2011학년도 대수능 9월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 풀이

1.

$\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4$

$=\log_3 \frac{6\times 2}{4}$

$=\log_3 3=1$

답 ①

2.

점 $(a,\ b,\ c)$는 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ 위의 점이므로

$\frac{a-1}{2}=\frac{b+1}{3}=c-2\quad\cdots㉠$

점 $(a,\ b,\ c)$는 평면 $z=4$ 위의 점이므로

$c=4$

㉠에서 $\frac{a-1}{2}=\frac{b+1}{3}=2$

$\therefore\ a=4+1=5,\ b=6-1=5$

$\therefore\ a+b+c=5+5+4=14$

답 ④

3.

$AX-BX=(A-B)X$이므로

$$\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$$

$$\therefore\ X=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}$$

답 ①

4.

접선 $y=mx+n$이 점 $(-1,0)$을 지나므로

$0=-m+n$에서 $m=n$

직선 $y=mx+m$과 쌍곡선 $x^2-y^2=2$가 한 점에서 만나므로

방정식 $x^2-(mx+m)^2=2$

즉, $(1-m^2)x^2-2m^2x-m^2-2=0$

의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^4+(1-m^2)(m^2+2)=0$

$m^4+m^2+2-m^4-2m^2=0$

$m^2=2$

$\therefore\ m^2+n^2=m^2+m^2=2+2=4$

답 ④

5.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$이므로

$f(x)$의 차수를 n이라 하면 $n\le 2$이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$이고, $x\to 0$일 때 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

따라서, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ 이므로

$f(x)=ax^2+bx$로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} (ax + b)$$

$$= b$$

이므로 $b=5$

방정식 $ax^2+5x=x$의 한 근이 $x=-2$이므로

$4a-10=-2$ 에서

$4a=8$

$\therefore\ a=2$

따라서, $f(x)=2x^2+5x$ 이므로

$f(1)=7$

답 ②

6.

$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$ 에서

$Q=24,\ H=5$일 때,

$S_1=N\times24^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}$

$Q=12,\ H=10$일 때,

$S_2=N\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times24^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}}{N\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}}$$

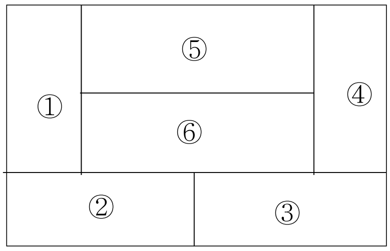
$$=\frac{N\times2^{\frac{1}{2}}\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}}{N\times12^{\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{3}{4}}\times5^{-\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{-\frac{3}{4}}}=2^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$=2^{\frac{5}{4}}$$

답 ⑤

7. 6개 지역을 다음과 같이 구분하자.



서로 이웃한 2개 지역은

(①,②) (①,⑤) (①,⑥)

(②,③) (②,⑥)

(③,④) (③,⑥)

(④,⑤) (④,⑥)

(⑤,⑥)

의 모두 10개이다.

또한 서로 이웃한 2개 지역을 조사하는 조사원을 정하는 경우의 수는 5개이고 나머지 4개 지역을 나머지 4명의 조사원이 조사하는 경우의 수는 $4!$ 개 이므로 구하고자 하는 경우의 수는

$10\times5\times4!=1200$

답 ⑤

8.

(i) $f(x)\geq0$ 일 때, 주어진 방정식은

$f(x)-2=\sqrt{4-f(x)}$ …㉠

양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2-4f(x)+4=4-f(x)$

$\{f(x)\}^2-3f(x)=0$

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=3$

$f(x)=0$ 이면 ㉠에서

$-2=2$가 되어 모순

$\therefore\ f(x)=3$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$은 서로 다른 두 점에서 만나고 교점의 x좌표를 α, β라 하면 방정식 $f(x)=3$의 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

(ii) $f(x)<0$일 때, 주어진 방정식은

$-f(x)-2=\sqrt{4-f(x)}$ …㉠

양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2+4f(x)+4=4-f(x)$

$\{f(x)\}^2+5f(x)=0$

$f(x)<0$ 이므로 $f(x)=-5$이고, 이는 방정식 ㉠을 만족한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-5$는 점 $(0, -5)$에서 접하므로

방정식 $f(x)=-5$의 실근은 $x=0$이다.

