2011학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

[가 형]

1	④	**2**	⑤	**3**	③	**4**	④	**5**	③
6	⑤	**7**	③	**8**	⑤	**9**	①	**10**	③
11	②	**12**	①	**13**	④	**14**	①	**15**	②
16	⑤	**17**	②	**18**	①	**19**	②	**20**	④
21	①	**22**	61	**23**	4	**24**	13	**25**	10
26	354	**27**	2	**28**	100	**29**	20	**30**	3

1. [출제의도] 지수의 성질을 알고 계산하기

$$\left(2^2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}}=4$$

2. [출제의도] 함수의 극한의 뜻 이해하기

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{\sqrt{x+2}-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}3(\sqrt{x+2}+2)=12$$

3. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$$AB+B^2=(A+B)B=\begin{pmatrix}2&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6\\3&5\end{pmatrix}$$

4. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계 이해하기

그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

따라서 행렬의 성분 중 1의 개수는 18

5. [출제의도] 분수부등식 이해하기

부등식 $\dfrac{x}{f(x-2)}\le 0$의 해를 구하면,

$xf(x-2)\le 0,\ f(x-2)\ne 0$

i) $x\le 0,\ f(x-2)>0$일 때,

$\therefore -2<x\le 0$

ii) $x\ge 0,\ f(x-2)<0$일 때,

$\therefore 1<x<5$

i), ii)에 의하여

$A=\{x\mid -2<x\le 0$ 또는 $1<x<5\}$

부등식 $\dfrac{x-4}{x+4}<0$의 해를 구하면,

$(x-4)(x+4)<0$

$\therefore -4<x<4$

$B=\{x\mid -4<x<4\}$

따라서

$A\cap B=\{x\mid -2<x\le 0$ 또는 $1<x<4\}$

에 속하는 정수의 개수는 4

6. [출제의도] 무한급수의 수렴 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2+n}-1\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2+n}-1\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+n}=1$$

$\dfrac{a_n}{n^2+n}=b_n$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2n^2}{2a_n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)b_n+2n^2}{2(n^2+n)b_n-n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)b_n+2}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)b_n-1}=3$$

7. [출제의도] 행렬의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $AB=A(A+E)=A^2+A$

$BA=(A+E)A=A^2+A$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $A-B=-E$

$B^2-B=B(B-E)=(B-E)B=-E$

$\therefore B^{-1}=E-B=-A=-B^2$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$B^{-1}=-B^2$

$B^3=-E,\ B^6=E$

$\therefore B^{2011}=(B^6)^{335}B=B$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

8. [출제의도] 알고리즘과 순서도 이해하기

이 순서도에서 인쇄되는 S의 값은

$S=(1^2+2^2+\cdots+20^2)+(1+2+\cdots+20)$

$=\dfrac{20\cdot 21\cdot 41}{6}+\dfrac{20\cdot 21}{2}=3080$

9. [출제의도] 삼각방정식 이해하기

$2\sin x-\cos x+a=0$

$\sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right)+a=0$

$\sin(x-\alpha)=-\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

$\left(\text{단}, \cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$-1\le -\dfrac{a}{\sqrt{5}}\le 1$

$\therefore -\sqrt{5}\le a\le\sqrt{5}$을 만족시키는

정수 a의 값은 $-2,-1,0,1,2$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 0

10. [출제의도] 함수의 연속의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to -1+0}f(f(x))=\lim_{x\to 1-0}f(x)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to -1-0}f(f(x))=f(-1)=-1$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to -1}f(f(x))$가 존재한다. (참)

ㄴ. $f(f(-1))=f(-1)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to -1}f(f(x))=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to -1}f(f(x))=f(f(-1))$이므로

함수 $f(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

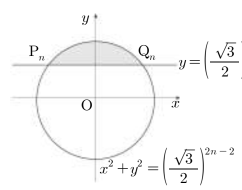
ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\{f(x)\}^2=1,\ \{f(1)\}^2=1$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to 1}\{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2$이므로

함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=1$에서 불연속이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

11. [출제의도] 무한급수에 관한 문제해결하기



원 $x^2+y^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-2}$과 직선 $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$의 교점을 P_n, Q_n이라 하면,

