• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	④	*2*	①	*3*	④	*4*	②	*5*	②
6	②	*7*	⑤	*8*	③	*9*	⑤	*10*	④
11	④	*12*	③	*13*	③	*14*	①	*15*	④
16	②	*17*	①	*18*	⑤	*19*	⑤	*20*	⑤
21	①	*22*	5	*23*	15	*24*	27	*25*	67
26	14	*27*	22	*28*	25	*29*	16	*30*	214

해 설

1. [출제의도] 로그를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{2}$

$= \log_3 \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$= \log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$

2. [출제의도] 지수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(8^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2$

$= (\sqrt{2})^2$

$= 2$

3. [출제의도] 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$에서

$AB - BA$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$

4. [출제의도] 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

첫째항이 $-\dfrac{2}{3}$이고 공차가 $\dfrac{2}{9}$인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$a_n = -\dfrac{2}{3} + (n-1)\dfrac{2}{9}$

$= \dfrac{2}{9}(n-4)$

이때, a_n이 자연수가 되려면 $n-4$는 9의 배수이어야 한다.

따라서 $\{a_n\}$에서 처음으로 자연수가 되는 항은 제13항이다.

$\therefore\ m = 13$

5. [출제의도] 행렬의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A - 2B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠ − ㉡에서

$3B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

㉠에서

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - B$이므로

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$

따라서 $A - B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$에서 모든 성분의 합은 6이다.

[다른 풀이]

㉠ + ㉡ × 2에서

$3A - 3B = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$

이므로 $A - B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$에서 모든 성분의 합은 6이다.

6. [출제의도] 합의 기호의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\left\{\frac{k(k+1)}{10} + \frac{10}{k(k+1)}\right\}$

$\displaystyle= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}(k^2+k) + 10\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}k^2 + \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}k$

$\displaystyle\quad + 10\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{10} \times \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{9 \cdot 10}{2} + 10\left(1 - \dfrac{1}{10}\right)$

$= \dfrac{57}{2} + \dfrac{9}{2} + 9$

$= 42$

7. [출제의도] 행렬의 성질을 이해하여 역행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A + B = E$에서 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A^2 + AB = A$이고 $AB = O$을 대입하면

$A^2 - A = O$

$(A+E)(A-2E) = -2E$ 에서

$(A+E)^{-1} = -\dfrac{1}{2}(A - 2E)$

$= -\dfrac{1}{2}(E - B - 2E)$

$= \dfrac{1}{2}(B + E)$

[다른 풀이]

$A + B = E$, $AB = O$에서 두 식을 더하면

$A + B + AB = E$

$(A+E)(B+E) = 2E$

$\dfrac{1}{2}(A+E)(B+E) = E$

따라서 $A + E$의 역행렬은 $\dfrac{1}{2}(B+E)$이다.

8. [출제의도] 등차중항의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$

이때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10$이므로

$5a_3 = 10$

$\therefore\ a_3 = 2$ (참)

ㄴ. $a_1 + a_5 = 2a_3 = 4$ (참)

ㄷ. $a_3 + a_5 = 2a_4$이고,

$a_2 + a_4 = 2a_3$이므로

$2a_2 + a_3 + a_5 = 2a_2 + 2a_4$

$= 2(a_2 + a_4)$

$= 2 \times 2a_3$

$= 4a_3 = 8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$a_1 = a_3 - 2d$

$a_2 = a_3 - d$

$a_4 = a_3 + d$

$a_5 = a_3 + 2d$

ㄱ. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$= (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d)$

$= 5a_3 = 10$

$\therefore\ a_3 = 2$ (참)

ㄴ. $a_1 + a_5 = (a_3 - 2d) + (a_3 + 2d)$

$= 2a_3 = 4$ (참)

ㄷ. $2a_2 + a_3 + a_5 = 2(a_3 - d) + a_3 + (a_3 + 2d)$

$= 4a_3 = 8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 대소 관계를 알 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A = 5^{\log_5 3} = 3$

