"나"형 정답

1	⑤	2	①	3	③	4	②	5	①
6	③	7	④	8	⑤	9	⑤	10	④
11	④	12	③	13	②	14	⑤	15	①
16	⑤	17	②	18	⑤	19	④	20	⑤
21	③	22	14	23	16	24	30	25	4
26	15	27	47	28	3	29	30	30	6

해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_4\sqrt{8}-\log_{\frac{1}{2}}4=\frac{3}{4}\log_2 2+2\log_2 2=\frac{11}{4}$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$2X=3B-A$

$=3\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\14&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ X=\begin{pmatrix}1&-2\\7&0\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{243}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{5}{3}}\times3^{-\frac{2}{3}}=3$

4. [출제의도] 주어진 행렬의 성질 이해하기

이차방정식 $x^2-2(i+j)x+9=0$의 판별식이

$D/4=(i+j)^2-9$ 이므로

(ⅰ) $(1,\ 1)$성분 $D/4=-5<0$, $a_{11}=0$

(ⅱ) $(1,\ 2)$성분 $D/4=0$, $a_{12}=1$

(ⅲ) $(2,\ 1)$성분 $D/4=0$, $a_{21}=1$

(ⅳ) $(2,\ 2)$성분 $D/4=7>0$, $a_{22}=2$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$

5. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

그래프의 연결 상태를 나타내는 행렬은

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\
\begin{array}{c}A\\B\\C\\D\\E\end{array} & \begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}
\end{array}$$

이다. 따라서 행렬의 모든 성분의 합은 16이다.

6. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 이면 $AB=BA$ 이므로

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&x\\2y&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x\\0&2x\end{pmatrix}$ …… ①

$BA=\begin{pmatrix}0&x\\2y&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&0\\2y-6&0\end{pmatrix}$ …… ②

①, ②의 각 성분을 비교하면

$x=0$, $y=3$ $\therefore\ x+y=3$

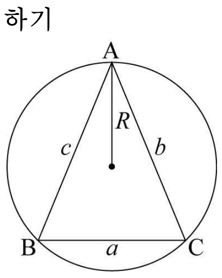
7. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$\frac{8^a+8^{-a}}{2^a+2^{-a}}=\frac{(2^a+2^{-a})(4^a-1+4^{-a})}{2^a+2^{-a}}$

$=(2^a+2^{-a})^2-3$

$=6$

8. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학내적문제 해결하기



그림과 같이 $\triangle\mathrm{ABC}$의 외접원의 반지름을 R라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $b=c$이다.

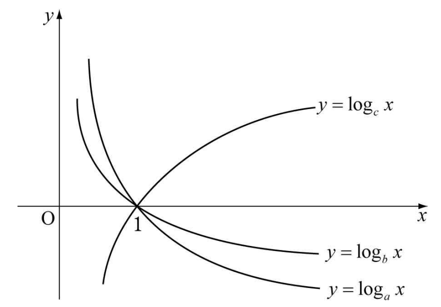
$\sin\mathrm{A}=\frac{a}{2R}$, $\sin\mathrm{C}=\frac{c}{2R}$,

$\cos\mathrm{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a}{2c}$

$\log_2\sin\mathrm{A}-\log_2\cos\mathrm{B}-\log_2\sin\mathrm{C}$

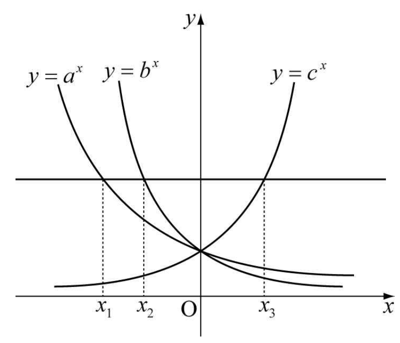
$=\log_2\frac{\sin\mathrm{A}}{\cos\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}=\log_2\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{a}{2c}\times\frac{c}{2R}}=\log_2 2=1$

9. [출제의도] 로그함수 이해하기



그림과 같이 서로 다른 양수 a, b, c 에 대하여 $0<b<a<1<c$ 이다.