$\mathrm{P}_n\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1},\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$

$\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1},\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$

$$S_n=\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-2}\right\}-\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-2}\right\}$$
$$=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-2}$$

$\therefore \{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\dfrac{3}{4}$인 등비수열이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

12. [출제의도] 미분계수의 정의 이해하기

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(2x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)-f(1)\}-\{f(2x-1)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{f(2x-1)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-2\lim_{x\to 1}\frac{f(2x-1)-f(1)}{(2x-1)-1}$$
$$=f'(1)-2f'(1)=-f'(1)=-8$$

13. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 추론하기

$f(n)=\dfrac{n+2}{n},\ g(n)=n(n+1)$이므로

$f(11)\times g(10)=130$

14. [출제의도] 로그부등식 이해하기

$\left(-\dfrac{1}{2}\log_3 x\right)(\log_3 x-2)\ge a$의 해가

$\dfrac{1}{9}\le x\le 81$이므로 $\log_3 x=t$라 하면

$\left(-\dfrac{t}{2}\right)(t-2)\ge a$의 해가 $-2\le t\le 4$이다.

$t^2-2t-8\le 0 \Leftrightarrow t^2-2t+2a\le 0$

따라서 $a=-4$

15. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

(삼각형 ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times 1\times(a+3^{-b}-1)=\dfrac{2}{3}$

$a+3^{-b}=\dfrac{7}{3}$ …… ㉠

$y=\log_3(x-a)+b$이 점 $(3,1)$을 지나므로

$3-a=3^{1-b}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=2,\ b=1$

따라서 $a+b=3$

16. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 추론하기

$$f(x)=4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sin 2x-2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$=-3\cos 2x+2\sin 2x+1$$
$$=\sqrt{13}\sin(2x-\alpha)+1$$

$\left(\text{단}, \sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$

ㄱ. $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이다. (참)

ㄴ. $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{13}+1$,

최솟값은 $-\sqrt{13}+1$이므로

$f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=\sqrt{13}\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 얻을 수 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. [출제의도] 지수를 활용하여 실생활 문제해결하기

$a=15,\ b=60,\ f(60)=45$이므로

$45=15+45\cdot 2^{60K}$

$2^{60K}=\frac{2}{3}$

120초 후의 물체 A의 온도는

$f(120)=15+45\cdot 2^{120K}=15+45\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=35$

따라서 $x=35$

18. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. $a<b$이고 $a<1$이므로 $\log_a b<\log_a a$

$\log_a b<1$ (참)

ㄴ. (반례) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{9}{16}$ (거짓)

ㄷ. (반례) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=4$, $d=2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ

19. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

부채꼴 OAP의 넓이 $f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta=\frac{1}{2}\theta$

삼각형 OPQ에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times(\sin\theta+\cos\theta+1)\times r=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\cos\theta$

$r=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}$이므로

삼각형 OPQ에 내접하는 원의 넓이

$g(\theta)=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}\pi$이다.

따라서

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{g(\theta)}{\theta\cdot f(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{2\pi\sin^2\theta\cos^2\theta}{\theta^2(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

20. [출제의도] 삼차부등식 이해하기

부등식 $(2x+1)(2x^2+ax+b)\le 0$의 해가

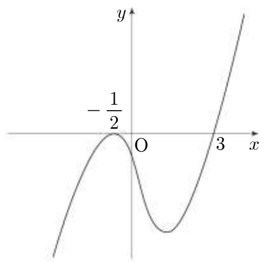
$x\le 3$이므로

$2x^2+ax+b=(2x+1)(x-3)$이다.