$= \log_5 125$

$B = \log_2 4 + \log_5 3$

$= 2 + \log_5 3 = \log_5 75$

$C = \dfrac{\log_3 30}{\log_3 5} = \log_5 30$

$\log_5 30 < \log_5 75 < \log_5 125$이므로

$C < B < A$

[다른 풀이]

$A = 5^{\log_5 3} = 3$

$B = \log_2 4 + \log_5 3$

$= 2 + \log_5 3$

에서 $\log_5 \sqrt{5} < \log_5 3 < \log_5 5$이므로

$\dfrac{1}{2} < \log_5 3 < 1$

$\therefore\ \dfrac{5}{2} < B < 3$

$C = \dfrac{\log_3 30}{\log_3 5} = \log_5 30$에서

$\log_5 25 < \log_5 30 < \log_5 25\sqrt{5}$이므로

$2 < \log_5 30 < \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ 2 < C < \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ C < B < A$

10. [출제의도] 수열을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

홀수인 자연수 1, 3, 5, 7, … 으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$a_n = 2n - 1$

$a_n = 2n - 1 = 101$에서 $n = 51$이므로 101은 51번째 항이다.

또, 각 행의 항의 수는 1, 2, 3, … 이므로 제n행까지의 모든 항의 개수는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$이다.

$\dfrac{n(n+1)}{2} \le 51$을 만족하는 자연수 n의 최댓값은 9이고 제9행까지의 항의 개수는 45개이다.

따라서 101은 제10행과 제6열이 만나는 위치에 있다.

$\therefore\ p + q = 10 + 6 = 16$

[다른 풀이]

각 행의 제1열의 수 1, 3, 7, 13, … 으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$의 계차수열은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이므로

$\displaystyle a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}2k = 1 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2}$

$= n^2 - n + 1$

$n = 10$일 때, $n^2 - n + 1 = 91$이므로 제10행의 첫 번째 항 a_{10}은 91이다.

이때, $101 = 91 + 2 \times 5$이므로 101은 제10행과 제6열이 만나는 위치에 있다.

$\therefore\ p + q = 10 + 6 = 16$

11. **[출제의도] 거듭제곱근을 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

(ⅰ) $x^5=-7$의 실근은 $\sqrt[5]{-7}$이므로
$f(5)=1$

(ⅱ) $x^{10}=-2$의 실근은 존재하지 않으므로
$f(10)=0$

(ⅲ) $x^{15}=3$의 실근은 $\sqrt[15]{3}$이므로
$f(15)=1$

(ⅳ) $x^{20}=8$의 실근은 $\pm\sqrt[20]{8}$이므로
$f(20)=2$

$\therefore\ f(5)+f(10)+f(15)+f(20)=4$

12. **[출제의도] 등비수열을 이용하여 도형의 길이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

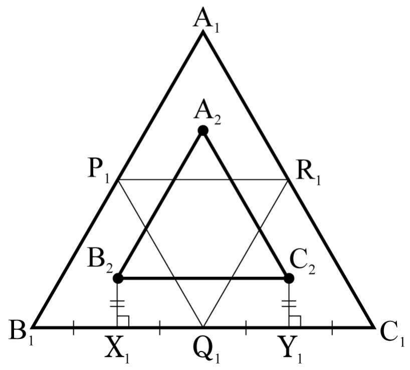
$l_1=3$이다.

두 점 B_2, C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 X_1, Y_1이라 하자. 삼각형 $B_1Q_1P_1$과 삼각형 $C_1R_1Q_1$은 합동인 정삼각형이고 점 B_2는 삼각형 $B_1Q_1P_1$의 무게중심, 점 C_2는 삼각형 $C_1R_1Q_1$의 무게중심, 점 Q_1은 선분 B_1C_1의 중점이므로

$\overline{B_1X_1}=\overline{X_1Q_1}=\overline{Q_1Y_1}=\overline{Y_1C_1}$

$\overline{B_2X_1}=\overline{C_2Y_1}$

$\therefore\ \overline{B_2C_2}=\overline{X_1Y_1}=\frac{1}{2}\overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}$



같은 방법으로 두 선분 A_2B_2, C_2A_2의 길이를 각각 구하면

$\overline{A_2B_2}=\overline{C_2A_2}=\frac{1}{2}$

따라서 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정삼각형이다.

