수리 영역

“가”형 정답

1	⑤	2	①	3	④	4	③	5	①
6	②	7	④	8	③	9	⑤	10	③
11	④	12	⑤	13	②	14	⑤	15	③
16	⑤	17	②	18	①	19	④	20	⑤
21	③	22	240	23	16	24	32	25	4
26	25	27	47	28	308	29	48	30	6

해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_4\sqrt{8}-\log_{\frac{1}{2}}4=\frac{3}{4}\log_2 2+2\log_2 2=\frac{11}{4}$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$2X=3B-A$

$=3\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\14&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ X=\begin{pmatrix}1&-2\\7&0\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 극한값 계산하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+2n+3}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+2n+3}-n}\times\frac{\sqrt{n^2+2n+3}+n}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n^2+2n+3}+4n}{2n+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+4}{2+\frac{3}{n}}=4$

4. [출제의도] 등차수열 이해하기

세 항 a_7, a_{10}, a_{13} 이 등차수열을 이루므로 a_{10} 은 등차중항이다.

$a_{10}=\frac{a_7+a_{13}}{2}=\frac{15+25}{2}=20$

$\therefore a_{10}=20$

5. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

그래프의 연결 상태를 나타내는 행렬은

$$\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

이다. 따라서 행렬의 모든 성분의 합은 16 이다.

6. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$a_5=a_1r^4=1,\quad a_1=r^{-4}$

$M=r^{-4}\times r^{-3}\times r^{-2}\times r^{-1}\times r^0\times r^1\times\cdots\times r^{15}$

$=r^{5+6+\cdots+15}=r^{110}$

$\therefore\ \log_r M=\log_r r^{110}=110$

7. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$\frac{8^a+8^{-a}}{2^a+2^{-a}}=\frac{(2^a+2^{-a})(4^a-1+4^{-a})}{2^a+2^{-a}}$

$=(2^a+2^{-a})^2-3$

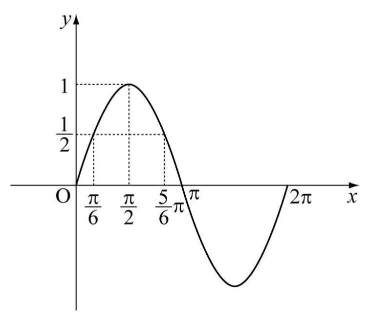
$=6$

8. [출제의도] 무한등비급수의 성질을 이용하여 수학내적문제 해결하기

주어진 무한등비수열이 수렴하려면

$-1<4\sin x-3\le 1$

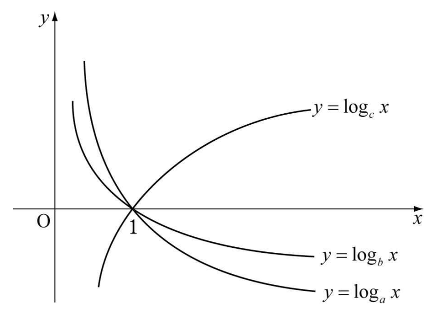
따라서 $\frac{1}{2}<\sin x\le 1$(단, $0\le x<2\pi$)



$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{6}$이고 $\beta=\frac{5}{6}\pi$이다.

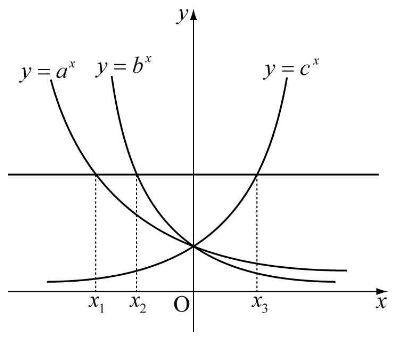
$\therefore\ \beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$

9. [출제의도] 로그함수 이해하기



그림과 같이 서로 다른 양수 a, b, c 에 대하여 $0<b<a<1<c$ 이다.

