2011학년도 대수능 9월 모의평가 (수리영역-나형) 정답 및 풀이

1.

$$\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4$$
$$=\log_3\frac{6\times2}{4}$$
$$=\log_3 3=1$$

답 ①

2.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n+11}-n)(\sqrt{n^2+4n+11}+n)}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+11}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{11}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{11}{n^2}}+1}$$
$$=2$$

답 ②

3.

$AX-BX=(A-B)X$이므로

$$\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$$
$$\therefore\ X=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}$$

답 ①

4.

$P(A)=P(B)$이므로

$$P(A)+P(B)=2P(A)$$
$$=\frac{2}{3}$$
$$\therefore\ P(A)=\frac{1}{3}$$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

답 ③

5.

$\frac{1}{3}<x<9$에서

$$\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 9$$
$$-1<\log_3 x<2\ \cdots㉠$$

$(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$에서

$$(\log_3 x+1)(\log_3 x-a)<0$$

이 부등식의 해가 ㉠이므로

$$a=2$$

답 ②

6.

$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$에서

$Q=24$, $H=5$일 때,

$S_1 = N \times 24^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{3}{4}}$

$Q=12,\ H=10$일 때,

$S_2 = N \times 12^{\frac{1}{2}} \times 10^{-\frac{3}{4}}$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_2} = \frac{N \times 24^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{3}{4}}}{N \times 12^{\frac{1}{2}} \times 10^{-\frac{3}{4}}}$$

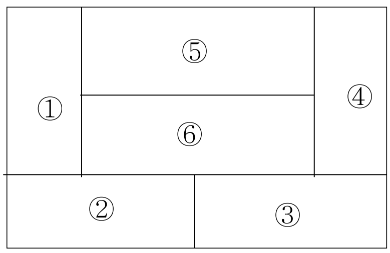
$$= \frac{N \times 2^{\frac{1}{2}} \times 12^{\frac{1}{2}} \times 10^{-\frac{3}{4}}}{N \times 12^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{4}} \times 5^{-\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{-\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$= 2^{\frac{5}{4}}$$

답 ⑤

7. 6개 지역을 다음과 같이 구분하자.



서로 이웃한 2개 지역은
(①,②) (①,⑤) (①,⑥)
(②,③) (②,⑥)
(③,④) (③,⑥)
(④,⑤) (④,⑥)

(⑤,⑥)
의 모두 10개이다.
또한 서로 이웃한 2개 지역을 조사하는 조사원을 정하는 경우의 수는 5개이고 나머지 4개 지역을 나머지 4명의 조사원이 조사하는 경우의 수는 $4!$ 개 이므로 구하고자 하는 경우의 수는

$10 \times 5 \times 4! = 1200$

답 ⑤

8. 반등 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(m, 1^2)$을 따른다.
따라서 $P(X < 2.93) = 0.1003$ 이므로

$P(X < 2.93)$

$= P\left(Z < \frac{2.93 - m}{1}\right)$

$= P(Z > m - 2.93)$

$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq m - 2.93) = 0.1003$

$P(0 \leq Z \leq m - 2.93) = 0.3997$

즉, $m - 2.93 = 1.28$ 이므로

$m = 4.21$

답 ③

9. 원 $x^2 + y^2 = n^2$에 접하고 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y = nx + n\sqrt{n^2+1}$

따라서

$P_n(-\sqrt{n^2+1}, 0)$, $Q_n(0, n\sqrt{n^2+1})$

이므로

$l_n = \overline{P_nQ_n}$

$= \sqrt{(n^2+1) + n^2(n^2+1)}$

$= \sqrt{n^4 + 2n^2 + 1}$

$= \sqrt{(n^2+1)^2} = n^2 + 1$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

2011학년도 대수능 9월 모의평가 (수리영역-나형) 정답 및 풀이

답 ④

10. ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$라고 하면

$A=E$, $ABC=E$, $ACB=E$ 이지만 $B\neq E$ 이다. (거짓)

ㄴ. $ABC=E$ 에서

$C=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$ACB=AB^{-1}A^{-1}B=E$

$B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

$(B^{-1}A^{-1})^{-1}=(A^{-1}B^{-1})^{-1}$

$AB=BA$ (참)

ㄷ. (i) $n=1$일 때 $ABC=E$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 $A^nB^nC^n=E$가 성립한다고 가정하면

$n=k+1$ 일 때

$A^{n+1}B^{n+1}C^{n+1}$

$=A^nAB^nBC^nC$

$=A^nB^nABC^nC$ (∵ ㄴ)

$=A^nB^nC^nABC$(∵ $(AB)C=C(AB)=E$)

$=E$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 $A^nB^nC^n=E$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

답 ⑤

11. 무한급수

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\frac{3n}{n+1})$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$

이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-\frac{3n}{n+1})=\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=3$