주어진 조건에서 $a_1^x=b_2^x=c_3^x>1$ 이므로



$x_1<x_2<0$, $x_3>0$ 이다. $\therefore\ x_3>x_2>x_1$

10. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

그래프의 연결 상태를 나타낸 행렬을 P라 하자.

$P=\begin{pmatrix}0&\boxed{}&\boxed{}&0\\1&0&1&1\\1&1&0&\boxed{}\\0&\boxed{}&0&0\end{pmatrix}$ 에 대하여

$a_{ij}=a_{ji}\,(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$이므로

$P=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ 이다.

$P^2=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&0\\1&1&2&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$ 이므로

꼭짓점 B에서 변을 두 번 거쳐 꼭짓점 B로 되돌아오는 방법의 수는 P^2의 $(2,\ 2)$성분과 같으므로 3이다.

11. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 수학외적문제 해결하기

A학교 학생 중 배드민턴을 배우는 학생 수는

$$0.3\times300+0.4\times250$$

$QP=\begin{pmatrix}0.7&0.6\\0.3&0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300&200\\250&150\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0.7\times300+0.6\times250&0.7\times200+0.6\times150\\0.3\times300+0.4\times250&0.3\times200+0.4\times150\end{pmatrix}$

$\therefore$ 행렬 QP의 $(2,1)$ 성분이다.

12. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학내적문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AQ}}$이므로 $2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BQ}}$이고,

$\overline{\mathrm{AP}}=\log_2 3$이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=2\log_2 3$이다.

점 Q의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

$2\log_2 3=\log_2 a+1$

그러므로 $a=\frac{9}{2}$

$\triangle\mathrm{ABQ}$의 넓이는 $3\log_2 3$이다.

13. [출제의도] 상용로그의 지표의 성질 이해하기

$233\le\log A^{100}<234$

$2.33\le\log A<2.34$

$46.6\le20\log A<46.8$

$\log A^{20}$의 지표가 46이므로 A^{20}은 47자리의 수이다.

14. [출제의도] 주어진 지수의 성질 추론하기

ㄱ. $3\uparrow2=3^3=27$ (참)

ㄴ. $a\uparrow(n+1)=\underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}_{a\text{가 }(n+1)\text{개}}=a^{\overbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}^{a\text{가 }n\text{개}}}=a^{(a\uparrow n)}$

(참)

ㄷ. $\log(4\uparrow3)=\log4^{4^4}=512\log2=154.112$

따라서 $4\uparrow3$은 155자리 자연수이다.(참)

$\therefore$ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학외적 문제 해결하기

n개월 후의 이 제품의 가격은 $10^6\times(0.8)^{\frac{n}{5}}$(원)

가격이 50만 원 이하가 되는 시기를 계산하면

$10^6\times(0.8)^{\frac{n}{5}}\le5\times10^5$

양변에 상용로그를 취하면

$\log2+\frac{n}{5}\log0.8\le0$

$n\ge15.5\cdots$

따라서 최소한 16개월이 지나야 한다.

16. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$라 두면

$AX=XA$ 이므로

$bz=\boxed{cy}$, $(a-d)y=b(x-w)$,

$(a-d)z=c(x-w)$이다.

(ⅰ) $a-d=0$ 인 경우

$A\ne kE$에서 $b\ne0$ 또는 $c\ne0$ 이므로

$x=w$ 이다.

㉠ $b\ne0$ 이면 $z=\frac{\boxed{cy}}{b}$ 이므로

$X=\begin{pmatrix}x&y\\z&x\end{pmatrix}=\boxed{\frac{y}{b}}A+\left(x-\frac{a}{b}y\right)E$

㉡ $c\ne0$ 이면 $y=\frac{bz}{c}$이므로

$X=\begin{pmatrix}x&y\\z&x\end{pmatrix}=\frac{z}{c}A+\left(x-\frac{a}{c}z\right)E$

(ⅱ) $a-d\ne0$인 경우

$y=\frac{b(x-w)}{a-d}$, $z=\frac{c(x-w)}{a-d}$ 이므로

$X=\frac{x-w}{a-d}A+\boxed{\frac{aw-dx}{a-d}}E$ 이다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의해 이차정사각행렬 X는 $X=mA+nE$ 형태로 나타낼 수 있다.

