2011학년도 6월 고2 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시 수리 영역

'나'형 | 성명 | 수험 번호 2

- 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $8^3 \times 4^{-2}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

2. $\left(8^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $AB - BA$ 는? [2점]

① $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$

4. 지수방정식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ 의 모든 근의 합은? [3점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

수리 영역

5. 두 행렬 A, B에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ A-2B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

6. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ x & y\end{pmatrix}$에 대하여 $ABA^{-1}=B$가 성립할 때, xy의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=E$, $AB=O$일 때, 다음 중 $A+E$의 역행렬은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}B$ ② $B-E$ ③ $B+E$

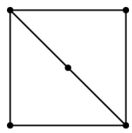
④ $\frac{1}{2}(B-E)$ ⑤ $\frac{1}{2}(B+E)$

8. 그래프를 나타내는 행렬이

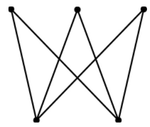
$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

일 때, 이 그래프로 가능한 것은? [3점]

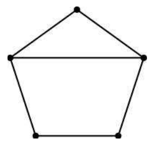
①



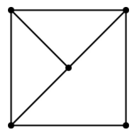
②



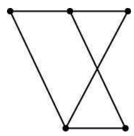
③



④



⑤



9. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix}2 & k-3\\ k-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

의 해가 존재하지 않도록 하는 상수 k의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

10. 행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 성분을 이용하여 좌표평면 위에 두 점 $(a,\ c)$, $(b,\ d)$를 정하고 이 두 점 사이의 거리를 $L(X)$라 하자.
두 행렬 $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -y_1 & -y_2 \end{pmatrix}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $L(A)=L(B)$
ㄴ. $L(2A)=2L(A)$
ㄷ. $L(A+B)=L(A)+L(B)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. n이 자연수일 때, x에 대한 방정식 $x^n=n-12$의 실근의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(5)+f(10)+f(15)+f(20)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A, B의 역행렬이 모두 존재한다.
(나) $A^2=B$, $B^2=-A$

이때, $AB+A^2B^2+A^3B^3+A^4B^4+A^5B^5$과 같은 행렬은? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.) [4점]

① $-2E$ ② $-E$ ③ O ④ E ⑤ $2E$

13. 올림픽에 참가한 어느 나라가 딴 금메달, 은메달, 동메달의 수를 각각 a, b, c라 할 때 $3a+2b+c$의 값을 그 나라의 메달 가치라 하자. 어떤 연구에 의하면 인구가 P만 명이고 국내총생산액이 G억 달러인 나라의 메달 가치 S는 부등식

$$S \le 0.215\left(\frac{P}{100}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{G}{10}\right)^{\frac{2}{3}} \cdots\cdots (*)$$

을 만족시킨다고 한다.
어느 해 올림픽에 참가한 A나라의 인구가 6400만 명이고, 국내총생산액이 5120억 달러라 하자. 부등식 $(*)$이 항상 성립한다고 할 때, A나라의 메달 가치의 최댓값은? [3점]

① 51 ② 53 ③ 55 ④ 57 ⑤ 59

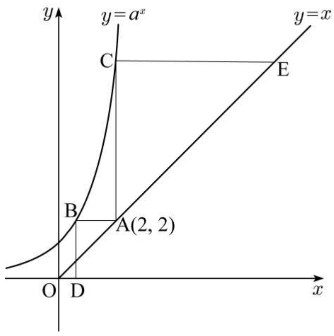
14. 다음은 행렬 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$와 역행렬을 갖지 않는 이차정사각행렬 A에 대하여 $X^n=A$를 만족시키는 자연수 n이 존재하면 등식 $X^2=(x+w)X$가 성립함을 증명한 것이다.

> <증명>
> 행렬 X가 역행렬을 갖는다고 가정하자.
> 등식 $X^n=A$의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 을 곱하면
> $$E=\boxed{\text{(가)}}\,A$$
> 가 되어 A는 역행렬을 갖게 되므로 가정에 모순이다.
> $$\therefore\ xw-yz=\boxed{\text{(나)}}$$
> 따라서
> $$\begin{aligned} X^2-(x+w)X &= X\{X-(x+w)E\} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\boxed{\text{(다)}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
> 이므로 $X^2=(x+w)X$가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$(X^{-1})^n$	0	$\begin{pmatrix} -w & y \\ z & -x \end{pmatrix}$
②	$(X^{-1})^n$	1	$\begin{pmatrix} -x & y \\ z & -w \end{pmatrix}$
③	$(X^{-1})^n$	0	$\begin{pmatrix} -x & y \\ z & -w \end{pmatrix}$
④	$(A^{-1})^n$	1	$\begin{pmatrix} -w & y \\ z & -x \end{pmatrix}$
⑤	$(A^{-1})^n$	0	$\begin{pmatrix} -x & y \\ z & -w \end{pmatrix}$

15. 그림과 같이 좌표평면 위의 점 A(2, 2)를 지나고 x축에 평행한 직선이 지수함수 $y=a^x\ (a>1)$의 그래프와 만나는 점을 B, 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 지수함수 $y=a^x\ (a>1)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 또, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하고, 점 C를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 E라 하자. $\overline{\mathrm{OD}}:\overline{\mathrm{BA}}=1:3$일 때, 선분 CE의 길이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

16. 두 이차정사각행렬 A, B가 $A+B=E$, $AB=E$를 만족시킬 때, $A^{2012}+B^{2012}$과 같은 행렬은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

① $-2E$　② $-E$　③ E　④ $2E$　⑤ $3E$

17. 그래프 G가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 변의 개수는 7이다.
> (나) 모든 변을 빠짐없이 지나는 경로가 존재한다.