주어진 조건에서 $a_1^x=b_2^x=c_3^x>1$ 이므로



$x_1<x_2<0$, $x_3>0$ 이다. $\therefore\ x_3>x_2>x_1$

10. [출제의도] 무한수열의 성질 이해하기

ㄱ. 대우명제 ‘수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하면 수열 $\{a_n{}^2\}$이 수렴한다.’가 참이므로 주어진 명제는 참이다. (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 두자.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)+\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)$

$=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)$

$=\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\lim_{n\to\infty}a_n{}^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$, $\lim_{n\to\infty}b_n{}^2=\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

따라서 수열$\{a_n{}^2\}$, $\{b_n{}^2\}$은 수렴한다. (참)

ㄷ. 【반례】 $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$ (거짓)

$\therefore$ ㄱ, ㄴ

11. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 수학외적문제 해결하기

A 학교 학생 중 배드민턴을 배우는 학생 수는

$0.3\times 300+0.4\times 250$

$QP=\begin{pmatrix}0.7&0.6\\0.3&0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300&200\\250&150\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0.7\times 300+0.6\times 250&0.7\times 200+0.6\times 150\\0.3\times 300+0.4\times 250&0.3\times 200+0.4\times 150\end{pmatrix}$

$\therefore$ 행렬 QP 의 $(2,1)$ 성분이다.

12. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

$S_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{3}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}}=\frac{3}{2(2^n-1)}$

$\therefore\ S_{10}=\frac{3}{2046}=\frac{1}{682}$

13. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+n(n-1)=n^2-n+1$

$\therefore\ a_{10}=91$

14. [출제의도] 주어진 지수의 성질 추론하기

ㄱ. $3\uparrow 2=3^3=27$ (참)

ㄴ. $a\uparrow(n+1)=\underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{a\text{가 }(n+1)\text{개}}=a^{\overbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}^{a\text{가 }n\text{개}}}=a^{(a\uparrow n)}$

(참)

ㄷ. $\log(4\uparrow 3)=\log 4^{4^4}=512\log 2=154.112$

따라서 $4\uparrow 3$은 155 자리 자연수이다.(참)

$\therefore$ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$a_9=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{4}a_{2k-1}$

$=25p+190-(16p+152)$

$=9p+38=56\ \ \therefore p=2$

이때, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=4n^2+36n$이므로

$a_{20}=\sum_{k=1}^{10}a_{2k}-\sum_{k=1}^{9}a_{2k}=112$

$\therefore a_{20}=112$

16. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ 라 두면

$AX=XA$ 이므로

$bz=\boxed{cy}$, $(a-d)y=b(x-w)$,

$(a-d)z=c(x-w)$ 이다.

(i) $a-d=0$ 인 경우

$A\ne kE$ 에서 $b\ne 0$ 또는 $c\ne 0$ 이므로 $x=w$ 이다.

㉠ $b\ne 0$ 이면 $z=\frac{\boxed{cy}}{b}$ 이므로

$X=\begin{pmatrix}x&y\\z&x\end{pmatrix}=\boxed{\frac{y}{b}}A+\left(x-\frac{a}{b}y\right)E$

㉡ $c\ne 0$ 이면 $y=\frac{bz}{c}$이므로

$X=\begin{pmatrix}x&y\\z&x\end{pmatrix}=\frac{z}{c}A+\left(x-\frac{a}{c}z\right)E$

(ii) $a-d\ne 0$인 경우

$y=\frac{b(x-w)}{a-d}$, $z=\frac{c(x-w)}{a-d}$ 이므로

$X=\frac{x-w}{a-d}A+\boxed{\frac{aw-dx}{a-d}}E$ 이다.

(i)과 (ii)에 의해 이차정사각행렬 X 는 $X=mA+nE$ 형태로 나타낼 수 있다.

17. [출제의도] 역행렬의 성질 이해하기

$(A+E)(2A-E)=E$

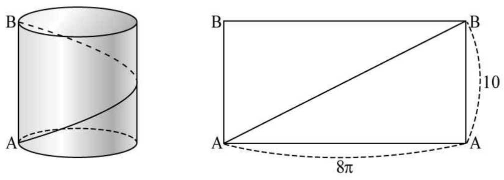
$2A^2+A-2E=0$

$A(2A+E)=2E$

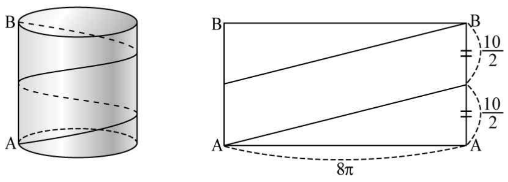
$\therefore (2A+E)^{-1}=\frac{1}{2}A$

18. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 수학외적문제 해결하기

다음은 직원기둥의 옆면의 전개도에서 최단거리의 선을 나타낸 것이다.



