\ \cdots\cdots ㉠$$

점 $P(c,\ \sqrt{1-c^2})$는 ㉠ 위의 점이므로

$$\sqrt{1-c^2}=-\frac{3}{2}c+\sqrt{\frac{13}{4}-c^2}\ \cdots\cdots ㉡$$

위의 식을 정리하면

$$25c^4-34c^2+9=0$$

$\therefore\ c=\pm\frac{3}{5}$ 또는 $c=\pm 1$

$0<c<1$이므로

점 $P\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

따라서 직선 OP의 기울기는 $\frac{4}{3}$

<답> ③

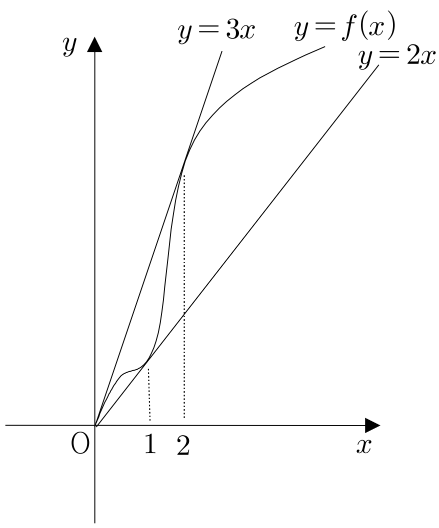
18.

출제의도 : 미분계수의 기하학적 의미를 이해하고 있는가?

조건에서 함수 $f(x)$가 $x>0$에서 미분가능하고 $f(1)=2$ 이고 $f(2)=6$이므로

함수 $f(x)$는 점 $(1,\ 2)$와 $(2,\ 6)$을 지나고

조건에서 $2x\le f(x)\le 3x$ 이므로 그림과 같이 함수 $f(x)$의 그래프는 두 직선 $y=2x$와 $y=3x$ 사이에 있다.



함수 $f(x)$가 점 $(1,2)$를 지나며 직선 $y=2x$에 접하므로 $f'(1)=2$이고,

함수 $f(x)$가 점 $(2,6)$를 지나며 직선 $y=3x$에 접하므로 $f'(2)=3$이다.

따라서 $f'(1)+f'(2)=5$

<답> ④

19.
출제의도 : 표본비율의 분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

어느 지역 학생 중에서 일주일 동안 7시간 이상 독서를 한 학생의 비율이 36%일 때, 임의추출한 100명의 학생 중 일주일 동안 7시간 이상 독서를 한 학생의 비율을 $\hat{p}$라 하면

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.36$

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{0.36\times 0.64}{100}}=\frac{0.6\times 0.8}{10}=0.048$$

$n=100$은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 정규분포 $N(0.36,\ 0.048^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\hat{p}\le 0.42)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{0.42-0.36}{0.048}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1.25)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)$

$=0.8944$

<답> ③

20.
출제의도 : 합성함수의 미분계수의 성질을 이해하고 있는가?

ㄱ. (거짓) $h(3)=f(g(3))=f(1)=5$

ㄴ. (참) $h'(2)=(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)$

$f'(g(2))\le 0$이고 $g'(2)\le 0$ 이므로

$h'(2)\ge 0$

ㄷ. (참) $h'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$에 대하여 열린 구간 $(3,\ 4)$에서 $f'(g(x))>0$이고 $g'(x)<0$이므로 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)<0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

21. 출제의도 : 특수한 성질을 가진 함수의 정적분의 값을 구할 수 있는가?

ㄱ. (참) $f(x)=f(-x)$이고, $f(x+2)=f(x)$이므로

$\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{2}f(x)dx\quad\left(\because\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx\right)$

$\displaystyle=2\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$\displaystyle=4\int_{0}^{1}f(x)dx$

ㄴ. (참) $f(x+2)=f(x)$이므로 $1<x<2$에서 $f(x)$의 도함수는 $-1<x<0$에서와 같다.

따라서, $-1<x<0$에서

$f'(x)=\dfrac{4x(x^4-1)}{(x^4+1)^2}>0$이다.

ㄷ. (참)

$\displaystyle\int_{1}^{3}x|f'(x)|dx=\int_{1}^{2}xf'(x)dx-\int_{2}^{3}xf'(x)dx$

$\displaystyle=\left[xf(x)\right]_1^2-\int_{1}^{2}f(x)dx-\left[xf(x)\right]_2^3+\int_{2}^{3}f(x)dx$

$\displaystyle=2f(2)-f(1)-\int_{-1}^{0}f(x)dx-3f(3)+2f(2)+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=4f(0)-4f(-1)=4f(0)=4$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

<답> ⑤

22.
출제의도: 등차수열의 합을 이용하여 항의 개수를 구할 수 있는가?