$\therefore\ l_2=\frac{3}{2}$

이와 같은 과정을 계속하면 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 둘레의 길이는 삼각형 $A_nB_nC_n$의 둘레의 길이의 $\frac{1}{2}$이므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{8} l_n=\frac{3\left(1-\frac{1}{2^8}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{765}{128}$

13. **[출제의도] 지수의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$P=6400$, $G=5120$이므로

$S\le 0.215\left(\frac{6400}{100}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5120}{10}\right)^{\frac{2}{3}}$

$=0.215(2^6)^{\frac{1}{3}}(2^9)^{\frac{2}{3}}$

$=0.215\times 2^2\times 2^6$

$=55.04$

따라서 메달 가치의 최댓값은 55이다.

14. **[출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

(가) : 등식 $X^n=A$에서 좌변을 E로 만들려면 양변에 $(X^{-1})^n$을 곱해야 한다.

(나) : 행렬 X가 역행렬을 갖는다고 가정하면 모순이 되므로 행렬 X는 역행렬을 갖지 않는다.
$\therefore\ xw-yz=0$

(다) : $X-(x+w)E=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}-(x+w)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-w&y\\z&-x\end{pmatrix}$

15. **[출제의도] 로그함수의 그래프를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

함수 $y=\log_a(x+b)$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동 시킨 것이다.

함수 $y=\log_a x$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소하므로 $0<a<1$이다.

점 $(1,\ 0)$을 지나는 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동 시켰을 때 $x<0$인 부분에서 x축과 만나므로 $-b<-1$이다.

$\therefore\ b>1$

함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프는 함수 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a\ (-1<a<0)$만큼 평행이동 시킨 것이므로 함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프는 ④이다.

16. **[출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하여 점의 좌표를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\overline{AB}=\log_4 a-\log_{\frac{1}{2}} a$

$=\frac{1}{2}\log_2 a+\log_2 a$

$=\frac{3}{2}\log_2 a=3$

이므로 $\log_2 a=2$에서

$a=4$

이때, 점 B의 좌표는 $(4,\ -2)$이므로 점 C의 y좌표는 -2이다.

점 C의 x좌표를 p라 하면

$-2=\log_4 p$

이므로

$p=4^{-2}=\frac{1}{16}$

17. **[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. n이 증가할수록 $\log n$의 값은 증가하므로
$\log n=f(n)+g(n)$은 $n=1$일 때 최솟값을 갖는다.
따라서 $f(n)+g(n)$의 최솟값은
$\log 1=0$ (참)

ㄴ. $f(m)=f(n)=2$이면 m, n은 세 자리의 자연수이므로 $|m-n|$의 최댓값은
$|999-100|=899$ (거짓)

ㄷ. $g(n)=\log 7$을 만족시키는 자연수 n의 값은
$7,\ 70,\ 700,\ 7000,\ \cdots$
따라서 $m\ne n$이고 $g(m)=g(n)=\log 7$일 때, $|m-n|$의 최솟값은
$|70-7|=63$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

18. **[출제의도] 행렬과 연립방정식의 해를 이용하여 최대, 최소를 구하는 문제이다.**

$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a-3&b-5\\-b+3&a-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 $\begin{pmatrix}a-3&b-5\\-b+3&a-3\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

즉 $(a-3)^2+(b-5)(b-3)=0$이므로

$(a-3)^2+(b-4)^2=1$

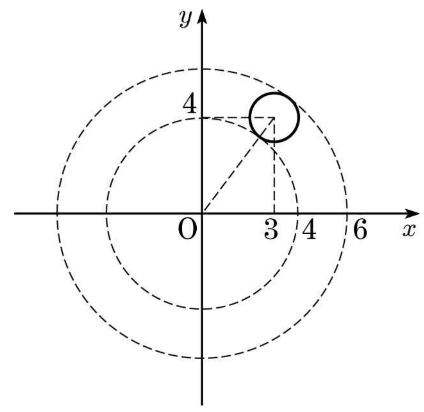
점 $P(a,\ b)$를 중심의 좌표가 $(3,\ 4)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이라 하자.

