수리 영역

"나"형 정답

1	①	2	②	3	④	4	④	5	②
6	⑤	7	③	8	⑤	9	①	10	③
11	④	12	⑤	13	③	14	④	15	⑤
16	③	17	①	18	④	19	④	20	①
21	②	22	20	23	10	24	36	25	16
26	200	27	35	28	18	29	171	30	15

해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$a^b = (\sqrt{3})^{\log_4 16} = (\sqrt{3})^2 = 3$

2. [출제의도] 역행렬 계산하기

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로 $A + A^{-1} = E$

따라서 모든 성분의 합은 2

3. [출제의도] 미분계수 계산하기

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$

$f'(x) = 2x + 2$

따라서 $f'(1) = 4$

4. [출제의도] 행렬과 그래프 이해하기

$a = b = c = e = f = 1,\ d = 0$이므로

변의 개수는 8

5. [출제의도] 행렬을 이용하여 수학외적문제 해결하기

$\begin{cases} 20x + 15y = 600 \\ 25x + 20y = 770 \end{cases}$ 이므로 $5\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 770 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 600 \\ 770 \end{pmatrix}$

$\alpha = -3, \beta = -5$

따라서 $\alpha\beta = 15$

6. [출제의도] 지수·로그 함수의 그래프 이해하기

$\mathrm{A}(2,1),\ \mathrm{B}(4,2),\ \mathrm{C}(2,4),\ \mathrm{D}(1,2)$이므로

사각형 ABCD의 넓이는 $\dfrac{9}{2}$

7. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수의 성질 추론하기

$\log x = [\log x] + \dfrac{1}{k} = (\text{정수}) + \dfrac{1}{k}$

$k = 1$일 때, $A_1 = \phi$

$k \neq 1$일 때,

$A_k = \left\{10^{\frac{1}{k}}, 10^{1+\frac{1}{k}}, 10^{2+\frac{1}{k}}, 10^{3+\frac{1}{k}}, 10^{4+\frac{1}{k}}\right\}$

ㄱ. $A_2 = \left\{10^{\frac{1}{2}},\ 10^{\frac{3}{2}},\ 10^{\frac{5}{2}}, 10^{\frac{7}{2}}, 10^{\frac{9}{2}}\right\}$ 이므로

$\sqrt{10} \in A_2$ (참)

ㄴ. 2이상의 자연수 k에 대하여

$n(A_k) = 5$ (참)

ㄷ. 서로 다른 자연수 m, n에 대하여 $A_m \cap A_n = \phi$ (거짓)

8. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

$3^x = t(t > 0)$라 하면

$y = \dfrac{t^2 + t + 9}{t} = t + 1 + \dfrac{9}{t}$이고, $t + \dfrac{9}{t} \geq 6$

따라서 최솟값은 7

9. [출제의도] 로그를 이용하여 수학외적문제 해결하기

전력소비량의 증가율을 r이라 하면

$(1+r)^3 A = 1.23A$

$\log(1+r) = 0.03$

$\log(1+r)^8 = 8\log(1+r) = 0.24$

$= \log 1.23 + \log 1.40 = \log 1.722$

따라서 1.72배

10. [출제의도] 도함수의 그래프를 이용하여 함수의 그래프 추론하기

$f'(x) = a(x-2)^2\ (a < 0)$이므로

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘

ㄱ. $f'(0) < 0$이므로 $x = 0$에서 감소상태 (참)

ㄴ. 극댓값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 모든 실수에 대하여 함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다. (참)

11. [출제의도] 등차·등비수열의 합 계산하기

$d(\mathrm{A}, \mathrm{P}_n) = |1-n| + |0-2^n|$이다.

$\sum\limits_{n=1}^{10} d(\mathrm{A}, \mathrm{P}_n) = \sum\limits_{n=1}^{10}(-1 + n + 2^n) = 2^{11} + 43$

12. [출제의도] 무한급수의 성질 이해하기

$a_n = 2^n - 1$ 이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\log_2 2^n \log_2 2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

13. [출제의도] 로그부등식을 활용하여 수학외적문제 해결하기

$C_1 = \dfrac{k}{\log 2},\ C_2 = \dfrac{k}{\log n}$

$\dfrac{\log n}{\log 2} > \dfrac{1}{\log 2}$ 이므로 $n > 10$

따라서 자연수 n의 최솟값은 11

14. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$x \neq 0$ 이고 $-1 < x < 1$ 일 때,

