제 2 교시

수리 영역

'가'형

성명		수험 번호						2				

- 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① -2 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

2. $\left(8^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AB-BA$는? [2점]

① $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$

4. 첫째항이 $-\frac{2}{3}$이고 공차가 $\frac{2}{9}$인 등차수열에서 처음으로 자연수가 되는 항은 제m항이다. m의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

5. 두 행렬 A, B에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ A-2B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

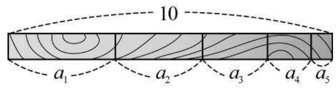
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\left\{\frac{k(k+1)}{10}+\frac{10}{k(k+1)}\right\}$의 값은? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

7. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=E$, $AB=O$일 때, 다음 중 $A+E$의 역행렬은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}B$ ② $B-E$ ③ $B+E$
④ $\frac{1}{2}(B-E)$ ⑤ $\frac{1}{2}(B+E)$

8. 길이가 10인 막대를 길이가 서로 다른 다섯 도막으로 나누어 맨 왼쪽의 도막부터 그 길이를 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라고 하자.



a_1, a_2, a_3, a_4, a_5가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $a_3=2$
ㄴ. $a_1+a_5=4$
ㄷ. $2a_2+a_3+a_5=9$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 세 수

$$A=5^{\log_5 3},\ B=\frac{1}{\log_4 2}+\frac{1}{\log_3 5},\ C=\frac{\log_3 30}{\log_3 5}$$

의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [3점]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<B<A$

10. 다음과 같이 홀수인 자연수를 제 n행에 n개씩 차례로 나열하였다.

	제 1 열	제 2 열	제 3 열	…
제 1 행	1			
제 2 행	3	5		
제 3 행	7	9	11	
⋮		⋮		

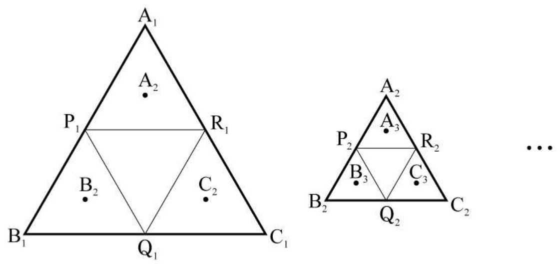
제 p행과 제 q열이 만나는 위치에 있는 수가 101일 때, $p+q$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

11. n이 자연수일 때, x에 대한 방정식 $x^n = n-12$의 실근의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(5)+f(10)+f(15)+f(20)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1의 중점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하고, 세 삼각형 $A_1P_1R_1$, $B_1Q_1P_1$, $C_1R_1Q_1$의 무게중심을 각각 A_2, B_2, C_2라 하자. 또, 삼각형 $A_2B_2C_2$의 세 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2의 중점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하고, 세 삼각형 $A_2P_2R_2$, $B_2Q_2P_2$, $C_2R_2Q_2$의 무게중심을 각각 A_3, B_3, C_3이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 삼각형을 그려나갈 때, 삼각형 $A_nB_nC_n$의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} l_n$의 값은? [4점]

① $\frac{705}{128}$ ② $\frac{735}{128}$ ③ $\frac{765}{128}$ ④ $\frac{795}{128}$ ⑤ $\frac{825}{128}$

13. 올림픽에 참가한 어느 나라가 딴 금메달, 은메달, 동메달의 수를 각각 a, b, c라 할 때 $3a+2b+c$의 값을 그 나라의 메달 가치라 하자. 어떤 연구에 의하면 인구가 P만 명이고 국내총생산액이 G억 달러인 나라의 메달 가치 S는 부등식

$$S \le 0.215\left(\frac{P}{100}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{G}{10}\right)^{\frac{2}{3}} \cdots\cdots (*)$$

을 만족시킨다고 한다.
어느 해 올림픽에 참가한 A나라의 인구가 6400만 명이고, 국내총생산액이 5120억 달러라 하자. 부등식 (*)이 항상 성립한다고 할 때, A나라의 메달 가치의 최댓값은? [3점]

① 51 ② 53 ③ 55 ④ 57 ⑤ 59

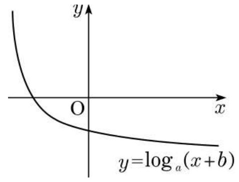
14. 다음은 행렬 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$와 역행렬을 갖지 않는 이차정사각행렬 A에 대하여 $X^n=A$를 만족시키는 자연수 n이 존재하면 등식 $X^2=(x+w)X$가 성립함을 증명한 것이다.

> <증명>
> 행렬 X가 역행렬을 갖는다고 가정하자.
> 등식 $X^n=A$의 양변에 $\boxed{(가)}$ 을 곱하면
> $$E=\boxed{(가)}\,A$$
> 가 되어 A는 역행렬을 갖게 되므로 가정에 모순이다.
> $$\therefore\ xw-yz=\boxed{(나)}$$
> 따라서
> $$\begin{aligned} X^2-(x+w)X &= X\{X-(x+w)E\} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\boxed{(다)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
> 이므로 $X^2=(x+w)X$가 성립한다.

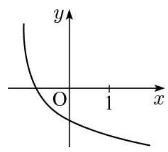
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

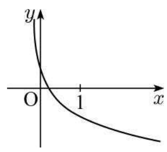
	(가)	(나)	(다)
①	$(X^{-1})^n$	0	$\begin{pmatrix} -w & y \\ z & -x \end{pmatrix}$
②	$(X^{-1})^n$	1	$\begin{pmatrix} -x & y \\ z & -w \end{pmatrix}$
③	$(X^{-1})^n$	0	$\begin{pmatrix} -x & y \\ z & -w \end{pmatrix}$
④	$(A^{-1})^n$	1	$\begin{pmatrix} -w & y \\ z & -x \end{pmatrix}$
⑤	$(A^{-1})^n$	0	$\begin{pmatrix} -x & y \\ z & -w \end{pmatrix}$

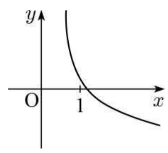
15. 함수 $y=\log_a(x+b)$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프가 그림과 같다.