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3+\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=-3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{3-b_n}{a_n}=\frac{3-(-3)}{3}=2$

답 ②

12. $\angle A_nA_{n-1}B_n=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{A_{n-1}A_n}$

따라서 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 중심각의 크기를 Θ_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$\Theta_n=\frac{\pi}{4}$, $r_n=4(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$\therefore\ l_n=r_n\Theta_n=\frac{\pi}{4}\times4(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$=\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\pi}{2-\sqrt{2}}$

$=\pi(2+\sqrt{2})$

답 ②

13. 두 주사위의 눈의 수의 차가 3보다 크거나 같은 경우는 모두 12가지이므로 1번의 시행에서 A가 점수를 얻을 확률은 $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ 이고 B가 점수를 얻을 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 15회 시행에서 A가 얻는 점수의 합을 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(15, \frac{2}{3}\right)$를 따른다. $\therefore E(X)=15\times\frac{2}{3}=10$

한편 15회 시행에서 B가 얻는 점수의 합을 확률변수 Y라고 하면 Y는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$를 따르므로 $E(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$

따라서 두 기댓값의 차는 5이다.

답 ③

14. 확률 $\mathrm{P}\left(a\le X\le a+\frac{1}{2}\right)$의 값이 최대가 되려면 구간 $a\le x\le a+\frac{1}{2}$ 안에 1이 포함되어있어야 하므로 $\frac{1}{2}<a<1$인 경우를 생각한다.

$\frac{1}{2}<a<1$일 때 $1<a+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ 이므로

$$\mathrm{P}\left(a\le X\le a+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right)+\frac{1}{2}-\left(\frac{3-2a}{2}\right)^2$$

$$=-a^2+\frac{3}{2}a-\frac{1}{8}$$

$$=-\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}$$

따라서 $a=\frac{3}{4}$일 때 확률 $\mathrm{P}\left(a\le X\le a+\frac{1}{2}\right)$의 값이 최대이다

답 ④

15. 선분 AC가 y축에 평행하므로

두 점 A, C의 좌표를 각각

$\mathrm{A}(t,\ \log_2 4t)$, $\mathrm{B}(t,\ \log_2 t)$ ($t>1$)라고 하면

$$\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2\frac{4t}{t}=2$$

선분 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC 가 정삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{BM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$$

따라서 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(t-\sqrt{3},\ \log_2 4(t-\sqrt{3})$) 이고

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(t-\sqrt{3}-t)^2+\{\log_2 4(t-\sqrt{3})-\log_2 4t\}^2}$$

$$=\sqrt{3+\left\{\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}\right\}^2}=2$$

이므로 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\pm1$이다.

그런데 $t>1$ 이므로 $\frac{t-\sqrt{3}}{t}<1$

따라서 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=-1$ 이고

$$\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\frac{1}{2},\ 2(t-\sqrt{3})=t$$

$\therefore t=2\sqrt{3}$

이 때 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p=\sqrt{3}$, $q=\log_2 4\sqrt{3}$

$$\therefore p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}$$

$$=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

답 ③

2011학년도 대수능 9월 모의평가 (수리영역-나형) 정답 및 풀이

16. $\log x = -\frac{4}{5}$ 이므로

$\log x^2 = -\frac{8}{5} = -2 + 0.4$

이고 $\log 2 < 0.4 < \log 3$ 이므로

따라서 x^2은 소수점 아래 2번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 2가 나타난다.

$\therefore a + b = 2 + 2 = 4$

답 ②

17. $a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k$ 에서

$a_{n-1} = (n-1)^2 + \sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k$ 이므로

$\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k = a_{n-1} - (n-1)^2$

따라서

$a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k + (2n-1)a_{n-1}$

$= n^2 + a_{n-1} - (n-1)^2 + (2n-1)a_{n-1}$

$\therefore f(n) = (n-1)^2$

또 $a_n + 1 = 2n(a_{n-1}+1)$

$= 2n \cdot 2(n-1)(a_{n-2}+1)$

$\vdots$

$= n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot 2^{n-2}(a_2+1)$

이므로 $g(n) = 2^{n-2}$ 이다.

