수리'나'형 정답

1	⑤	2	①	3	④	4	①	5	②
6	②	7	⑤	8	③	9	②	10	③
11	④	12	②	13	③	14	①	15	③
16	②	17	④	18	⑤	19	⑤	20	④
21	①	22	5	23	15	24	24	25	576
26	14	27	21	28	25	29	16	30	32

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$8^3 \times 4^{-2} = 2^9 \times 2^{-4} = 2^5 = 32$

2 ~ 3. '가'형과 같음.

4. [출제의도] 지수방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

양변의 지수를 비교하면

$x^2-3=2x$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=-1$

따라서 모든 근의 합은 2이다.

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2-2x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 2이다.

5. '가'형과 같음.

6. [출제의도] 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$ABA^{-1}=B$에서 $AB=BA$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1+2x & 1+2y \\ 2+3x & 2+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ x+2y & 2x+3y \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의해

$1+2x=3,\ 1+2y=5,$

$2+3x=x+2y,\ 2+3y=2x+3y$

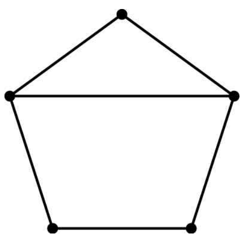
$\therefore\ x=1,\ y=2$

$\therefore\ xy=2$

7. '가'형과 같음.

8. [출제의도] 주어진 행렬이 나타내는 그래프를 찾을 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 행렬이 나타내는 그래프를 그리면 다음과 같다.



9. [출제의도] 역행렬을 이용하여 연립일차방정식의 해를 판별할 수 있는가를 묻는 문제이다.

연립방정식의 해가 존재하지 않으려면 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$2\times4-(k-1)(k-3)=0$

$k^2-4k-5=0$

$(k-5)(k+1)=0$

$k=5$ 또는 $k=-1$

(i) $k=5$일 때,

$\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로 해가 무수히 많다.

(ii) $k=-1$일 때,

$\frac{2}{-2}=\frac{-4}{4}\neq\frac{1}{2}$이므로 해가 없다.

따라서 해가 존재하지 않도록 하는 상수 k의 값은 -1이다.

10. [출제의도] 행렬을 이용하여 거리에 관한 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $L(A)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$L(B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\therefore\ L(A)=L(B)$ (참)

ㄴ. $L(2A)=\sqrt{(2x_2-2x_1)^2+(2y_2-2y_1)^2}$

$=2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= 2L(A)$ (참)

ㄷ. $A+B = 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로

$L(A+B) = 2|x_2 - x_1|$

$\therefore \frac{1}{2}L(A+B) = |x_2 - x_1|$

$\leq \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

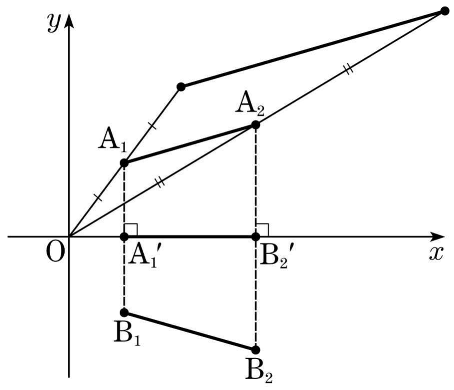
$= L(A) = L(B)$

$\therefore L(A+B) \leq L(A) + L(B)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

$A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $B_1(x_1, -y_1)$, $B_2(x_2, -y_2)$ 라 하자.



ㄱ. $L(A) = \overline{A_1A_2}$, $L(B) = \overline{B_1B_2}$

그런데 두 선분 A_1A_2, B_1B_2는 x축에 대하여 서로 대칭이므로 그 길이가 같다.

$\therefore L(A) = L(B)$ (참)

ㄴ. $L(2A)$는 선분 A_1A_2를 원점을 닮음의 중심으로 하여 2배만큼 확대한 선분의 길이와 같으므로

$L(2A) = 2L(A)$ (참)

ㄷ. $A+B = 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$L(A+B) = 2|x_2 - x_1|$

이때, $\frac{1}{2}L(A+B) = |x_2 - x_1|$은 선분 A_1A_2의 양 끝점에서 x축에 각각 내린 두 수선의 발 A_1', A_2'을 양 끝점으로 하는 선분 $A_1'A_2'$의 길이와 같다.

$\overline{A_1'A_2'} \leq \overline{A_1A_2}$ 이므로

$\frac{1}{2}L(A+B) \leq L(A)$

$\therefore L(A+B) \leq L(A) + L(B)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11. '가'형과 같음.

