

제 2 교시

수리 영역 (가형)

성명		수험 번호					2			
----	--	-------	--	--	--	--	---	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_4 \sqrt{8} - \log_{\frac{1}{2}} 4$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$2A + 3X = A + 3B + X$ 를 만족시키는 행렬 X 는? [2점]

- ① $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n}$ 의 값은? [2점]

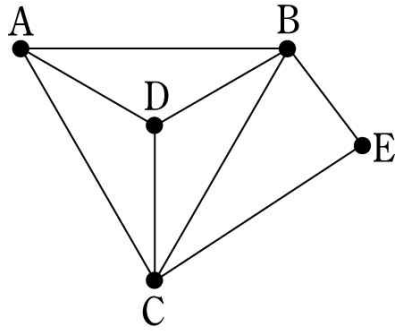
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_7 = 15$, $a_{13} = 25$ 일 때, a_{10} 의 값은?

[3점]

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

5. 다음 그래프의 연결 상태를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은?
[3점]



- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

6. 공비 r 은 1 이 아닌 양수이고, $a_5 = 1$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서
첫째항부터 제20 항까지의 곱을 M 이라 할 때, $\log_r M$ 의 값은?
[3점]

- ① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

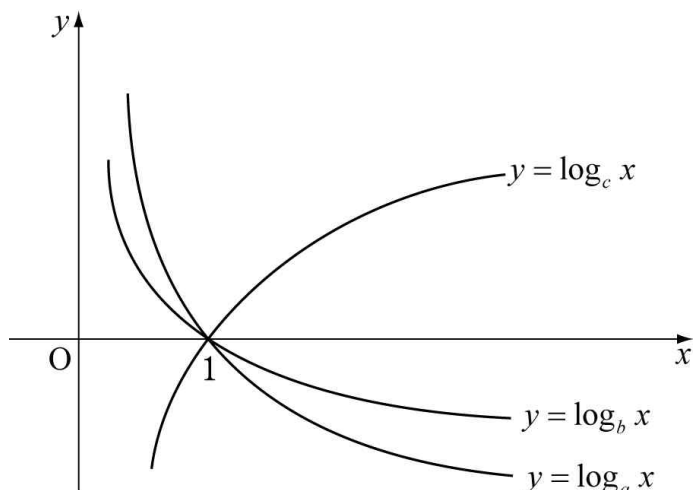
7. 양수 a 가 $2^a + 2^{-a} = 3$ 을 만족시킬 때, $\frac{8^a + 8^{-a}}{2^a + 2^{-a}}$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

8. 무한등비수열 $\{(4 \sin x - 3)^n\}$ 이 수렴하기 위한 필요충분조건은
 $\alpha < x < \beta$ 이다. 이때, $\beta - \alpha$ 의 값은? (단, $0 \leq x < 2\pi$) [4점]

- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{2}{3}\pi$ ④ $\frac{5}{6}\pi$ ⑤ π

9. 그림은 세 양수 a, b, c 를 밑으로 하는 로그함수의 그래프이다.



$a^{x_1} = b^{x_2} = c^{x_3} > 1$ 일 때, x_1, x_2, x_3 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

- ① $x_1 > x_2 > x_3$ ② $x_2 > x_1 > x_3$ ③ $x_2 > x_3 > x_1$
- ④ $x_3 > x_1 > x_2$ ⑤ $x_3 > x_2 > x_1$

10. 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 수열 $\{a_n^2\}$ 이 발산하면 수열 $\{a_n\}$ 은 발산한다.

ㄴ. 수열 $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ 이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n^2\}, \{b_n^2\}$ 도 모두 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ 이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 중 적어도 하나는 수렴한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 어느 고등학교 A 와 B 에서는 체육활동으로 테니스와 배드민턴을 배우고 있다. 두 학교 A, B 의 1학년과 2학년의 학생 수는 <표1>과 같다. 두 학교 모두 <표2>와 같이 1학년 학생의 70%는 테니스를, 30%는 배드민턴을 배우고, 2학년 학생의 60%는 테니스를, 40%는 배드민턴을 배운다고 한다.

