수리 영역

"가"형 정답

1	①	2	②	3	③	4	⑤	5	②
6	④	7	③	8	②	9	①	10	⑤
11	④	12	①	13	③	14	①	15	⑤
16	③	17	④	18	②	19	④	20	④
21	②	22	20	23	31	24	36	25	16
26	8	27	12	28	400	29	171	30	32

해설

1. [출제의도] 로그 계산하기
$a^b = (\sqrt{3})^{\log_4 16} = (\sqrt{3})^2 = 3$

2. [출제의도] 역행렬 계산하기
$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로 $A + A^{-1} = E$
따라서 모든 성분의 합은 2

3. [출제의도] 정적분 계산하기
$\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - 2x + 4)\,dx$
$= 2\int_0^1 (-3x^2+4)\,dx = 2\left[-x^3+4x\right]_0^1 = 6$

4. [출제의도] 이항정리 이해하기
${}_6\mathrm{C}_r (x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_6\mathrm{C}_r x^{12-3r}$
$12 - 3r = 3,\ r = 3$
따라서 x^3의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$

5. [출제의도] 행렬을 이용하여 수학외적문제 해결하기
$\begin{cases} 20x + 15y = 600 \\ 25x + 20y = 770 \end{cases}$ 이므로 $5\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 770 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 600 \\ 770 \end{pmatrix}$
$\alpha = -3, \beta = -5$
따라서 $\alpha\beta = 15$

6. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기
$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
$\therefore a = 2,\ b = 6$
따라서 $ab = 12$

7. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수의 성질 추론하기
$\log x = [\log x] + \frac{1}{k} = (\text{정수}) + \frac{1}{k}$
$k = 1$일 때, $A_1 = \phi$
$k \neq 1$일 때,
$A_k = \left\{10^{\frac{1}{k}}, 10^{1+\frac{1}{k}}, 10^{2+\frac{1}{k}}, 10^{3+\frac{1}{k}}, 10^{4+\frac{1}{k}}\right\}$
ㄱ. $A_2 = \left\{10^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{3}{2}}, 10^{\frac{5}{2}}, 10^{\frac{7}{2}}, 10^{\frac{9}{2}}\right\}$ 이므로
$\sqrt{10} \in A_2$ (참)
ㄴ. 2이상의 자연수 k에 대하여
$n(A_k) = 5$ (참)
ㄷ. 서로 다른 자연수 m, n에 대하여 $A_m \cap A_n = \phi$ (거짓)

8. [출제의도] 삼각함수의 배각공식 이해하기
$\overline{\mathrm{AB}} = 3a,\ \overline{\mathrm{BC}} = 4a\ (a > 0)$라 할 때
$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{5}\,a,\ \overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{20}\,a,\ \overline{\mathrm{BQ}} = \sqrt{13}\,a$
코사인법칙에 의하여 $\cos\theta = \frac{3}{5}$
따라서 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{7}{25}$

9. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기
$f(x) = \sin 2x$이므로 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는
$x = \sin 2y$
$\frac{dx}{dy} = 2\cos 2y,\ \frac{dx}{dy} = 2\sqrt{1-x^2}$
$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$
따라서 $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

10. [출제의도] 함수의 연속성에 대한 성질 추론하기
ㄱ. $\lim_{x\to 1+0} g(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{f(x)} = \infty$
$\lim_{x\to 1-0} g(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{f(x)} = 1$
따라서, $\lim_{x\to 1} g(x)$는 존재하지 않는다. (거짓)
ㄴ. $\lim_{x\to 1-0} g(f(x)) = \lim_{t\to 1-0} g(t) = \lim_{t\to 1-0} \frac{1}{f(t)} = 1$
(참)
ㄷ. $f(x)$가 $x = 0, \pm 1$을 제외한 열린 구간 $(-2, 2)$에서 연속이므로 $g(x)$도 연속이다.
$\lim_{x\to 1+0} x^2 g(x) = \infty,\quad \lim_{x\to -1-0} x^2 g(x) = \infty$
이므로 $x = \pm 1$에서 불연속이다.
$\lim_{x\to 0} x^2 g(x) = 0$이고 함숫값과 같으므로
$x = 0$에서 연속이다. (참)

11. [출제의도] 등차·등비수열의 합 계산하기
$d(\mathrm{A}, \mathrm{P}_n) = |1-n| + |0-2^n|$이다.
$\sum_{n=1}^{10} d(\mathrm{A}, \mathrm{P}_n) = \sum_{n=1}^{10} (-1 + n + 2^n) = 2^{11} + 43$

12. [출제의도] 회전체의 부피 계산하기
$V = \pi\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi$