$$a_1=\sqrt{64\pi^2+10^2}$$



$$a_2=2\times\sqrt{64\pi^2+\left(\frac{10}{2}\right)^2}$$

$$\vdots$$

같은 방법으로 $a_n=n\times\sqrt{64\pi^2+\left(\frac{10}{n}\right)^2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{64\pi^2+\left(\frac{10}{n}\right)^2}=8\pi$

19. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학외적 문제 해결하기

$v_1=k\rho g^{-0.5}A_1^{1.25}$ ...... ①

$5v_1=k\rho g^{-0.5}A_2^{1.25}$ ...... ②

②÷①을 하면 $5=\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1.25}$ 이다.

양변에 상용로그를 취하면

$\log 5=1.25\log\frac{A_2}{A_1}$ 이므로

$\log\frac{A_2}{A_1}=0.56=\log 3.63$ $\quad\therefore \frac{A_2}{A_1}=3.63$

20. [출제의도] 역행렬의 정의를 이용하여 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $A(BC)=E$ 에서 $A^{-1}=BC$ (참)

ㄴ. $A^{-1}(ABC)A=A^{-1}A=E$ 에서 $BCA=E$

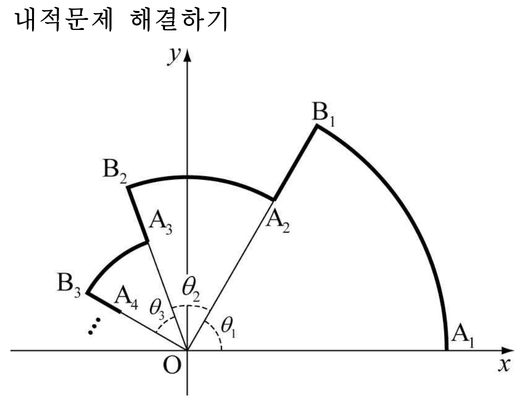
$C(ABC)C^{-1}=CC^{-1}=E$ 에서 $CAB=E$

따라서 $BCA=CAB$ (참)

ㄷ. $B(CA)=E$ 에서 $B^{-1}=CA$ (참)

∴ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 도형의 규칙성을 이용하여 수학내적문제 해결하기



수열 $\{l_n\}$은 $l_1=\frac{\pi}{3}$, 공비가 $\frac{5}{9}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{5}{9}}=\frac{3}{4}\pi$$

수열 $\{k_n\}$은 $k_1=\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(l_n+k_n)=\sum_{n=1}^{\infty}l_n+\sum_{n=1}^{\infty}k_n=\frac{3}{4}\pi+1$$

$a=\frac{3}{4}$, $b=1$ 이므로 $a+b=\frac{7}{4}$ 이다.

22. [출제의도] 무한급수의 성질 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)=300$ ...... ①

$\sum_{n=1}^{\infty}(2b_n+3)=180$ ...... ②

두 무한급수가 수렴하므로 ①+② 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)+\sum_{n=1}^{\infty}(2b_n+3)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+2b_n)=480$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=240$

23. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A^{-1}=\begin{pmatrix} a & -a-1 \\ -a+1 & a \end{pmatrix}$ 이므로

$A+A^{-1}=2aE$

양변을 제곱하여 정리하면

$A^2+(A^{-1})^2=(4a^2-2)E$

모든 성분의 합이 124이므로 $2(4a^2-2)=124$

$\therefore a^2=16$

24. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(2a_{n+1}-1)-(2a_n-1)$

$=2a_{n+1}-2a_n$

$a_{n+1}=2a_n$

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

$a_1=S_1=2a_1-1$ 이므로 $a_1=1$ 이다.

$a_n=2^{n-1}$ 이므로 $a_6=2^5=32$

$\therefore a_6=32$

25. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학내적문제 해결하기

점 C 의 좌표를 $(a,\ 0)$라 하면

$\mathrm{A}(a, \log_3 a)$, $\mathrm{B}(9a, \log_3 9a)$, $\mathrm{D}(9a,\ 0)$

이고 $\overline{\mathrm{CD}}$ 의 길이는 $8a$ 이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2}=\frac{\log_3 9a-\log_3 a}{9a-a}=\frac{2}{8a}=\frac{1}{4a}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$ 이므로 $8a=4$ $\quad\therefore$ $\overline{\mathrm{CD}}$ 의 길이는 4

26. [출제의도] 무한급수의 성질 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{5^n}=0$ 이다.