17. [출제의도] 역행렬의 성질 이해하기

$(A+E)(2A-E)=E$

$2A^2+A-2E=0$

$A(2A+E)=2E$

$\therefore(2A+E)^{-1}=\frac{1}{2}A$

18. [출제의도] 로그를 이용하여 주어진 집합의 성질 추론하기

ㄱ. $A_2=\{x\,|\,\log_2 x$가 유리수, $2\le x\le100$인 자연수 $\}$

$=\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6\}$

이므로 $n(A_2)=6$ (참)

ㄴ. $n(A_3)=n(A_9)=n(A_{27})=n(A_{81})=4$ 이므로
$n(A_3)+n(A_9)+n(A_{27})+n(A_{81})=16$ (참)

ㄷ. $x \in A_m \cap A_n$ 에 대하여
$x=m^p=n^q$ (p, q는 양의 유리수)
$y \in A_m$ 이면 $y=m^r=x^{\frac{r}{p}}=n^{\frac{qr}{p}}$ (r는 양의 유리수) 이므로 $y \in A_n$ 이다. 즉, $A_m \subset A_n$
같은 방법으로 $A_n \subset A_m$ 이므로 $A_m=A_n$ (참)

∴ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학외적 문제 해결하기

$v_1=k\rho g^{-0.5}A_1^{1.25}$ …… ①

$5v_1=k\rho g^{-0.5}A_2^{1.25}$ …… ②

②÷①을 하면 $5=\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1.25}$ 이다.

양변에 상용로그를 취하면

$\log 5=1.25\log\frac{A_2}{A_1}$ 이므로

$\log\frac{A_2}{A_1}=0.56=\log 3.63$ ∴ $\frac{A_2}{A_1}=3.63$

20. [출제의도] 역행렬의 정의를 이용하여 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $A(BC)=E$ 에서 $A^{-1}=BC$ (참)

ㄴ. $A^{-1}(ABC)A=A^{-1}A=E$ 에서 $BCA=E$
$C(ABC)C^{-1}=CC^{-1}=E$ 에서 $CAB=E$
따라서 $BCA=CAB$ (참)

ㄷ. $B(CA)=E$ 에서 $B^{-1}=CA$ (참)

∴ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 지수부등식을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$A=\left\{x \,\middle|\, \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}\right\}=\{x\,|\,x+2>x^2\}$

$=\{x\,|-1<x<2\}$

$B=\{x\,|\,2^{|x-2|}\le 2^a\}=\{x\,|\,|x-2|\le a\}$

$=\{x\,|\,2-a\le x\le 2+a\}$

$A\cap B=A$ 이므로 $A\subset B$ 이다.

그러므로 $2-a\le -1$ 이고 $2\le 2+a$ 이다.

즉, $3\le a$ 이다. ∴ a 의 최솟값은 3이다.

22. [출제의도] 행렬 계산하기

$A^2+AB=A(A+B)=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\2&4\end{pmatrix}$

A^2+AB의 모든 성분의 합은 14이다.

23. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A^{-1}=\begin{pmatrix}a&-a-1\\-a+1&a\end{pmatrix}$ 이므로

$A+A^{-1}=2aE$

양변을 제곱하여 정리하면

$A^2+(A^{-1})^2=(4a^2-2)E$

모든 성분의 합이 124 이므로 $2(4a^2-2)=124$

∴ $a^2=16$

24. [출제의도] 로그부등식을 이용하여 수학내적문제 해결하기

이차함수 $f(x)=x^2-4x-\log_2 a$ 의

그래프의 대칭축은 $x=2$ 이다.

방정식 $f(x)=0$ 이 $4<x<5$ 에서 한 개의 실근을 가지려면 $f(4)<0$, $f(5)>0$ 이어야 한다.

$f(4)=-\log_2 a<0$

$a>1$ …… ①

$f(5)=5-\log_2 a>0$

$0<a<32$ …… ②

①, ②를 동시에 만족하는 a 의 범위는

$1<a<32$

∴ 자연수 a 의 개수는 30(개)

25. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학내적문제 해결하기

점 C 의 좌표를 $(a,\ 0)$ 라 하면

$\mathrm{A}(a, \log_3 a)$, $\mathrm{B}(9a, \log_3 9a)$, $\mathrm{D}(9a,\ 0)$

이고 $\overline{\mathrm{CD}}$ 의 길이는 $8a$ 이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2}=\frac{\log_3 9a-\log_3 a}{9a-a}=\frac{2}{8a}=\frac{1}{4a}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$ 이므로 $8a=4$ ∴ $\overline{\mathrm{CD}}$ 의 길이는 4

26. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계 이해하기

$\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}$ 를 정리하면

$\begin{pmatrix}2-k&-1\\3-2k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 이다.