$\therefore f(9) \times g(9) = 2^6 \times 2^7 = 2^{13}$

답 ①

18. 등차수열 a_n의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3 = a + 2d = 5$, $a_6 - a_4 = 2d = 4$

$\therefore a = 1,\ d = 2$

$\therefore a_{10} = a + 9d = 1 + 18 = 19$

답 19

19. ${}_nP_3 = 12 \times {}_nC_2$ 에서

$n(n-1)(n-2) = 12 \times \frac{n(n-1)}{2}$

$n - 2 = 6$

$\therefore n = 8$

답 8

20. $2^x - 8 = 0$ 에서 $x = 3$

$3^{2x} - 9 = 9^x - 9 = 0$ 에서 $x = 1$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

답 10

21. $x = b$, $y = 9$가 연립방정식을 만족하므로

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b-18 \\ ab+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

즉, $b - 18 = 0$, $ab + 18 = 0$ 에서

$a = -1$, $b = 18$

$\therefore a + b = 17$

답 17

22. 남아 있는 4개의 좌석에 4명의 승객이 앉는 방법의 수는

$4! = 24$

남자 승객 2명이 A구역에 배정되는 방법의 수는

$2!=2$
나머지 여자 승객 2명이 B, C 구역에 배정되는 방법의 수는
$2!=2$
$\therefore\ p=\frac{2+2}{24}=\frac{1}{6}$
$\therefore\ 120p=20$

답 20

23. $a_{n+1}-a_n$
$=(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$
$=(-1)^n(\frac{2n+1}{n}-\frac{2n+1}{n+1})$
$=(-1)^n(2+\frac{1}{n}-2+\frac{1}{n+1})$
$=(-1)^n(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$
즉, $a_{n+1}-a_n=(-1)^n(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$이므로
$a_{20}=2+\sum_{k=1}^{19}(-1)^k(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})$
$=2+\left\{-(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-\cdots-(\frac{1}{19}+\frac{1}{20})\right\}$
$=2+(-1-\frac{1}{20})=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$
$\therefore\ p+q=39$

답 39

24. 카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지를 (a,b,c)로 나타내기로 하자.
카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 각각 (0, 1, 2) 이면 두 번의 시행으로는 (0, 0, 0) 또는 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2)를 만들 수가 없다.
또한, 세 번의 시행으로 나올 수 있는 모든 경우의 수는
$3\times3\times3=27$
이고 세 번의 시행에서 (0, 0, 0)이 되는 경우는
(0,1,2)→(0,2,2)→(0,2,3)→(0,3,3)
(0,1,2)→(0,2,2)→(0,3,2)→(0,3,3)
(0,1,2)→(0,1,3)→(0,2,3)→(0,3,3)
의 3가지이고 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2)가 될 수 있는 경우도 각각 3가지씩이다.
따라서 3번째 시행에서 사건 A가 일어나지 않을 확률은
$P(A^C)=1-\frac{3+3+3}{27}=\frac{2}{3}$
또한, 3번의 시행 후에는 모든 카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 (0, 1, 2) 또는 (0, 0, 0) 또는 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2) 이므로 4번째 , 5번째 시행에서는 사건 A가 일어나지 않고 6번째 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 같은 방법으로 생각하면 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 구하고자 하는 확률은
$1\times1\times\frac{2}{3}\times1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$
$\therefore\ p+q=11$

답 11

25. 그림에서 주어진 이후에 숫자 1이 나열된 행은
$1+2+4=7$
$1+2+4+8=15$

$1+2+4+8+16=31$

$1+2+4+8+16+32=63$

…

에서 8행, 16행, 32행, 64행…이다.

따라서 32행까지 나열된 원 안에 써 넣은 모든 수의 합은

$1+2+4+8+16+32=63$

답 63

26. $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$ 에서 $n^{\frac{m}{3}}$ 이 자연수가 되는 경우는

$n=1$ 인 경우에 $m=1,2,3$

$2 \leq n \leq 7$ 인 경우에 $m=3$

$n=8$ 인 경우에 $m=1,2,3$

따라서 순서쌍 (m,n)의 개수는

$3+6+3=12$

답 ④

27. 5일 중 3일을 선택하여 요가를 하는 방법의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2}=10$$

나머지 2일 중 하루를 수영, 줄넘기 중 한가지를 하고 남은 하루는 농구, 축구 중 한가지를 하는 방법의 수는

$2\times2\times2=8$

따라서 구하고자 하는 방법의 수는

$10\times8=80$

답 ④

28. $p_1=\dfrac{22}{50}$, $p_2=\dfrac{24}{250}$ 이므로

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{\frac{22}{50}}{\frac{24}{250}}=\frac{55}{12}$$

답 ③

29. $E(X)=-2\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{2}=0$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=(-2)^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$

답 ①

3 0 .

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2 & 2-2^2\\0 & 2^4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -4\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2^2 & 2-2^2\\0 & 2^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3 & 2^2-2^3+2^4\\0 & -2^6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -4\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}2^3 & 2^2-2^3+2^4\\0 & -2^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^4 & 2^3-2^4+2^5-2^6\\0 & 2^8\end{pmatrix}$$

따라서 (1, 2)의 성분이

$2^4-2^5+2^6-2^7+2^8$

이 되는 행렬은 $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -4\end{pmatrix}^5$ 이고 그 때의

(1, 1)의 성분은 $2^5=32$ 이다.

$\therefore\ a+n=32+5=37$

답 37