$(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$

$\therefore a=-5,\ b=-3$

따라서 $a-b=-2$



21. [출제의도] 등차수열과 등비수열을 활용하여 문제해결하기

두 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 a_n, b_n이라 하면

$2,\ a_1,\ a_2,\cdots,\ a_7,\ 2^9$은 등차수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7$

$=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(a_2+a_6)}{2}=\cdots=\frac{7(2+2^9)}{2}$

$=1799$

$2,\ b_1,\ b_2,\cdots,\ b_7,\ 2^9$은 등비수열이므로 공비를 r라 하면, $2^9=2r^8$에서 $r=2$

$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_7=\frac{4(2^7-1)}{2-1}=508$

따라서

$\sum_{n=1}^{7}l_n=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_7-b_7)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(b_1+b_2+\cdots+b_7)$

$=1799-508=1291$

22. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=2x(x^3-x+1)+(x^2-1)(3x^2-1)$

따라서 $f'(2)=4\cdot 7+3\cdot 11=61$

23. [출제의도] 무리방정식 이해하기

$x^2-4x=t$라 하면

$\sqrt{2t-3}=t-3$

$t^2-8t+12=0$이므로 $(t-2)(t-6)=0$

$\therefore t=6$ ($\because t=2$는 무연근)

$x^2-4x=6$에서 $x^2-4x-6=0$

따라서 모든 실근의 합은 4

24. [출제의도] 삼각함수의 배각의 공식, 반각의 공식 이해하기

$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1}{2}$

$1+\cos\theta=2-2\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{3},\ \sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\therefore p=9,\ q=4$

따라서 $p+q=13$

25. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-3}$

$x^2-x=3x-3$

$x^2-4x+3=0$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=3$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=10$

26. [출제의도] 분수방정식을 활용하여 문제해결하기

$b=\frac{10}{a}\times 100+100$ …… ㉠

$b+1=\frac{15}{a+50}\times 100+100$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\frac{10}{a}\times 100+1=\frac{15}{a+50}\times 100$

양변에 $a(a+50)$을 곱하여 정리하면

$a^2-450a+50000=0$

$\therefore a=250$ ($\because a>200$), $b=104$

따라서 $a+b=354$

27. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기

연립방정식 $\begin{pmatrix}k & 3\\ -1 & 2-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가질 조건은

$k^2-2k-3=0$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 2

28. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

(나)에서 $\log a=1+f(a)$

(다)에서 $\log\frac{1}{a}=-\log a=-1-f(a)$

$=-2+\{1-f(a)\}$

$f(a)=f\left(\frac{1}{a}\right)$, 조건에 의하여 $f(a)\ne 0$이므로

$f(a)=1-f(a),\ f(a)=\frac{1}{2}$

(나)에서 $\log a=\frac{3}{2}\quad\therefore a=10^{\frac{3}{2}}$

(가)에서 $1<b<a$이고 (다)에서 $f(a)=f(b)$이므로

$\log b=\frac{1}{2}\quad\therefore b=10^{\frac{1}{2}}$

따라서 $ab=10^{\frac{3}{2}}10^{\frac{1}{2}}=100$

29. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

자연수 n에 대하여 n행, n열의 수를 나열하면

$1,3,7,13,\cdots$이므로 이 수열의 일반항은

$a_n=n^2-n+1$이다.

$n=10$이면 $a_{10}=91$

n이 짝수이면 ↗방향으로 수가 커지므로 89는

12행, 8열의 수이다.

따라서 $i+j=20$

30. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기

직선 $y=nx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n,

직선 $y=(n+1)x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_{n+1}이라 하면, $l_n=\theta_{n+1}-\theta_n$

$\sum_{k=1}^{n}l_k=l_1+l_2+\cdots+l_n$

$=(\theta_2-\theta_1)+(\theta_3-\theta_2)+\cdots+(\theta_{n+1}-\theta_n)$

$=\theta_{n+1}-\theta_1$

$\tan\theta_1=1,\ \tan\theta_{n+1}=n+1$이므로

$\tan(\theta_{n+1}-\theta_1)=\frac{\tan\theta_{n+1}-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_{n+1}\tan\theta_1}$

$=\frac{(n+1)-1}{1+(n+1)\times 1}$

$=\frac{n}{n+2}$

$\sum_{k=1}^{n}l_k\ge\frac{\pi}{6}$이므로 $\tan(\theta_{n+1}-\theta_1)\ge\tan\frac{\pi}{6}$

$\frac{n}{n+2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}},\ n\ge 1+\sqrt{3}$

따라서 n의 최솟값은 3