(i)(ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $x=\alpha, \beta, 0$의 3개이다.

답 ③

9. 원 $x^2+y^2=n^2$에 접하고 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=nx+n\sqrt{n^2+1}$

따라서

$P_n(-\sqrt{n^2+1}, 0)$,

$Q_n(0, n\sqrt{n^2+1})$

이므로

$l_n=\overline{P_nQ_n}$

$=\sqrt{(n^2+1)+n^2(n^2+1)}$

$=\sqrt{n^4+2n^2+1}$

$=\sqrt{(n^2+1)^2}=n^2+1$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

답 ④

10. ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$라고 하면

$A=E,\ ABC=E,\ ACB=E$ 이지만 $B\neq E$ 이다. (거짓)

ㄴ. $ABC=E$ 에서

$C=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$ACB=AB^{-1}A^{-1}B=E$

$B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

$(B^{-1}A^{-1})^{-1}=(A^{-1}B^{-1})^{-1}$

$AB=BA$ (참)

ㄷ. (i) $n=1$일 때 $ABC=E$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 $A^nB^nC^n=E$가 성립한다고 가정하면

$n=k+1$ 일 때

$A^{n+1}B^{n+1}C^{n+1}$

$=A^nAB^nBC^nC$

$=A^nB^nABC^nC$ (∵ ㄴ)

$=A^nB^nC^nABC$(∵ $(AB)C=C(AB)=E$)

$=E$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여

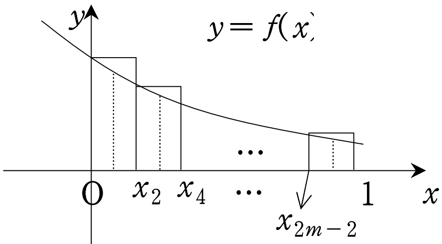
$A^nB^nC^n = E$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

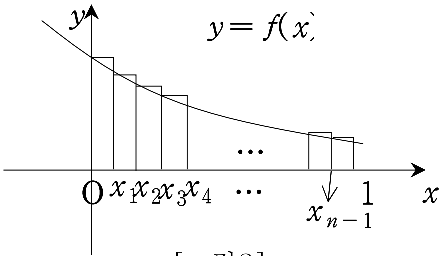
답 ⑤

11.

ㄱ. (반례)



[그림1]



[그림2]

$x_{2k+2} - x_{2k} = \dfrac{2}{2m} = \dfrac{1}{m}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(x_{2k})}{m}$ 은 [그림1]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

$x_{k+1} - x_k = \dfrac{1}{n}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ 은 [그림2]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

따라서, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(x_{2k})}{m} > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $x_k = \dfrac{k}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left\{ \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx \right\}$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx$$ (참)

ㄷ. (반례)

ㄱ의 [그림2]에서

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 0$, $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이고, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ 은 직사각형들의 넓이의 합을 나타내므로

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n} > \int_0^1 f(x)\,dx$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

12. $\angle A_nA_{n-1}B_n = \dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{A_nA_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\overline{A_{n-1}A_n}$$

따라서 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 중심각의 크기를 θ_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$\theta_n = \dfrac{\pi}{4}$, $r_n = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ l_n = r_n\theta_n = \dfrac{\pi}{4} \times 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

$$=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\pi}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\pi(2+\sqrt{2})$$

답 ②

13. 두 주사위의 눈의 수의 차가 3보다 크거나 같은 경우는 모두 12가지이므로 1번의 시행에서 A가 점수를 얻을 확률은 $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ 이고 B가 점수를 얻을 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 15회 시행에서 A가 얻는 점수의 합을 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(15,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\therefore E(X)=15\times\frac{2}{3}=10$

한편 15회 시행에서 B가 얻는 점수의 합을

확률변수 Y라고 하면 Y는 이항분포 $B\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$를 따르므로

$E(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$

따라서 두 기댓값의 차는 5이다.