연립일차방정식의 해 중에서 $x-y+5=0$ 을 만족하는 해가 존재하려면 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가져야 하므로 $(2-k)\times 1-(-1)\times(3-2k)=0$

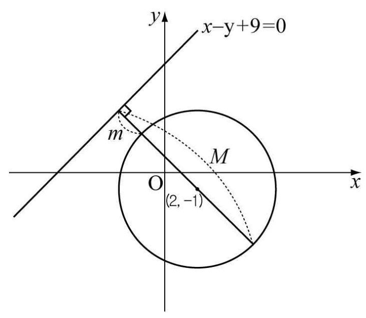
따라서 $k=\frac{5}{3}$ ∴ $9k=15$

27. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$A^2=\begin{pmatrix}(x-2)^2+(y+1)^2&0\\0&(x-2)^2+(y+1)^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}$

이므로 점 $(x,\ y)$ 는 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ 위의 점이다.



원의 중심$(2,\ -1)$에서 직선 $x-y+9=0$ 까지의

거리는 $\frac{12}{\sqrt{1^2+1^2}}=6\sqrt{2}$ 이므로

$m=6\sqrt{2}-5$, $M=6\sqrt{2}+5$ 이다.

따라서 $mM=(6\sqrt{2}-5)(6\sqrt{2}+5)=47$ 이다.

∴ $mM=47$

28. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 라 하자. $A+A^{-1}=E$ 의 양변에 A 를 곱하면 $A^2-A+E=O$ 이다.

양변에 $A+E$ 을 곱해서 정리하면 $A^3=-E$

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 의 양변에 A^2 을 곱하면

$-E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}$

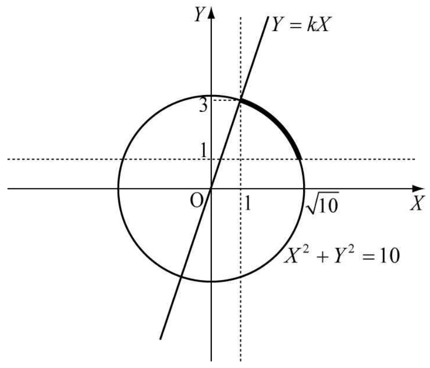
따라서 모든 성분의 합은 3 이다.

29. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$\log_3 x=X$, $\log_3 y=Y$ 라 하면,

주어진 식은 $X^2+Y^2=10$ 이고 $X\ge 1$, $Y\ge 1$

이때, 이를 만족하는 점 (X, Y) 를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



한편, $\log_x y=k$ 라 두면 $Y=kX$ 이다.

여기서 k는 원점을 지나는 직선의 기울기이므로 $(1,\ 3)$ 을 지날 때, 최대가 된다.

$\log_3 x=X=1$, $\log_3 y=Y=3$

$x=3=\alpha$, $y=27=\beta$

∴ $\alpha+\beta=30$

30. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$\log x=2+\alpha$, $\log y=2+\beta$

$(0\le\alpha<1, 0\le\beta<1)$ 라 하자.

(가)에서 $\log x+\log y=4+(\alpha+\beta)$ 의 값이 정수이므로 $\alpha+\beta=0$ 또는 $\alpha+\beta=1$

∴ $\alpha=\beta=0$ 또는 $\beta=1-\alpha$ …… ①

(나)에서 $\log x-\log y=\alpha-\beta=0.4$ …… ②

①, ②에 의해 $\alpha=0.7$, $\beta=0.3$ 이다.

$\log x=2.7$ 에서 $\log 500<\log x<\log 600$ 이므로

x 의 최고자리의 숫자는 5이다. ∴ $a=5$

$\log y=2.3$ 에서 $\log 100<\log y<\log 200$ 이므로

y 의 최고자리의 숫자는 1이다. ∴ $b=1$

∴ $a+b=6$