(단위 : 명)		
학교	A	B
학년	300	200
1학년	300	200
2학년	250	150

< 표1 >

(단위 : %)		
학년	1학년	2학년
활동	70	60
테니스	70	60
배드민턴	30	40

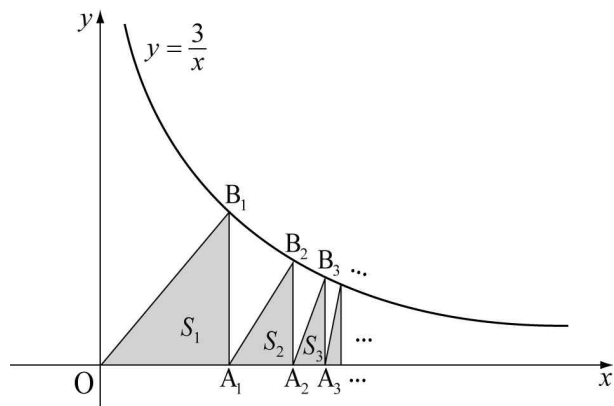
< 표2 >

<표1>과 <표2>를 각각 행렬 $P = \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 250 & 150 \end{pmatrix}$,

$Q = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ 로 나타낼 때, A 학교에서 배드민턴을 배우는 학생 수를 나타낸 것은? [3점]

- ① PQ 의 (1, 2) 성분
- ② PQ 의 (2, 1) 성분
- ③ QP 의 (1, 2) 성분
- ④ QP 의 (2, 1) 성분
- ⑤ QP 의 (2, 2) 성분

12. 그림과 같이 x 축 위의 점 $A_1(1, 0), A_2(1+\frac{1}{2}, 0), \dots, A_n(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}, 0)$ 에서 y 축에 평행한 직선을 그어 곡선 $y=\frac{3}{x}$ 과 만나는 점을 각각 B_1, B_2, \dots, B_n 이라 하자. $\triangle A_0A_1B_1$ 의 넓이를 $S_1, \triangle A_1A_2B_2$ 의 넓이를 $S_2, \triangle A_2A_3B_3$ 의 넓이를 $S_3, \dots, \triangle A_{n-1}A_nB_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, S_{10} 의 값은? (단, A_0 은 원점이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{678}$
- ② $\frac{1}{679}$
- ③ $\frac{1}{680}$
- ④ $\frac{1}{681}$
- ⑤ $\frac{1}{682}$

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+2n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)으로 정의될 때, a_{10} 의 값은? [3점]

- ① 90
- ② 91
- ③ 92
- ④ 93
- ⑤ 94

14. 자연수 a, n 에 대하여 $a \uparrow n$ 을

$$a \uparrow n = \underbrace{a^{a^{a^{\dots}}}}_{a \text{가 } n \text{개}}$$

라고 정의하자. 예를 들어, $2 \uparrow 3 = 2^{2^2} = 16$ 이다. <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\log 2 = 0.3010$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $3 \uparrow 2 = 27$
 ㄴ. $a \uparrow (n+1) = a^{(a \uparrow n)}$
 ㄷ. $4 \uparrow 3$ 은 155 자리의 수이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 상수 p 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = pn^2 + 38n, \quad \sum_{k=1}^n a_{2k} = 4n^2 + 18pn$$

을 만족시킨다. $a_9 = 56$ 일 때, a_{20} 의 값은? [3점]

- ① 108
- ② 110
- ③ 112
- ④ 114
- ⑤ 116

16. 다음은 $A \neq kE$ 인 모든 이차정사각행렬 A 에 대하여 행렬 X 가 $AX=XA$ 를 만족하면, 항상 $X=mA+nE$ 형태로 나타낼 수 있음을 증명한 것이다. (단, 행렬 A, X 의 모든 성분과 k, m, n 은 실수이다.)

<증명>

두 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ 라 두면 $AX=XA$ 이므로 $bz = \boxed{\text{(가)}}$, $(a-d)y = b(x-w)$, $(a-d)z = c(x-w)$ 이다.

(i) $a-d=0$ 인 경우
 $A \neq kE$ 에서 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$ 이므로 $x=w$ 이다.
 ㉠ $b \neq 0$ 이면 $z = \frac{\boxed{\text{(가)}}}{b}$ 이므로
 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} = \boxed{\text{(나)}} A + \left(x - \frac{a}{b}y\right) E$
 ㉡ $c \neq 0$ 이면 $y = \frac{bz}{c}$ 이므로
 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} = \frac{z}{c} A + \left(x - \frac{a}{c}z\right) E$

(ii) $a-d \neq 0$ 인 경우
 $y = \frac{b(x-w)}{a-d}$, $z = \frac{c(x-w)}{a-d}$ 이므로
 $X = \frac{x-w}{a-d} A + \boxed{\text{(다)}} E$ 이다.

(i)과 (ii)에 의해 이차정사각행렬 X 는 $X=mA+nE$ 형태로 나타낼 수 있다.