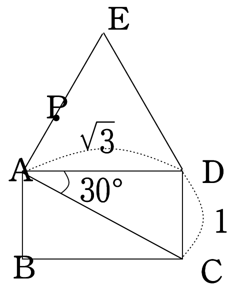
답 ③

14.

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}$ 이므로 선분 PB의 길이는 점 P가 점 A와 일치할 때 최소이다.

따라서, 최솟값은 $\overline{AB}=1$ 이다. (참)

ㄴ.



$\triangle$ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$ 이므로

$\angle CAD=30°$

$\triangle$EAD가 정삼각형이므로

$\angle EAD=60°$

$\therefore\ \angle EAC=\angle PAC=90°$

$\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$

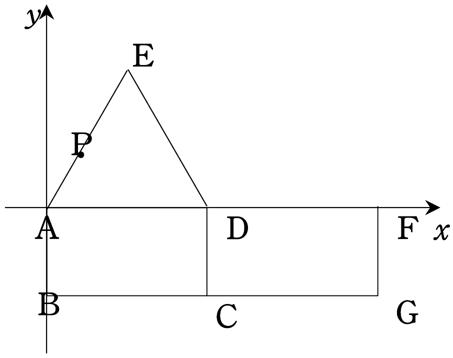
$\therefore\ \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\bullet(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})$

$=\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AP}$

$=|\overrightarrow{CA}|^2+0$

$=2^2=4$ (참)

ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.



$\overline{AD}=\overline{DF}$ 인 x축 위의 점을 F라 하고

직사각형 DCGF를 그리면

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$$

이므로 $|\overrightarrow{GP}|$의 최솟값은

점 $G(2\sqrt{3},\ -1)$에서 직선 AE에 이르는 거리와 같다.

직선 AE의 방정식은

$y=\sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x-y=0$이므로

구하는 최솟값은

$$\frac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{7}{2} \quad (\text{참})$$

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

답 ⑤

15. 선분 AC가 y축에 평행하므로

두 점 A, C의 좌표를 각각

$A(t,\ \log_2 4t)$, $B(t,\ \log_2 t)$ ($t>1$)라고 하면

$$\overline{AB}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2\frac{4t}{t}=2$$

선분 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC

가 정삼각형이므로

$$\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$$

따라서 점 B의 좌표는

$B(t-\sqrt{3},\ \log_2 4(t-\sqrt{3}))$ 이고

$$\overline{AB}=\sqrt{(t-\sqrt{3}-t)^2+\{\log_2 4(t-\sqrt{3})-\log_2 4t\}^2}$$

$$=\sqrt{3+\left\{\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}\right\}^2}=2$$

이므로 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\pm 1$이다.

그런데 $t>1$이므로 $\frac{t-\sqrt{3}}{t}<1$

따라서 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=-1$ 이고

$$\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\frac{1}{2},\ 2(t-\sqrt{3})=t$$

$\therefore\ t=2\sqrt{3}$

이 때 점 B의 좌표는

$B(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p=\sqrt{3},\ q=\log_2 4\sqrt{3}$

$$\therefore\ p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}$$

$$=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

답 ③

16.

$$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$$

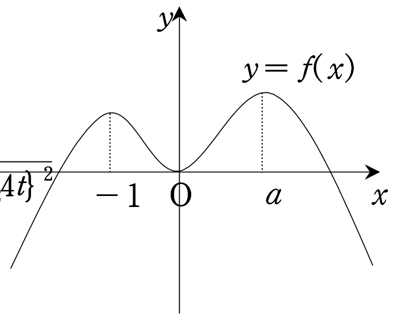
$$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}$$

$$=-12x(x+1)(x-a)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	$-$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(-1)=2a+1$, $f(a)=a^4+2a^3$이고,

$$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1$$

$$=(a+1)^3(a-1)$$

이므로

$0<a<1$ 이면 $f(a)<f(-1)$

$a\geq 1$ 이면 $f(a)\geq f(-1)$ 이다.