12. [출제의도] 행렬의 곱셈과 역행렬의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$AB = AA^2 = A^3$, $BA = A^2A = A^3$에서

$AB = BA$

$A^2B^2 = AABB = ABAB = (AB)^2$

같은 방법으로

$A^3B^3 = (AB)^3$, $A^4B^4 = (AB)^4$, $A^5B^5 = (AB)^5$

한편, $A^2B^2 = B(-A)$에서

$(AB)^2 = -AB$

이때, A, B의 역행렬이 모두 존재하므로 $(AB)^{-1}$을 양변에 곱하면

$AB = -E$

$\therefore AB + A^2B^2 + A^3B^3 + A^4B^4 + A^5B^5$

$= AB + (AB)^2 + (AB)^3 + (AB)^4 + (AB)^5$

$= -E + E - E + E - E$

$= -E$

[다른 풀이]

(나)에서 $A^4 = B^2 = -A$이므로

$A^4 + A = O$

$\therefore A(A^3 + E) = O$

(가)에서 A의 역행렬이 존재하므로 양변에 A^{-1}을 곱하면 $A^3 + E = O$ 즉, $A^3 = -E$이다.

$\therefore A^{-1} = -A^2 = -B$

$\therefore AB = -E$

13 ~ 14. '가'형과 같음.

15. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OD} : \overline{BA} = 1 : 3$에서

$\overline{OD} : \overline{OH} = 1 : 4$

이때, $\overline{OH} = 2$이므로

$\overline{OD} = \frac{1}{2}$

따라서 점 D의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이므로 $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$이다.

점 B는 지수함수 $y = a^x$의 그래프 위의 점이므로

$a^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore\ a=4$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AC}}=4^2-2=14$

16. [출제의도] 행렬을 이용하여 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A+B=E,\ AB=E$ 에서

$A(E-A)=E$

$A^2-A+E=O$ ……㉠

양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O,\ A^3=-E,\ A^6=E$이므로

$A^{2012}=A^{6\times 335+2}$

$=(A^6)^{335}A^2=A^2$

한편, ㉠에서

$A^2=A-E$

같은 방법으로

$B^{2012}=B^2=B-E$

$\therefore\ A^{2012}+B^{2012}=A^2+B^2=A-E+B-E$

$=A+B-2E=E-2E=-E$

[다른 풀이]

위에서 $A^{2012}=A^2,\ B^{2012}=B^2$

$AB=E$에서 $BA=E$ 이므로 $AB=BA$

$A^{2012}+B^{2012}=A^2+B^2$

$=(A+B)^2-2AB$

$=E-2E=-E$

17. [출제의도] 그래프를 나타내는 행렬을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그래프 G를 나타내는 행렬의 성질에서

$a=b,\ c=d$ …… ㉠

행렬의 모든 성분의 합은 변의 개수의 2배와 같으므로 조건 (가)에서

$a+b+c+d+12=14$ …… ㉡

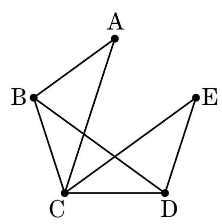
㉠, ㉡에서 $2(a+c)=2$이므로

$a+c=1$

그런데 a, c는 0 또는 1의 값을 가지므로 $a=1,\ c=0$ 또는 $a=0,\ c=1$이다.

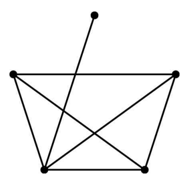
(i) $a=1,\ c=0$일 때,

다음과 같이 꼭짓점과 변을 정하면 모든 변을 빠짐없이 지나는 경로 BCABDCED가 존재한다.



(ii) $a=0,\ c=1$일 때,

주어진 행렬이 나타내는 그래프는 조건 (나)를 만족하지 않는다.



따라서 $a=b=1,\ c=d=0$이므로

$8a+4b+2c+d=12$

[참고]

그래프에서 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 홀수인 꼭짓점의 개수가 0 또는 2이면 모든 변을 빠짐없이 지나는 경로가 존재한다.

(i) $a=1,\ c=0$일 때,

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 2, 3, 4, 3, 2이므로 (나)를 만족한다.

(ii) $a=0,\ c=1$일 때,

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 1, 3, 4, 3, 3이므로 (나)를 만족하지 않는다.

18 ~ 19. '가'형과 같음.

20. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^x\cdot 4^y=2^{x+2y}$ 이므로 $x+2y$가 최소일 때 $2^x\cdot 4^y$은 최솟값을 갖는다.

$\sqrt{x}+\sqrt{2y}=4$에서 $\sqrt{2y}=4-\sqrt{x}$ ……㉠

양변을 제곱하면 $2y=16-8\sqrt{x}+x$이므로

$x+2y=x+16-8\sqrt{x}+x$

$=2(\sqrt{x})^2-8\sqrt{x}+16$

$=2(\sqrt{x}-2)^2+8$

㉠에서 $4-\sqrt{x}>0$ 이므로 $0<\sqrt{x}<4$

따라서 $x+2y$는 $\sqrt{x}=2$일 때 최솟값 8을 가지므로 $2^x\cdot 4^y$의 최솟값은 $2^8=256$이다.

[다른 풀이]

코시-슈바르츠 부등식에서

$(x+2y)(1^2+1^2)\ge(\sqrt{x}+\sqrt{2y})^2$

$2(x+2y)\ge 4^2,\ x+2y\ge 8$

따라서 $2^x \cdot 4^y$의 최솟값은 $2^8 = 256$이다.