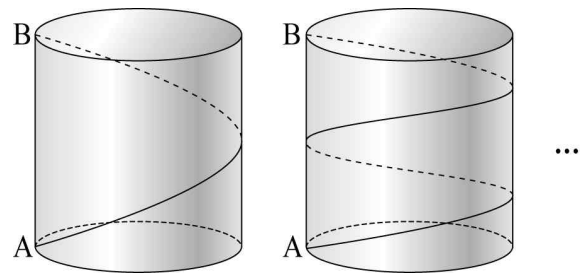
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	ax	$\frac{y}{b}$	$\frac{bz-cy}{a-d}$
②	ax	$\frac{a}{b}$	$\frac{dx-aw}{a-d}$
③	cy	$\frac{y}{b}$	$\frac{bz-cy}{a-d}$
④	cy	$\frac{a}{b}$	$\frac{aw-dx}{a-d}$
⑤	cy	$\frac{y}{b}$	$\frac{aw-dx}{a-d}$

17. 이차정사각행렬 A 와 단위행렬 E 에 대하여 $A+E$ 의 역행렬이 $2A-E$ 라 할 때, $2A+E$ 의 역행렬은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}A$ ② $\frac{1}{2}A$ ③ A ④ $\frac{3}{2}A$ ⑤ $2A$

18. 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 10인 직원기둥이 있다. 점 A, B는 서로 다른 두 밑면의 원주 위에 있고, 선분 AB의 길이는 직원기둥의 높이와 같다. 그림과 같이 점 A에서 시작하여 직원기둥의 옆면을 한 바퀴 돌아 점 B까지 최단거리의 선을 그을 때 그 선의 길이를 a_1 , 두 바퀴 돌아 최단거리의 선을 그을 때 그 선의 길이를 a_2, \dots, n 바퀴 돌아 최단거리의 선을 그을 때 그 선의 길이를 a_n 이라 하자. 이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값은? [4점]



- ① 8π ② 7π ③ 6π ④ 5π ⑤ 4π

19. 모래시계는 위쪽과 아래쪽으로 용기가 나누어져 있고, 두 용기 사이는 좁은 구멍으로 연결되어 있다. 모래가 위쪽 용기에 위치하도록 모래시계를 뒤집어 놓으면 중력에 의해 모래가 아래로 떨어진다. 이때, 모래가 유출되는 속도 v 는 아래와 같다.



$$v = k\rho g^{-0.5} A^{1.25}$$

(k 는 상수, ρ 는 모래의 밀도,
 g 는 중력가속도,
 A 는 모래 유출 구멍의 넓이)

x	$\log x$
2.00	0.30
2.10	0.32
2.20	0.34
\vdots	\vdots
3.53	0.55
3.63	0.56
3.73	0.57

모래 유출 구멍의 넓이가 A_1 일 때 모래 유출 속도를 v_1 , 모래 유출 구멍의 넓이가 A_2 일 때 모래 유출 속도를 $5v_1$ 이라 하자. 오른쪽 로그표를 이용하

여 구한 $\frac{A_2}{A_1}$ 의 값은? (단, 모래의 밀도와 중력가속도는 일정하다고 가정한다.) [4점]

- ① 2.10 ② 2.20 ③ 3.53 ④ 3.63 ⑤ 3.73

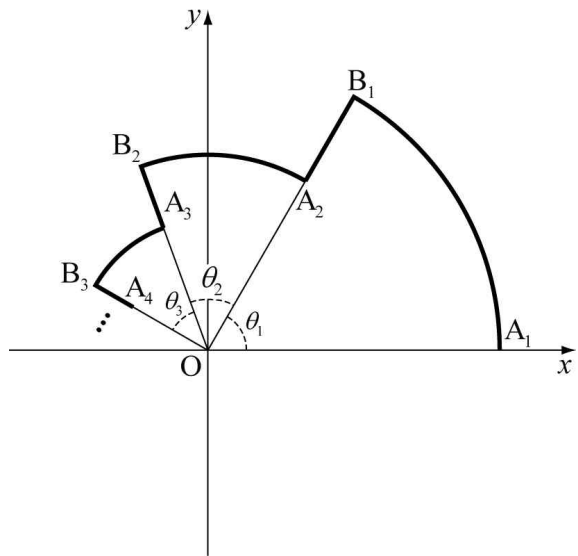
20. 세 이차정사각행렬 A, B, C 와 단위행렬 E 에 대하여 $ABC = E$ 가 성립할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1} = BC$
 ㄴ. $BCA = CAB$
 ㄷ. 행렬 B 의 역행렬이 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 원점 O 와 점 $A_1(1, 0)$ 을 이은 선분 OA_1 을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OA_1B_1 을 그린다. 선분 OB_1 을 2:1로 내분하는 점을 A_2 라 하고, 선분 OA_2 를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\theta_2 = \frac{5}{6}\theta_1$ 인 부채꼴 OA_2B_2 를 그린다. 선분 OB_2 를 2:1로 내분하는 점을 A_3 이라 하고, 선분 OA_3 을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\theta_3 = \frac{5}{6}\theta_2$ 인 부채꼴 OA_3B_3 을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n 의 호 A_nB_n 의 길이를 l_n , 선분 $A_{n+1}B_n$ 의 길이를 k_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} (l_n + k_n) = a\pi + b$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 유리수) [4점]



- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

단답형(22~30)

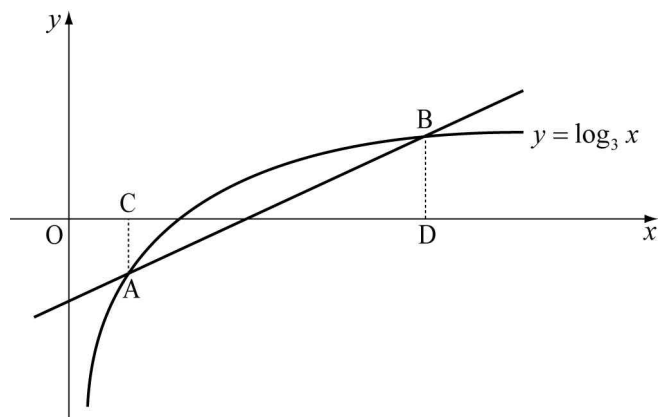
22. 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3) = 300,$

$\sum_{n=1}^{\infty} (2b_n + 3) = 180$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A^2 + (A^{-1})^2$ 의 모든 성분의 합이 124일 때, a^2 의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.
 $S_n = 2a_n - 1$ 일 때, a_6 의 값을 구하시오. [3점]

25. 그림과 같이 곡선 $y = \log_3 x$ 와 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선이 두 점 A, B에서 만나고 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{OC} : \overline{OD} = 1 : 9$ 일 때, 선분 CD의 길이를 구하시오. [3점]

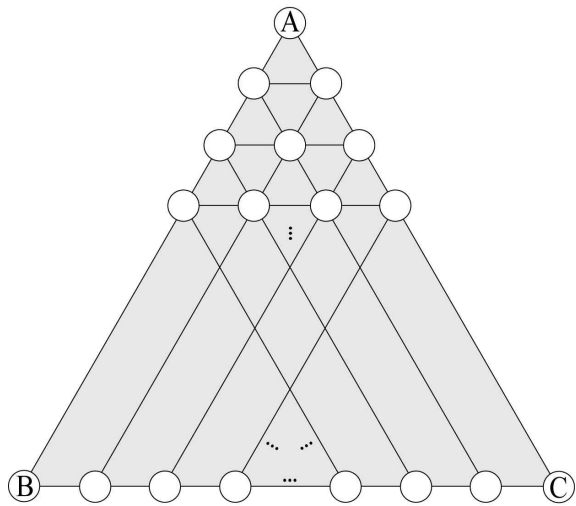


26. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} = 1$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 2^{n-1} + a_n}{5^{n-1} + 2^{n+1}}$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2-x & y+1 \\ y+1 & x-2 \end{pmatrix}$ 가 있다. $A^2 = 25E$ 를 만족시키는 x, y 에 대하여 점 (x, y) 를 좌표평면 위에 나타낼 때 만들어지는 도형을 S 라 하자. 도형 S 위의 점에서 직선 $x-y+9=0$ 까지의 거리의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라 할 때, mM 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림은 한 변의 길이가 10인 정삼각형을 한 변의 길이가 1인 작은 정삼각형으로 나눈 후 총 66개의 꼭짓점에 숫자를 써 넣을 수 있게 만든 숫자판이다.



위 숫자판에 모든 수들이 일직선 위에서 차례대로 등차수열이 되도록 써 넣었다. A가 1, B가 4, C가 9일 때, 꼭짓점에 쓰인 66개의 수들의 총합을 구하시오. [4점]

29. 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 6$ 이고

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2n+1}{n+3} \sum_{k=1}^n b_k$$

를 만족시킬 때, b_{11} 의 값을 구하시오.

[4점]

30. 정수 부분이 세 자리인 두 실수 x, y 가 다음 두 조건을 만족한다.

- (가) $\log x + \log y$ 는 정수이다.
- (나) $\log x - \log y = 0.4$

x 의 최고 자리의 숫자를 a, y 의 최고 자리의 숫자를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.