(ⅰ) $0<a<1$ 인 경우

$t<-1$ 이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq -1$ 이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (t>-1)\end{cases}$$

이 고 ,

$\lim_{t\to -1-0} g'(t)=\lim_{t\to -1+0} g'(t)=0$

이므로 $g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 미분가능하다.

그러므로 $0<a<1$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅱ) $a\geq 1$ 인 경우

$f(-1)=f(\alpha)$ ($0<\alpha\leq a$)이라 하자.

$t<-1$ 이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$-1\leq t<\alpha$ 이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$

$\alpha\leq t<a$ 이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq a$ 이면

$g(t)=f(a)=a^4+2a^3$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<\alpha)\\ -12t^3+12(a-1)t^2+12at & (\alpha<t<a)\\ 0 & (t>a)\end{cases}$$

$\lim_{t\to -1-0} g'(t)=\lim_{t\to -1+0} g'(t)=0$ 이므로

$g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 미분가능하다.

$\lim_{t\to a-0} g'(t)=\lim_{t\to a+0} g'(t)$ 이어야 하므로

$-12a^3+12(a-1)a^2+12a^3=0$ 에서

$12(a-1)a^2=0$ $\therefore a=1$

$a=1$ 이면 $f(x)=-3x^4+6x^2$ 이므로

$f(-1)=f(1)$ $\therefore \alpha=a=1$

$\therefore$

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12t & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<1)\\ -12t^3+12t & (t>1)\end{cases}$$

$g'(-1)=0$, $g'(1)=0$ 이므로

$a=1$ 일 때, $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅰ),(ⅱ)에서 함수 $g(t)$ 가 수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 a의 값의 범위는 $0<a\leq 1$ 이므로

구하는 a의 최댓값은 1 이다.

답 ①

17. $a_n=n^2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k$ 에서

$a_{n-1}=(n-1)^2+\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k=a_{n-1}-(n-1)^2$$

따라서

$$a_n=n^2+\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k+(2n-1)a_{n-1}$$

$= n^2 + a_{n-1} - (n-1)^2 + (2n-1)a_{n-1}$

$\therefore f(n) = (n-1)^2$

또 $a_n + 1 = 2n(a_{n-1} + 1)$

$= 2n \cdot 2(n-1)(a_{n-2} + 1)$

$\vdots$

$= n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot 2^{n-2}(a_2 + 1)$

이므로 $g(n) = 2^{n-2}$ 이다.

$\therefore f(9) \times g(9) = 2^6 \times 2^7 = 2^{13}$

답 ①

18.

$P(-3, 4, 5)$, $Q(3, 4, 5)$ 이므로

선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 (a, b, c)라 하면

$a = \dfrac{6-3}{2+1} = 1$

$b = \dfrac{8+4}{2+1} = 4$

$c = \dfrac{10+5}{2+1} = 5$

$\therefore a + b + c = 1 + 4 + 5 = 10$

답 10

19.

$x - 4 \le \dfrac{20}{x-3}$

$\Leftrightarrow x - 4 - \dfrac{20}{x-3} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-4)(x-3)-20}{x-3} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-7x-8}{x-3} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-8)}{x-3} \le 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x-8) \le 0$, $x \ne 3$

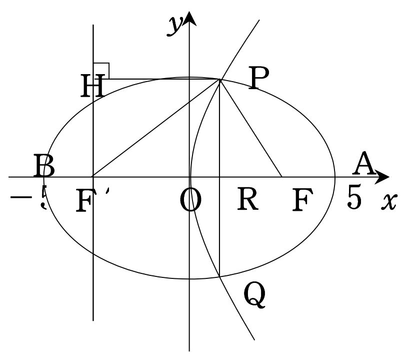
따라서, 주어진 부등식의 해는

$x \le -1$ 또는 $3 < x \le 8$ 이므로

자연수 x는 $4, 5, 6, 7, 8$의 5개다.