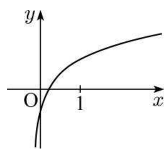


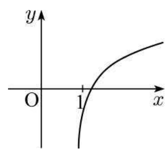
이때, 함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프로 알맞은 것은? [4점]

①


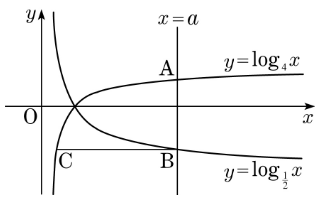
②


③


④


⑤


16. 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 직선 $x=a\ (a>1)$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\text{AB}}=3$일 때, 점 C의 x좌표는? [4점]



① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

17. 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 하자. m, n이 자연수일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(n)+g(n)$의 최솟값은 0이다.

ㄴ. $f(m)=f(n)=2$이면 $|m-n|$의 최댓값은 900이다.

ㄷ. $m\neq n$이고 $g(m)=g(n)=\log 7$이면 $|m-n|$의 최솟값은 70이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+5y \\ -3x+3y \end{pmatrix}$$

가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 실수 a, b의 값을 정할 때, a^2+b^2의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

19. 세 이차정사각행렬 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $AB=BC$

(나) B의 역행렬이 존재한다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A=E$이면 $C=E$이다.

ㄴ. A의 역행렬이 존재하면 C의 역행렬도 존재한다.

ㄷ. $A^7B=BC^7$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 두께가 d (mm)인 물체에 쏜 X선의 세기를 I_0, 그 물체를 통과하여 나온 X선의 세기를 I라 하면 이 물체의 X선에 대한 흡수계수 α는 다음과 같이 정의된다고 한다.

$$\alpha = \frac{2.3}{d}(\log I_0 - \log I)$$

두께가 2.3 mm, 흡수계수가 3인 물체 A와 두께가 2.5 mm, 흡수계수가 4.6인 물체 B에 같은 세기의 X선을 각각 쏠 때, 물체 A를 통과하여 나온 X선의 세기는 물체 B를 통과하여 나온 X선의 세기의 k배이다. k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ 10 ⑤ 100

21. 두 함수

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1, \ g(x) = a^x \ (a > 0, \ a \neq 1)$$

이 있다. $-1 \leq x \leq 2$에서 두 함수 $f(g(x))$, $g(f(x))$의 최댓값이 같아지도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

단답형

22. 지수부등식 $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 \leq 0$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

23. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}$에 대하여 $XA = B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

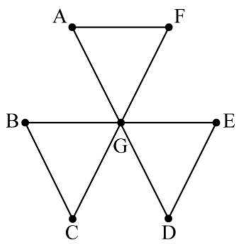
24. 로그방정식 $\left(\log_3 \frac{9}{x}\right)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right) + 6 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하자.

$$a_1 = 1,\ b_n = (-1)^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{m} a_k = 100$을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같은 그래프가 있다. 이 그래프의 꼭짓점 A에서 꼭짓점 F로 가는 모든 경로의 수를 구하시오. [4점]



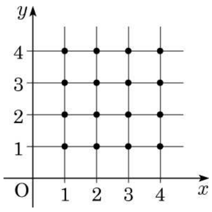
27. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 4n \cdot 3^n$이다.

b_5의 값을 구하시오. [4점]

28. 모든 실수 x에 대하여 지수부등식 $5^{2x} \ge k \cdot 5^x - 2k - 5$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $\alpha \le k \le \beta$이다. $|\alpha\beta|$의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림은 좌표평면에 직선 $x=m\,(m=1, 2, 3, 4)$과 직선 $y=n$ $(n=1, 2, 3, 4)$의 교점을 나타낸 것이다.



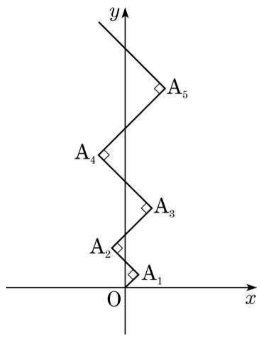
16개의 교점 중 서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 차례로 택하여 두 점의 x, y좌표를 성분으로 하는 행렬 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$를 만든다.

예를 들어 차례로 택한 두 점의 좌표가 각각 (1, 3), (2, 4)이면 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$가 만들어지고, 차례로 택한 두 점의 좌표가 각각 (2, 4), (1, 3)이면 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$이 만들어진다.

이와 같이 위의 16개의 교점 중 서로 다른 두 점을 차례로 택하여 만든 행렬 중에서 역행렬을 갖지 않는 것의 개수를 구하시오. [4점]

30. 좌표평면에 다음과 같은 규칙으로 점 $\mathrm{A}_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 정해 나간다. (단, 점 A_0의 좌표는 (0, 0)이다.)

> (가) 점 A_1의 좌표는 (1, 1)이다.
> (나) $\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}=\sqrt{2}\,n$이고 $\angle \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}=90°$이다.
> (다) 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$은 y축과 한 점에서 만난다.



삼각형 $\mathrm{A}_{19}\mathrm{A}_{20}\mathrm{A}_{21}$의 무게중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.