첫째항이 -6, 공차가 2인 등차수열이고 첫째항부터 제n항까지의 합이 30이므로

$$\frac{n\{2\cdot(-6)+(n-1)\cdot 2\}}{2}=30$$

$n^2-7n-30=0$

$(n-10)(n+3)=0$

$\therefore n=10(\because n>0)$

<답> 10

23. 출제의도 : 성분으로 표시된 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ 2)-(1,\ a)=(a-1,\ 2-a)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=a(a-1)+2(2-a)=14$ 이므로

$a^2-3a-10=0$에서 $(a-5)(a+2)=0$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$

<답> 5

24.

출제의도 : 일차변환에 의하여 이동한 점의 좌표를 구할 수 있는가?

일차변환 f를 나타내는 행렬을 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & -1\end{pmatrix}$이다. $\therefore A=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & -1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}$이므로 점 $(3, -4)$가 이동한 점은 $(a,\ b)=(11,\ 4)$이다.

$\therefore a+b=15$

<답> 15

25.

출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

신호잡음전력비가 a일 때 신호의 최대 전송 속도를 C_a, 신호잡음전력비가 $33a$일 때 신호의 최대 전송 속도를 C_{33a}라 하자.

$C_a=B\times\log_2(1+a)$

$C_{33a}=B\times\log_2(1+33a)$

이때 $C_{33a}=2C_a$이므로

$B\times\log_2(1+33a)=2B\times\log_2(1+a)$

$1+33a=(1+a)^2$

$a^2-31a=0$

$\therefore\ \ a=31\quad(\because\ a>0)$

<답> 31

26. 출제의도 : 확률밀도함수의 정의를 알고, 연속확률변수의 확률을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$에서 정의된 확률밀도함수이므로 $\int_{-1}^{3} f(x)dx=1$이다.

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{0} a(1-x^2)dx+\int_{0}^{3} a\left(1-\frac{x}{3}\right)dx$$

$$=a\left\{\left[x-\frac{1}{3}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x-\frac{1}{6}x^2\right]_{0}^{3}\right\}=\frac{13}{6}a=1$$

$$\therefore a=\frac{6}{13}$$

$$\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\int_{-1}^{0}\frac{6}{13}(1-x^2)dx$$

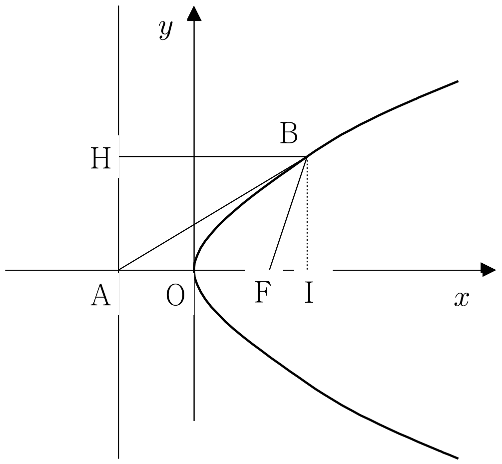
$$=\frac{6}{13}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}=\frac{4}{13}$$

$\therefore p+q=17$

<답> 17

27. 출제의도 : 포물선의 성질을 이용하여 초점을 구할 수 있는가?

점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H, x축에 내린 수선의 발을 I라 하자.



포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BH}}=5$이고,
$\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2=49-25=24$에서
$\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{6}$이므로 점 B의 좌표를 $(t,\ 2\sqrt{6})$ $(t>0)$이라 하자.
점 B는 포물선 위의 점이므로
$(2\sqrt{6})^2=4pt$에서 $pt=6$ $\cdots$ ㉠
$\triangle$BAI에서 $7^2=(p+t)^2+24$이므로
$p+t=5\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의해 $t^2-5t+6=0$
$t=2$ 또는 $t=3$이므로 $p=2$ 또는 $p=3$이다.
$\therefore a^2+b^2=13$