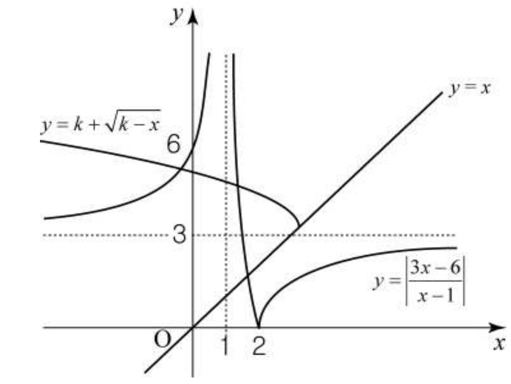
13. [출제의도] 로그부등식을 활용하여 수학외적문제 해결하기
$C_1 = \frac{k}{\log 2},\ C_2 = \frac{k}{\log n}$
$\frac{\log n}{\log 2} > \frac{1}{\log 2}$ 이므로 $n > 10$
따라서 자연수 n의 최솟값은 11

14. [출제의도] 도형의 넓이 계산하기
곡선 $y = e^x - 1$에서 접선 l의 방정식은
$y - (e-1) = e(x-1)\ \therefore y = ex - 1$
따라서 $\int_0^1 (e^x - ex)\,dx = \frac{e}{2} - 1$

15. [출제의도] 행렬을 이용하여 도형의 넓이 추론하기
ㄱ. $S(A) = \frac{3}{2}$ (참)
ㄴ. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, $S(A) = \frac{1}{2}(c-b)(d-a)$
$S(kA) = \frac{1}{2}(kc-kb)(kd-ka) = k^2 S(A)$ (참)
ㄷ. 행렬 $A + mB$에 의해 정해지는 네 점은 행렬 A에 의해 정해지는 네 점을 x축, y축의 방향으로 각각 m만큼 평행이동한 점이므로 사각형의 넓이는 같다. (참)

16. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학내적문제 해결하기
$\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{AP}_n = \theta_n$이라 하면 $l_n = \theta_n$이고
(나)에 의하여 $\theta_n = \theta_1 r^{n-1}$
$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n = \frac{\theta_1}{1-r} = \frac{8}{15}\pi \cdots ①$
(다)에 의하여 $\theta_1(1+r) = \frac{\pi}{2} \cdots ②$
따라서 ①, ②에 의하여 $r = \frac{1}{4}$

17. [출제의도] 분수방정식과 무리방정식의 수학내적문제 해결하기
함수 $y = k + \sqrt{k-x}$의 그래프는 함수 $y = x$의 그래프를 따라 평행 이동한다.



주어진 방정식의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha\beta \le 0$을 만족하는 상수 k의 최댓값은 함수 $y = k + \sqrt{k-x}$의 그래프가 점$(0,6)$을 지날 때이다.
따라서 $k = 4$

18. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 수학내적문제 해결하기
$\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\frac{\theta}{2} \qquad \therefore S(\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2} \times \sin\frac{\theta}{2}$
따라서 $\lim_{\theta\to 0} \frac{S(\theta)}{\tan\theta} = 2$

19. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명 과정 추론하기
(ⅰ) $n = 1$일 때,
(좌변)$= a_1 = \frac{1}{2(2+4)} = \boxed{\frac{1}{12}}$
(우변)$= \frac{1}{(1+1)^2} - T_1 = \boxed{\frac{1}{12}}$
이므로 (★)이 성립한다.
(ⅱ) $n = m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면
$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m$
이다. $n = m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.
$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + a_{m+1}$
$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + \boxed{\frac{1}{m+2}}(T_{m+1} - T_m)$
$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{m+3}{m+2}(T_{m+1} - T_m)$
$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{1}{(m+2)^2}$
$= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1}$
그러므로 $n = m+1$일 때도 (★)이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.
$\alpha = \frac{1}{12},\ f(2) = \frac{1}{4}$. 따라서 $\frac{\alpha}{f(2)} = \frac{1}{3}$

20. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해

하기

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-(n+k)^2}}$$

$$=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{3}$$

21. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학 내적문제 해결하기

원 A_n의 반지름의 길이를 a_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n라 하면

$r_1=3$, $a_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1}$, $r_n-r_{n+1}=a_n$ 이므로

$r_n-r_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1}$, $r_{n+1}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=r_n$

$r_{n+1}=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}r_n$, $r_{n+1}=2(2-\sqrt{3})r_n$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{6\pi}{1-(4-2\sqrt{3})}=(6+4\sqrt{3})\pi$