$0 < 1 - x^2 < 1$ 이므로

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^4 + x^2)(1-x^2)^n$

$= \dfrac{x^4 + x^2}{1 - (1-x^2)} = x^2 + 1$

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (|x| < 1,\ x \neq 0) \\ 0 & (|x| \geq 1,\ x = 0) \end{cases}$

따라서 $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0}(x^2 + 1) = 2$

15. [출제의도] 행렬을 이용하여 도형의 넓이 추론하기

ㄱ. $S(A) = \dfrac{3}{2}$ (참)

ㄴ. $S(A) = \dfrac{1}{2}(c-b)(d-a)$

$S(kA) = \dfrac{1}{2}(kc - kb)(kd - ka) = k^2 S(A)$ (참)

ㄷ. 행렬 $A + mB$에 의해 정해지는 네 점은 행렬 A에 의해 정해지는 네 점을 x축, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점이므로 사각형의 넓이는 같다. (참)

16. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학내적문제 해결하기

$\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{AP}_n = \theta_n$이라 하면 $l_n = \theta_n$이고

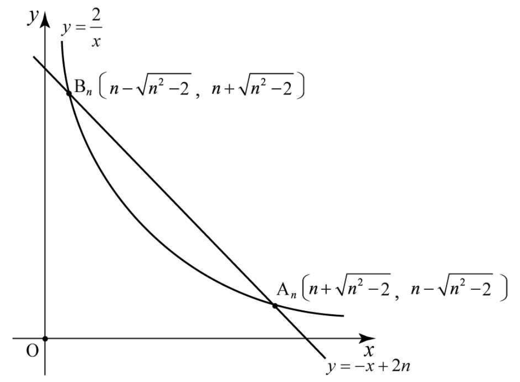
(나)에 의하여 $\theta_n = \theta_1 r^{n-1}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \theta_n = \dfrac{\theta_1}{1-r} = \dfrac{8}{15}\pi \cdots$①

(다)에 의하여 $\theta_1(1+r) = \dfrac{\pi}{2} \cdots$②

따라서 ①, ②에 의하여 $r = \dfrac{1}{4}$

17. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학내적문제 해결하기



두 점 사이의 거리 $l_n = \sqrt{8n^2 - 16}$

따라서 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{l_n}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{8n^2 - 16}}{n} = 2\sqrt{2}$

18. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_k 3^6$의 값이 정수이므로

$k = 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^6$이다.

따라서 $3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^6 = 3^{12}$

19. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명 과정 추론하기

(ⅰ) $n = 1$일 때,

$(\text{좌변}) = a_1 = \dfrac{1}{2(2+4)} = \boxed{\dfrac{1}{12}}$

$(\text{우변}) = \dfrac{1}{(1+1)^2} - T_1 = \boxed{\dfrac{1}{12}}$

이므로 (★)이 성립한다.

(ⅱ) $n = m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum\limits_{k=1}^{m} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_m$

이다. $n = m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$\sum\limits_{k=1}^{m+1} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_m + a_{m+1}$

$= \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_m + \boxed{\dfrac{1}{m+2}}(T_{m+1} - T_m)$

$= \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \dfrac{m+3}{m+2}(T_{m+1} - T_m)$

$= \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \dfrac{1}{(m+2)^2}$

$= \sum\limits_{k=1}^{m+1} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1}$

그러므로 $n = m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

$\alpha = \dfrac{1}{12},\ f(2) = \dfrac{1}{4}$. 따라서 $\dfrac{\alpha}{f(2)} = \dfrac{1}{3}$

20. [출제의도] 함수의 극대·극소 이해하기

$h(x) = g(x) - f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$

$h'(x) = 2(x+2)(x-1)(2x+1)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{16}$

21. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학내적문제 해결하기

원 A_n의 반지름의 길이를 a_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n라 하면

$r_1=3$, $a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1}$, $r_n-r_{n+1}=a_n$ 이므로

$r_n-r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1}$, $r_{n+1}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=r_n$

$r_{n+1}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}r_n$, $r_{n+1}=2(2-\sqrt{3})r_n$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{6\pi}{1-(4-2\sqrt{3})}=(6+4\sqrt{3})\pi$

22. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기

$x=1$에서 함수의 극한값과 함숫값이 같으므로

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{a}}{x-1}=\frac{\sqrt{a}}{2}=2$

$\therefore a=16,\ b=4$

따라서 $a+b=20$

23. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_1^3 x^3\,dx=10$

24. [출제의도] 도함수의 성질을 활용하여 수학내적문제 해결하기

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이를 x_t, 그에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_t라 하면,

$r_t=\frac{\sqrt{3}}{6}x_t$, $x_t=12\sqrt{3}+3\sqrt{3}\,t$이므로

$r_t=\frac{12+3t}{2}$

t초 후 정삼각형에 내접하는 원의 넓이는

$S(t)=\pi\left(\frac{12+3t}{2}\right)^2$이므로

$x_t=24\sqrt{3}$일 때, $t=4$

$S'(4)=2\pi\left(\frac{12+3\times4}{2}\right)\times\frac{3}{2}=36\pi$이다.