답 5

20.



$\overline{PF'} = m$, $\overline{PF} = n$이라 하면

타원의 정의에 의해

$m + n = 10 \quad \cdots ㉠$

선분 PQ와 x축의 교점을 R라 하면

$\overline{PR} = \dfrac{1}{2}\overline{PQ} = \sqrt{10}$

직각삼각형 PF′R에서

$\overline{F'R} = \sqrt{m^2 - 10}$

점 F′을 지나고 x축에 수직인 직선을 l이라 하면 l은 포물선의 준선이고,

점 P에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{PH} = \overline{PF}$

이다.

$\overline{PF} = \overline{PH} = \overline{F'R} = \sqrt{m^2-10}$ 이므로

$n = \sqrt{m^2-10}$ 에서

$n^2 = m^2 - 10$ …㉡

㉠에서 $n = 10 - m$ 이므로 ㉡에 대입하면

$(10-m)^2 = m^2 - 10$

$m^2 - 20m + 100 = m^2 - 10$

$20m = 110$, $m = \dfrac{11}{2}$

$n = 10 - m = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ mn = \dfrac{11}{2} \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{99}{4}$

$\therefore\ p + q = 4 + 99 = 103$

답 103

21.

$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + a$ 이므로

점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$y - \{t^3 - (a+2)t^2 + at\}$

$= \{3t^2 - 2(a+2)t + a\}(x - t)$

$x = 0$ 일 때 $y = g(t)$ 이므로

$g(t) - \{t^3 - (a+2)t^2 + at\}$

$= \{3t^2 - 2(a+2)t + a\}(-t)$

$\therefore\ g(t) = -2t^3 + (a+2)t^2$

$g'(t) = -6t^2 + 2(a+2)t$ 이므로

이차함수 $g'(t)$ 가

$0 < t < 5$ 에서 $g'(t) > 0$ 이려면

$g'(0) \geq 0$, $g'(5) \geq 0$ 이어야 한다.

$g'(0) = 0$ 이고,

$g'(5) = -150 + 10(a+2) \geq 0$ 이므로

$a \geq 13$

따라서, 구하는 a 의 최솟값은 13 이다.

답 13

22.

$g'(x) = f'(x) = ax^2 - a$ 이고,

$g(0) = a + 1$ 이므로

$g(x) = \dfrac{a}{3}x^3 - ax + a + 1$ 이다.

따라서, $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 모든 실수 x 에 대하여

$g(x) - f(x) = 1$ 이다.

$f'(x) = a(x+1)(x-1) = 0$ 에서

$x = -1, 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\dfrac{5}{3}a$	↘	$\dfrac{a}{3}$	↗

따라서, $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq \dfrac{a}{3} > 0$ 이다.

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 두 직선 $x = -1$, $x = 1$ 로 둘러싸인 부분을 x 축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V 는

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2]\, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \{f(x) - g(x)\}\{f(x) + g(x)\}\, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3}ax^3 - 2ax + 2a + 1\right) dx$$

$= 2\pi \int_0^1 (2a+1)\, dx$

$= 2\pi \left[(2a+1)x \right]_0^1$

$= 2(2a+1)\pi$

따라서, $2(2a+1)\pi = 50\pi$ 에서

$2a+1 = 25$

$\therefore\ a = 12$

답 12

23. $a_{n+1} - a_n$

$= (-1)^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

$= (-1)^n \left(\dfrac{2n+1}{n} - \dfrac{2n+1}{n+1}\right)$

$= (-1)^n \left(2 + \dfrac{1}{n} - 2 + \dfrac{1}{n+1}\right)$

$= (-1)^n \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)$

즉, $a_{n+1} - a_n = (-1)^n \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)$

이므로

$a_{20} = 2 + \sum_{k=1}^{19} (-1)^k \left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= 2 + \left\{ -\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) - \cdots \right.$

$\left. -\left(\dfrac{1}{19} + \dfrac{1}{20}\right) \right\}$

$= 2 + \left(-1 - \dfrac{1}{20}\right) = 1 - \dfrac{1}{20} = \dfrac{19}{20}$

$\therefore\ p + q = 39$

답 39

24. 카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지를 (a, b, c)로 나타내기로 하자.