22. [출제의도] 분수방정식 계산하기

$x^3-1\neq 0$이므로 $x^2+x+1-2(x-1)=2x+1$의 근 $\alpha=2$

따라서 $10\alpha=20$

23. [출제의도] 조건부확률 계산하기

정팔각형의 꼭짓점 중 임의의 세 점을 택하여 만든 삼각형이 직각삼각형인 사건을 A, 이등변삼각형인 사건을 B라 할 때

$\dfrac{q}{p}=\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}$

$p=3, q=1$

따라서 $10p+q=31$

24. [출제의도] 도함수의 성질을 활용하여 수학 내적문제 해결하기

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이를 x_t, 그에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_t라 하면,

$r_t=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x_t$, $x_t=12\sqrt{3}+3\sqrt{3}\,t$이므로

$r_t=\dfrac{12+3t}{2}$

t초 후 정삼각형에 내접하는 원의 넓이는

$S(t)=\pi\left(\dfrac{12+3t}{2}\right)^2$이므로

$x_t=24\sqrt{3}$일 때, $t=4$

$S'(4)=2\pi\left(\dfrac{12+3\times 4}{2}\right)\times\dfrac{3}{2}=36\pi$이다.

따라서 $a=36$

25. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기

점 A의 좌표를 (a, b)이라 하면, 접선의 방정식에 의해 점 B의 좌표는 $(-a, 0)$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $(a, 0)$ 점 H와 준선사이의 거리는 10이다.

$\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{OH}}=a, \overline{\mathrm{HF}}=10-2a$

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{AH}}=5b=40$

$b=8, \overline{\mathrm{HF}}=6, a=2, p=8 \quad \therefore \mathrm{A}(2, 8)$

따라서 $ab=16$

26. [출제의도] 일차변환의 합성 이해하기

일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

합성변환 h를 나타내는 행렬을 C라 하면

$C=ABA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $C^6=E$이므로

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=C^{2011}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

따라서 $a^2+b^2=8$

27. [출제의도] 중복조합 이해하기

가능한 $f(1)$의 경우의 수는 2가지이고,

공역 5, 6, 7중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 다음 작거나 같은 것부터 차례로 3, 4에 대응시키는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$

따라서 함수 f의 개수는 12

28. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

자릿수가 $4n$인 대칭수는 최고자리 숫자와 일의 자리 숫자를 제외한 $4n-2$개의 숫자가 서로 대칭이다. 대칭수의 개수 a_{4n}는 연속한 앞 쪽의 $2n$개의 숫자 중 최고자리를 제외한 $2n-1$개의 숫자에서 1의 개수가 0의 개수보다 많은 경우의 수이다.

$$a_{4n}={}_{2n-1}\mathrm{C}_n+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n+1}+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-1}$$
$$=\frac{2^{2n-1}}{2}=2^{2n-2}=4^{n-1}$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{300}{a_{4n}}=\sum_{n=1}^{\infty}300\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=400$

29. [출제의도] 계차수열 이해하기

등차수열 $\{a_k\}$의 공차를 d라 하면

$3a_1+3d=3$, $5a_1+19d=33$

$a_1=-1$, $d=2$이다.

어두운 영역에 배열된 수열 a_3, a_7, a_{15}, $\cdots$을

$\{a_{b_k}\}$라 하면 $b_k=3+\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}4l=2k^2-2k+3$이고

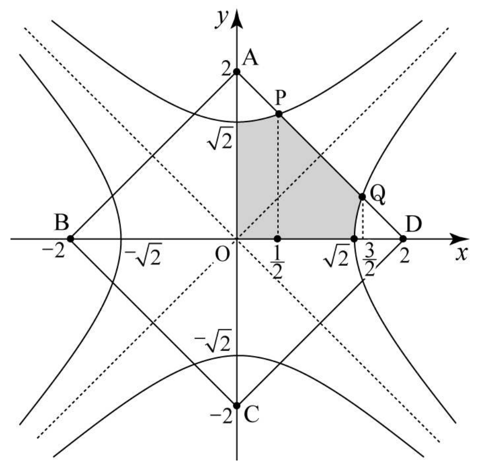
정십오각형에서 어두운 부분에 대응되는 항은 $k=7$ 일 때이고 $b_7=87$이다.

따라서 $a_{87}=171$

30. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학내적문제 해결하기

점 P,Q는 각각 두 정점 A,C와 두 정점 B,D로부터 거리의 차가 일정한 점이므로 점 P,Q가 나타내는 두 도형은 점 A,C와 점 B,D를 초점으로 하는 쌍곡선이다.

점 B,D를 지나는 직선을 x축, 점 A,C를 지나는 직선을 y축이라 하자.



점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$x^2-y^2=-2$

점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$x^2-y^2=2$

회전체의 부피는

$$2\pi\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}(x^2+2)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(2-x)^2dx-\int_{\sqrt{2}}^{\frac{3}{2}}(x^2-2)dx\right\}=\frac{24-8\sqrt{2}}{3}\pi$$

$\therefore a=24, b=-8$

따라서 $a-b=32$