이때, $a^2+b^2=\overline{OP}^2$이고 원점과 점 $(3,\ 4)$ 사이의 거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$5-1\le\overline{OP}\le 5+1$

$4^2\le\overline{OP}^2\le 6^2$

$\therefore\ M+m=36+16=52$



19. **[출제의도] 행렬의 곱셈과 역행렬에 대한 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $A=E$이면 (가)에서 $B=BC$
행렬 B의 역행렬이 존재하므로
$B^{-1}B=B^{-1}BC$
$\therefore\ C=B^{-1}B=E$ (참)

ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면
$AB=BC$에서 $C=B^{-1}AB$
이때, $C^{-1}=(B^{-1}AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}B$이므로
행렬 C의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. (가), (나)에서 $A=BCB^{-1}$이므로
$A^7=(BCB^{-1})^7$
$=(BCB^{-1})(BCB^{-1})\cdots(BCB^{-1})$
$=BC^7B^{-1}$
$\therefore\ A^7B=BC^7$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. $A^7B=AA\cdots AAB$
$=AA\cdots ABC$
$=AA\cdots BCC$
$\vdots$
$=BC\cdots CCC$
$=BC^7$

20. **[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

두 물체 A, B를 통과하여 나오는 X선의 세기를 각각 I_A, I_B라 하면

$3=\frac{2.3}{2.3}(\log I_0-\log I_A)$

$4.6=\frac{2.3}{2.5}(\log I_0-\log I_B)$

$\therefore\ \log I_A=\log I_0-3,\ \log I_B=\log I_0-5$

따라서

$\log I_A-\log I_B=(\log I_0-3)-(\log I_0-5)$
$=2$

이므로

$\log\frac{I_A}{I_B}=2$

$\frac{I_A}{I_B}=10^2=100$

$\therefore\ I_A=100I_B$

따라서 물체 A를 통과하여 나오는 X선의 세기는 물체 B를 통과하여 나오는 X선의 세기의 100배이다.

$\therefore\ k=100$

21. **[출제의도] 지수함수와 이차함수를 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$f(g(x))=f(a^x)$
$=-a^{2x}+2a^x+1$
$=-(a^x-1)^2+2\ \ (-1\le x\le 2)$

$g(f(x))=a^{f(x)}$
$=a^{-x^2+2x+1}$
$=a^{-(x-1)^2+2}\ \ (-1\le x\le 2)$

(ⅰ) $a>1$일 때,
$a^x=t\ \ (t>0)$라 하면
$f(g(x))=-(t-1)^2+2\ \ \left(\frac{1}{a}\le t\le a^2\right)$
이때, $0<\frac{1}{a}<1$이고 $a^2>1$이므로 $f(g(x))$의 최댓값은 2이다.
함수 $g(f(x))=a^{f(x)}$은 $f(x)$가 최대일 때 최댓값

을 갖는다.
따라서 $x=1$일 때 최댓값 a^2을 가지므로
$a^2=2$
$\therefore\ a=\sqrt{2}\ \ (\because\ a>1)$

(ⅱ) $0<a<1$일 때,
$a^x=t\ \ (t>0)$라 하면
$f(g(x))=-(t-1)^2+2\ \ \left(a^2\le t\le \frac{1}{a}\right)$
이때, $0<a^2<1$이고 $\frac{1}{a}>1$이므로 $f(g(x))$의 최댓값은 2이다.
함수 $g(f(x))=a^{f(x)}$은 $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 $x=-1$일 때 최댓값 a^{-2}을 가지므로
$a^{-2}=2$
$\therefore\ a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ (\because\ 0<a<1)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 a값의 합은
$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

22. [출제의도] 지수부등식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$4^x-3\cdot 2^{x+2}+32\le 0$
$\Leftrightarrow\ (2^x)^2-12\cdot 2^x+32\le 0$
$\Leftrightarrow\ (2^x-4)(2^x-8)\le 0$
$\Leftrightarrow\ 4\le 2^x\le 8$
$\therefore\ 2\le x\le 3$
따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은 5이다.