[다른 풀이]

$x > 0$, $y > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서

$x + 2y \geq 2\sqrt{x \cdot 2y}$ …… ㉠

(단, 등호는 $x = 2y$일 때 성립)

한편 $\sqrt{x} + \sqrt{2y} = 4$에서 $x = 2y$이면

$\sqrt{x} = \sqrt{2y} = 2$

$\therefore$ ㉠에서 $x + 2y \geq 2\sqrt{x \cdot 2y} = 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{2y} = 8$

따라서 $2^x \cdot 4^y$의 최솟값은 $2^8 = 256$이다.

21 ~ 23. '가'형과 같음.

24. [출제의도] 행렬을 이용하여 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = (A^2)^2$

$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4E$

이므로

$A^6 = A^4A^2 = -4A^2$,

$A^8 = (A^4)^2 = 16E$,

$A^{10} = A^8A^2 = 16A^2$

$\therefore A^2 + A^4 + A^6 + A^8 + A^{10}$

$= A^2 - 4E - 4A^2 + 16E + 16A^2$

$= 13A^2 + 12E$

그런데 A^2의 모든 성분의 합은 0이고 $12E$의 모든 성분의 합은 24이므로 주어진 행렬의 성분의 합은 $0 + 24 = 24$이다.

25. [출제의도] 행렬의 정의를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(i) $i = 1$, $j = 1$일 때, $f(x) = \sin\pi x$

$f(x)$의 최댓값은 1이므로

$a_{11} = 1$

(ii) $i = 1$, $j = 2$일 때, $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$

$f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$이므로

$a_{12} = 4$

(iii) $i = 1$, $j = 3$일 때, $f(x) = \sin\frac{\pi}{3}x$

$f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$이므로

$a_{13} = 6$

(iv) $i = 2$, $j = 1$일 때, $f(x) = 2\sin\pi x$

$f(x)$의 최댓값은 2이므로

$a_{21} = 2$

(v) $i = 2$, $j = 2$일 때, $f(x) = 2\sin\frac{\pi}{2}x$

$f(x)$의 최댓값은 2이므로

$a_{22} = 2$

(vi) $i = 2$, $j = 3$일 때, $f(x) = 2\sin\frac{\pi}{3}x$

$f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$이므로

$a_{23} = 6$

따라서 모든 성분의 곱은 576이다.

26. '가'형과 같음.

27. [출제의도] 지수 법칙을 이용하여 지수방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^{x+y} + 2^x + 2^y = 1160$

$\Leftrightarrow 2^y(2^x + 2^{x-y} + 1) = 2^3 \cdot 5 \cdot 29$

$\Leftrightarrow 2^{y-3}(2^x + 2^{x-y} + 1) = 145$

따라서 $2^{y-3} = 1$, $2^x + 2^{x-y} + 1 = 145$이어야 한다.

$2^{y-3} = 1$에서 $y - 3 = 0$이므로

$y = 3$

이때, $2^x + 2^{x-3} + 1 = 145$에서

$2^x = 2^7$이므로

$x = 7$

$\therefore \alpha\beta = 3 \times 7 = 21$

[다른 풀이]

$2^{x+y} + 2^x + 2^y = 1160$에서

$2^x2^y + 2^x + 2^y + 1 = 1161$이므로

$(2^x + 1)(2^y + 1) = 1161$

이때, $1161 = 3^3 \cdot 43$이고 $2^x + 1$, $2^y + 1$은 모두 3 이상인 홀수이다.

(ⅰ) $2^x+1=3^2\cdot 43$, $2^y+1=3$일 때,

$2^x=386$인 자연수 x가 존재하지 않는다.

(ⅱ) $2^x+1=3\cdot 43$, $2^y+1=3^2$일 때,

$2^x=128$에서 $x=7$

$2^y=8$에서 $y=3$

(ⅲ) $2^x+1=43$, $2^y+1=3^3$일 때,

자연수 x, y가 존재하지 않는다.

$\therefore\ \alpha\beta=3\times 7=21$

28 ~ 29. '가'형과 같음.

30. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

가로의 길이가 25π, 두께가 0.5이므로

$25\pi \geq \dfrac{0.5\pi}{6}(2^n+4)(2^n-1)$

$(2^n+4)(2^n-1) \leq 300$

$2^{2n}+3\cdot 2^n-304 \leq 0$

$2^n=t\ \ (t>0)$라 하면

$t^2+3t-304 \leq 0$

$(t-16)(t+19) \leq 0$

$\therefore\ 0<t \leq 16$

이때, $2^n \leq 16$에서 $n \leq 4$이므로 $a=4$이다.

종이의 두께는 한 번 접을 때마다 2배씩 늘어나므로 4번 접었을 때 접은 종이의 총 두께는

$b=0.5\times 2^4=8$

$\therefore\ ab=32$