<답> 13

28. 출제의도 : 세 직선이 같은 평면 위에 있을 조건을 구할 수 있는가?
세 직선
$x=-y=\dfrac{z}{2}$, $x=y=\dfrac{z}{2a}$, $x=-\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{a}$의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$라 하면,
$\overrightarrow{u_1}=(1,\ -1,\ 2)$, $\overrightarrow{u_2}=(1,\ 1,\ 2a)$,
$\overrightarrow{u_3}=(1,\ -2,\ a)$이다.
세 직선을 모두 포함하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(p,\ q,\ r)$라 하면, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$와 $\vec{n}$는 수직이므로 $\overrightarrow{u_1}\cdot\vec{n}=0$, $\overrightarrow{u_2}\cdot\vec{n}=0$, $\overrightarrow{u_1}\cdot\vec{n}=0$ 이다. 즉,
$(1,\ -1,\ 2)\cdot(p,\ q,\ r)=0$,
$p-q+2r=0$ $\cdots$ ㉠
$(1,\ 1,\ 2a)\cdot(p,\ q,\ r)=0$,
$p+q+2ar=0$ $\cdots$ ㉡
$(1,\ -2,\ a)\cdot(p,\ q,\ r)=0$,
$p-2q+ar=0$ $\cdots$ ㉢
㉠+㉡에서 $2p+2(a+1)r=0$, $p=-ar-r$ 이고
㉡X2+㉢에서 $3p+5ar=0$이므로 연립하면,
$3\times(-ar-r)+5ar=0$, $(2a-3)r=0$ $\therefore a=\dfrac{3}{2}$
따라서 $20a=20\times\dfrac{3}{2}=30$

<답> 30

29. 출제의도 : 주어진 도형에서 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{PB}}=\tan\theta$ 이므로

$$\triangle \mathrm{PBC}=\frac{1}{2}\tan\theta$$
$$=\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r\times\tan\theta+\frac{1}{2}r\times\frac{1}{\cos\theta}\text{이다.}$$

따라서 $r=\dfrac{\tan\theta}{1+\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta+1}$

$$\therefore g(\theta)=\pi\times\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta+1}\right)^2$$

$\angle\mathrm{QCD}=\dfrac{\pi}{4}-\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=1-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$

$\triangle APQ = \frac{1}{2} \times (1-\tan\theta) \times \left\{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}$

$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \times (1-\tan\theta) \times \left\{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}$

$\lim\limits_{\theta \to +0} \frac{g(\theta)}{\theta \cdot f(\theta)}$

$= \lim\limits_{\theta \to +0} \frac{\pi \cdot \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta+1}\right)^2}{\frac{1}{2}\theta \cdot (1-\tan\theta)\left(1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)} = \frac{1}{4}\pi$

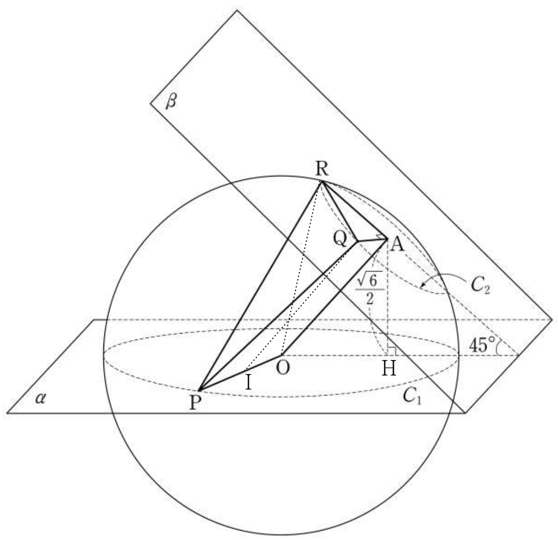
$\left(\because \lim\limits_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = \lim\limits_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{1-\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}}\right.$

$\left. = \lim\limits_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\frac{2\tan\theta}{1+\tan\theta}} = \frac{1}{2}\right)$

$\therefore 10p+q=41$

<답> 41

30. 출제의도 : 주어진 공간도형에서 이면각의 크기를 구할 수 있는가?



A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{AH}^2 = 3$에서 $\overline{OA} = \sqrt{3}$

점 Q에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 I라 두면, $\overline{PQ}^2 = \overline{PI}^2 + \overline{QI}^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4$에서 $\overline{PQ} = 2$

$\triangle POR$에서 $\overline{PR}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OR}^2 = 8$이므로 $\overline{PR} = 2\sqrt{2}$

이때, $\angle PQR = \theta$라 두면 코사인법칙에 의해

$\cos\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$이다.

$\triangle PQR = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\triangle PQR$을 평면 AQPO로 정사영한 도형은 $\triangle PQA$이고, $\triangle PQA = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 $\frac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$\cos^2\theta = \frac{3}{7}$

$\therefore p+q=10$

<답> 10