그래프 G를 나타내는 행렬이

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & d & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

일 때, $8a+4b+2c+d$의 값은? [4점]

① 3　② 5　③ 10　④ 12　⑤ 15

18. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+5y \\ -3x+3y \end{pmatrix}$$

가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 실수 a, b의 값을 정할 때, a^2+b^2의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① 36　② 40　③ 44　④ 48　⑤ 52

19. 세 이차정사각행렬 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $AB=BC$
> (나) B의 역행렬이 존재한다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

> ㄱ. $A=E$이면 $C=E$이다.
> ㄴ. A의 역행렬이 존재하면 C의 역행렬도 존재한다.
> ㄷ. $A^7B=BC^7$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 양의 실수 x, y가 $\sqrt{x}+\sqrt{2y}=4$를 만족시킬 때, $2^x \cdot 4^y$의 최솟값은? [4점]

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

21. 두 함수

$$f(x)=-x^2+2x+1,\ g(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$$

이 있다. $-1\leq x\leq 2$에서 두 함수 $f(g(x))$, $g(f(x))$의 최댓값이 같아지도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

단답형

22. 지수부등식 $4^x-3\cdot 2^{x+2}+32\leq 0$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

23. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}$에 대하여 $XA=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

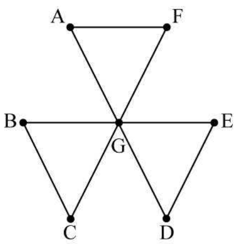
24. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^2+A^4+A^6+A^8+A^{10}$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

25. 2×3 행렬 A의 $(i,\ j)$성분 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3)$를 다음과 같이 정의하자.

함수 $f(x)=i\sin\dfrac{\pi}{j}x$에 대하여 $$a_{ij}=\begin{cases}(f(x)\text{의 최댓값}) & (i\ge j)\\ (f(x)\text{의 주기}) & (i<j)\end{cases}$$

행렬 A의 모든 성분의 곱을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같은 그래프가 있다. 이 그래프의 꼭짓점 A에서 꼭짓점 F로 가는 모든 경로의 수를 구하시오. [4점]



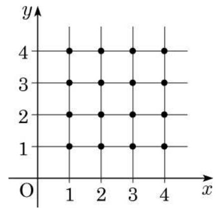
27. 등식

$$2^{x+y}+2^x+2^y=1160$$

을 만족시키는 자연수 x, y의 값을 각각 α, β $(\alpha\ge\beta)$라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [4점]

28. 모든 실수 x에 대하여 지수부등식 $5^{2x}\ge k\cdot 5^x-2k-5$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $\alpha\le k\le\beta$이다. $|\alpha\beta|$의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림은 좌표평면에 직선 $x=m\,(m=1,2,3,4)$과 직선 $y=n$ $(n=1,2,3,4)$의 교점을 나타낸 것이다.



16개의 교점 중 서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 차례로 택하여 두 점의 x, y좌표를 성분으로 하는 행렬 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$를 만든다.

예를 들어 차례로 택한 두 점의 좌표가 각각 $(1,\ 3)$, $(2,\ 4)$이면 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$가 만들어지고, 차례로 택한 두 점의 좌표가 각각 $(2,\ 4)$, $(1,\ 3)$이면 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$이 만들어진다.

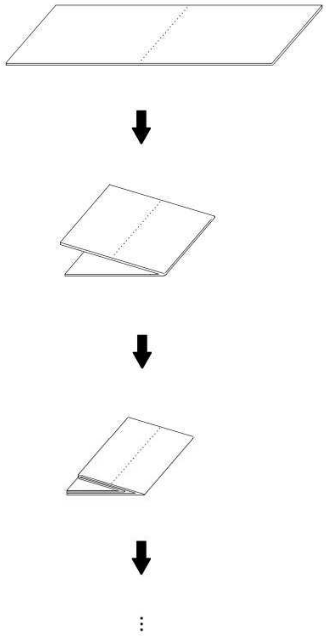
이와 같이 위의 16개의 교점 중 서로 다른 두 점을 차례로 택하여 만든 행렬 중에서 역행렬을 갖지 않는 것의 개수를 구하시오. [4점]

30. 가로의 길이가 $L\,(\text{mm})$, 두께가 $t\,(\text{mm})$인 직사각형 모양의 종이를 가로 방향으로 반씩 접을 수 있는 최대 횟수를 n이라 할 때, 부등식

$$L \geq \frac{\pi t}{6}(2^n+4)(2^n-1)$$

이 성립한다고 한다.

가로의 길이가 $25\pi\,(\text{mm})$이고 두께가 $0.5\,(\text{mm})$인 직사각형 모양의 종이를 가로 방향으로 반씩 접으려 한다. 이때, 접을 수 있는 최대 횟수를 a, 최대한 많이 접은 종이의 총 두께를 $b\,(\text{mm})$라 하자. ab의 값을 구하시오. (단, 접은 종이의 총 두께는 종이의 두께만 고려한다.) [4점]



※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.