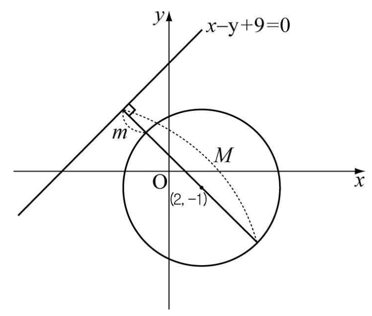
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{a_n}{5^n}}{\frac{1}{5}+2\left(\frac{2}{5}\right)^n}=25$$

27. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$$A^2=\begin{pmatrix}(x-2)^2+(y+1)^2 & 0 \\ 0 & (x-2)^2+(y+1)^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}25 & 0 \\ 0 & 25\end{pmatrix}$$

이므로 점 $(x,\ y)$는 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ 위의 점이다.



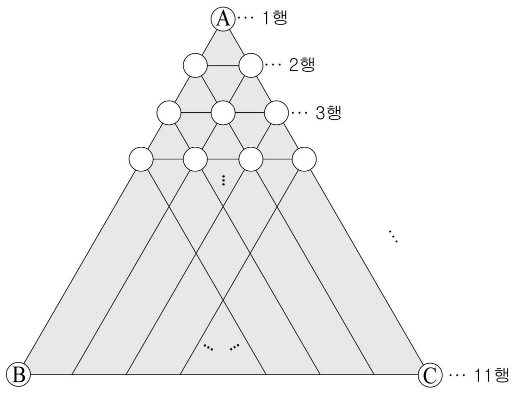
원의 중심$(2,\ -1)$에서 직선 $x-y+9=0$까지의 거리는 $\frac{12}{\sqrt{1^2+1^2}}=6\sqrt{2}$ 이므로

$m=6\sqrt{2}-5$, $M=6\sqrt{2}+5$ 이다.

따라서 $mM=(6\sqrt{2}-5)(6\sqrt{2}+5)=47$ 이다.

$\therefore mM=47$

28. [출제의도] 규칙성을 이용하여 수학 외적 문제해결하기



k행의 숫자들이 등차수열을 이루므로

k행의 첫째항은 $1+\frac{3}{10}(k-1)$

k행의 k번째 항은 $1+\frac{4}{5}(k-1)$

k행의 숫자들의 합을 S_k라 하면

$$S_k=\frac{k\left\{1+\frac{3}{10}(k-1)+1+\frac{4}{5}(k-1)\right\}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}k\left(\frac{11}{10}k+\frac{9}{10}\right)$$

66개의 꼭짓점에 쓰인 수들의 총합은

$$\sum_{k=1}^{11}S_k=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{2}k\left(\frac{11}{10}k+\frac{9}{10}\right)=308$$

29. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=T_n$ 이라 하면,

$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{n+3}$

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 등차수열이므로

$S_n=kn(2n+1)$, $T_n=kn(n+3)$ (k는 상수)

$S_1=3k=a_1=6$ 이므로 $k=2$

$T_n=2n(n+3)$, $b_1=8$

수열 $\{b_n\}$ 은 $b_1=8$, 공차 4인 등차수열이다.

$\therefore b_{11}=48$

30. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$\log x=2+\alpha$, $\log y=2+\beta$

$(0\le\alpha<1,\ 0\le\beta<1)$라 하자.

(가)에서 $\log x+\log y=4+(\alpha+\beta)$의 값이 정수

이므로 $\alpha+\beta=0$ 또는 $\alpha+\beta=1$
$\therefore \alpha=\beta=0$ 또는 $\beta=1-\alpha$ …… ①
(나)에서 $\log x-\log y=\alpha-\beta=0.4$ …… ②
①, ②에 의해 $\alpha=0.7$, $\beta=0.3$이다.
$\log x=2.7$에서 $\log 500<\log x<\log 600$이므로
x의 최고자리의 숫자는 5이다. $\therefore a=5$
$\log y=2.3$에서 $\log 100<\log y<\log 200$이므로
y의 최고자리의 숫자는 1이다. $\therefore b=1$
$\therefore a+b=6$