23. [출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A의 역행렬 A^{-1}가 존재하므로
$XA=B$에서 $X=BA^{-1}$이다.
$X=5\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$
$=\frac{5}{2}\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 18 & -8\end{pmatrix}$
따라서 모든 성분의 합은
$\frac{5}{2}\times 6=15$

24. [출제의도] 로그방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(\log_3\frac{9}{x}\right)\left(\log_3\frac{x}{3}\right)+6=0$
$(2-\log_3 x)(\log_3 x-1)+6=0$
$\log_3 x=t$로 치환하면
$(2-t)(t-1)+6=0$
$t^2-3t-4=0$
$\therefore\ t=4$ 또는 $t=-1$
따라서 $\log_3 x=4$ 또는 $\log_3 x=-1$이므로
$x=3^4$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
$\therefore\ \alpha\beta=3^4\times\frac{1}{3}=27$

25. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}$
$=1+\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)}$
$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n$
따라서 $a_{2k-1}=1,\ a_{2k}=2\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로
$a_{2k-1}+a_{2k}=3$
이때,
$100=3\times 33+1$
$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{65}+a_{66})+a_{67}$
$=\sum_{k=1}^{67}a_k$
이므로 구하는 자연수 m의 값은 67이다.

26. [출제의도] 그래프의 경로를 이해하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(ⅰ) 변의 개수가 1인 경로 : AF
$\therefore$ 1 (개)
(ⅱ) 변의 개수가 2인 경로 : AGF
$\therefore$ 1 (개)
(ⅲ) 변의 개수가 5인 경로 :
AGBCGF
AGCBGF
AGDEGF
AGEDGF
$\therefore$ 4 (개)
(ⅳ) 변의 개수가 8인 경로 :
AGBCGDEGF
AGCBGDEGF
AGBCGEDGF
AGCBGEDGF
AGDEGBCGF
AGDEGCBGF
AGEDGBCGF
AGEDGCBGF
$\therefore$ 8 (개)
따라서 꼭짓점 A에서 꼭짓점 F로 가는 모든 경로의 수는
$1+1+4+8=14$ (개)

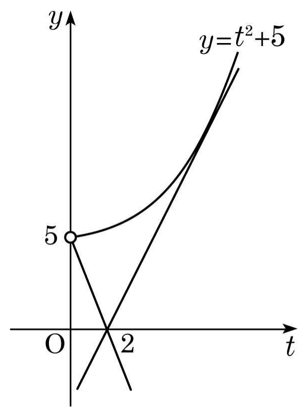
[참고]
(1) 변의 개수가 5인 경로 :
경로 AGP_1P_2GF에서 두 꼭짓점 P_1, P_2를 택하는 경우의 수는
$4\times 1=4$ (개)
(2) 변의 개수가 8인 경로 :
경로 $AGP_1P_2GP_3P_4GF$에서 네 꼭짓점 P_1, P_2, P_3, P_4를 택하는 경우의 수는
$4\times 1\times 2\times 1=8$ (개)

27. [출제의도] 수열의 합과 일반항의 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=2\cdot 3^{n-1}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.
$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=4n\cdot 3^n$이라 하면
$a_nb_n=S_n-S_{n-1}\ \ (n\ge 2)$
$=4n\cdot 3^n-4(n-1)3^{n-1}$
$=4\cdot 3^{n-1}(2n+1)$
$b_n=2(2n+1)\,(n\ge 2)$
$=4n+2$
$\therefore\ b_5=22$

28. [출제의도] 이차함수를 이용하여 지수부등식의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$5^x=t\ \ (t>0)$라 하면
$t^2-kt+2k+5\ge 0$
$t^2+5\ge k(t-2)$
$f(t)=t^2+5,\ g(t)=k(t-2)$라 하면
$t>0$인 모든 t에 대하여 $f(t)\ge g(t)$이어야 한다.