따라서 $a=36$

25. [출제의도] 도함수 이해하기

$f(x)$가 n차 함수이면

$f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이다. $\therefore n=2$

$f(x)=x^2+ax+b$, $f'(x)=2x+a$

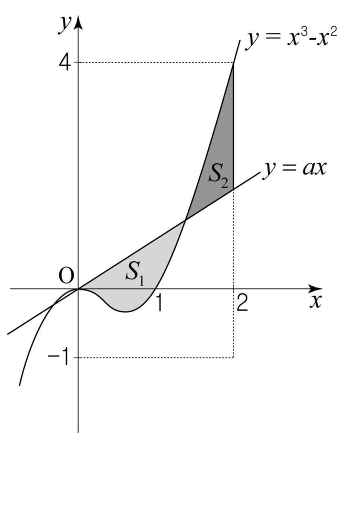
$f(x)f'(x)=(x^2+ax+b)(2x+a)$

$3a=-9$, $ab=6$ 이므로 $a=-3, b=-2$

따라서 $f(-3)=9-3a+b=16$

26. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학내적문제 해결하기

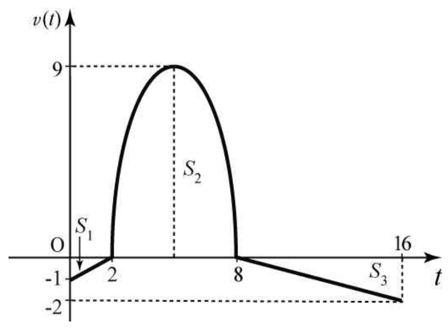
A와 C의 넓이가 같으므로 $S_1=S_2$



$\int_0^2(x^3-x^2-ax)\,dx=0\quad\therefore a=\frac{2}{3}$

따라서 $300a=200$

27. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학내적문제 해결하기



$S_1=\int_0^2 v(t)\,dt,\qquad S_2=\int_2^8 v(t)\,dt,$

$S_3=\int_8^{16}v(t)\,dt$

라 할 때,

$S_1=-1,\ S_2=36,\ S_3=-8$

따라서 ($\overline{\mathrm{OP}}$의 최댓값)$=S_1+S_2=35$

28. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학내적문제 해결하기

삼각형 $\mathrm{AB_nC_n}$은 한 변의 길이가 n인 정삼각형

이므로 $a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}n\times\frac{1}{3}+1$

$a_n>6$, $n>\sqrt{300}$

따라서 n의 최솟값은 18

29. [출제의도] 계차수열 이해하기

등차수열 $\{a_k\}$의 공차를 d라 하면

$3a_1+3d=3,\ 5a_1+19d=33$

$a_1=-1,\ d=2$이다.

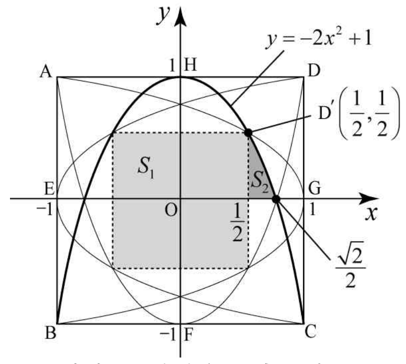
어두운 영역에 배열된 수열 a_3, a_7, a_{15}, $\cdots$을

$\{a_{b_k}\}$라 하면 $b_k=3+\sum_{l=1}^{k-1}4l=2k^2-2k+3$이고

정십오각형에서 어두운 부분에 대응되는 항은 $k=7$ 일 때이고 $b_7=87$이다.

따라서 $a_{87}=171$

30. [출제의도] 정적분을 이용하여 수학외적문제 해결하기



점 E, G를 지나는 직선을 x축, 점 H, F를 지나는 직선을 y축으로 할 때, 세 점 B, H, C를 지나는 이차함수는 $y=-2x^2+1$

교점 D′의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$이므로

어두운 부분의 넓이는

$S_1+8S_2=1+8\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-2x^2+1)dx=\frac{8\sqrt{2}-7}{3}$

$p=8,\ q=-7$

따라서 $p-q=15$