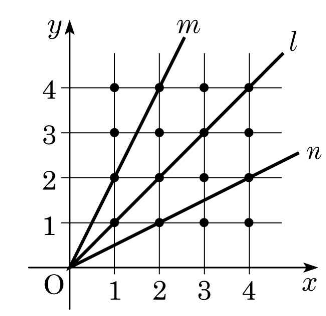


(ⅰ) $y=g(t)$의 그래프가 점 $(0,\ 5)$를 지날 때,
$5=k(0-2)$에서
$k=-\frac{5}{2}$
(ⅱ) 두 함수 $f(t)$, $g(t)$의 그래프가 접할 때,
방정식 $t^2-kt+2k+5=0$이 중근을 가지므로
판별식 $D=k^2-8k-20=0$에서
$(k-10)(k+2)=0$
$\therefore\ k=10$ 또는 $k=-2$
이때, $k>0$이므로
$k=10$
(ⅰ), (ⅱ)에서
$-\frac{5}{2}\le k\le 10$
$\therefore\ |\alpha\beta|=\left|-\frac{5}{2}\times 10\right|=25$

[다른 풀이]
지수부등식 $5^{2x}-k\cdot 5^x+2k+5\ge 0$에서
$5^x=t\ \ (t>0)$로 놓으면
$t^2-kt+2k+5\ge 0$
$f(t)=t^2-kt+2k+5$
$=\left(t-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{1}{4}k^2+2k+5\ \ (t>0)$
라 하면 꼭짓점의 t좌표는 $\frac{k}{2}$이다.
(ⅰ) $\frac{k}{2}>0$일 때,
$-\frac{1}{4}k^2+2k+5\ge 0$이어야 하므로
$k^2-8k-20\le 0$
$\therefore\ -2\le k\le 10$
그런데, $k>0$이므로
$0<k\le 10$
(ⅱ) $\frac{k}{2}\le 0$일 때,
$f(0)\ge 0$이어야 하므로
$2k+5\ge 0$
$k\ge -\frac{5}{2}$
그런데, $k\le 0$이므로
$-\frac{5}{2}\le k\le 0$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$-\frac{5}{2}\le k\le 10$
$\therefore\ |\alpha\beta|=\left|-\frac{5}{2}\times 10\right|=25$

29. [출제의도] 역행렬을 갖기 위한 조건을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 택하여 만든 행렬 $\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으려면
$x_1y_2-x_2y_1=0$이어야 한다.
이때, x_1, x_2, y_1, y_2는 모두 0이 아니므로
$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$
따라서 세 점 O, $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$가 한 직선 위에 있을 때 역행렬이 존재하지 않는다.



두 점을 택하는 순서에 따라 서로 다른 행렬이 만들어지므로
(ⅰ) 직선 l 위의 두 점을 택한 경우
${}_4P_2=12$ (개)
(ⅱ) 직선 m 위의 두 점을 택한 경우
${}_2P_2=2$ (개)
(ⅲ) 직선 n 위의 두 점을 택한 경우
${}_2P_2=2$ (개)
그러므로 역행렬을 갖지 않는 행렬의 개수는
$12+2+2=16$이다.

30. [출제의도] 수열을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{A_1A_2}=2\sqrt{2}$, $\overline{A_2A_3}=3\sqrt{2}$, $\overline{A_3A_4}=4\sqrt{2}$, $\cdots$ 이므로
점 A_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 x좌표를 x_n이라 하면 수열 $\{x_n\}$은 다음과 같다.
$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots$
$\therefore\ x_{2k-1}=k,\ x_{2k}=-k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
한편, 점 A_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 y좌표를 y_n이라 하면
$y_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

따라서 세 점 A_{19}, A_{20}, A_{21}의 좌표는

$\mathrm{A}_{19}(10, 190)$, $\mathrm{A}_{20}(-10, 210)$, $\mathrm{A}_{21}(11, 231)$

이므로 삼각형 $\mathrm{A}_{19}\mathrm{A}_{20}\mathrm{A}_{21}$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{10-10+11}{3}, \frac{190+210+231}{3}\right)$

즉, $\left(\frac{11}{3}, \frac{631}{3}\right)$이다.

$\therefore\ a+b=\frac{11}{3}+\frac{631}{3}=\frac{642}{3}=214$