카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 각각 (0, 1, 2) 이면 두 번의 시행으로는 (0, 0, 0) 또는 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2)를 만들 수가 없다.

또한, 세 번의 시행으로 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$3 \times 3 \times 3 = 27$

이고 세 번의 시행에서 (0, 0, 0)이 되는 경우는

(0,1,2)→(0,2,2)→(0,2,3)→(0,3,3)

(0,1,2)→(0,2,2)→(0,3,2)→(0,3,3)

(0,1,2)→(0,1,3)→(0,2,3)→(0,3,3)

의 3가지이고 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2)가 될 수 있는 경우도 각각 3가지씩이다.

따라서 3번째 시행에서 사건 A가 일어나지 않을 확률은

$P(A^C) = 1 - \dfrac{3+3+3}{27} = \dfrac{2}{3}$

또한, 3번의 시행 후에는 모든 카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 (0, 1, 2) 또는 (0, 0, 0) 또는 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2) 이므로 4번째, 5번째 시행에서는 사건 A가 일어나지 않고 6번째 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 같은 방법으로 생각하면 $\dfrac{1}{3}$이다. 따라서 구하고자 하는 확률은

$1 \times 1 \times \dfrac{2}{3} \times 1 \times 1 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$

$\therefore\ p + q = 11$

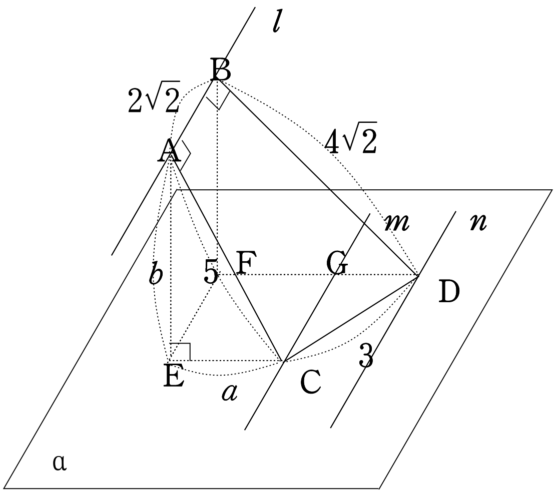
답 11

25.

두 직선 m, n을 포함하는 평면을 α라 하자.

l□□m, l□□n이므로 l□□α이다.

직선 l 위의 두 점 A, B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 선분 FD와 직선 m의 교점을 G라 하자.



$\overline{AB}$□□$\overline{EF}$, $\overline{EF}$□□$\overline{CG}$이고,

$\overline{EF}=\overline{CG}=2\sqrt{2}$

이므로 직각삼각형 DGC에서

$\overline{GD}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$

직각삼각형 ABD에서

$\overline{AD}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{10}$

삼각형 ACD에서

$$\cos(\angle ACD)=\frac{5^2+3^2-(2\sqrt{10})^2}{2\cdot5\cdot3}=-\frac{1}{5}$$

이므로

$$\sin(\angle ACD)=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=3\sqrt{6}$$

이다.

$\overline{EC}=a$, $\overline{AE}=\overline{BF}=b$라 하면

$\overline{FD}=a+1$이고,

삼각형 AEC에서 $a^2+b^2=25$ …㉠

삼각형 BFD에서 $(a+1)^2+b^2=32$ …㉡

㉡-㉠에서 $2a+1=7$, $a=3$

삼각형 ACD의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 ECD이고,

삼각형 ECD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CG}=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

따라서, $3\sqrt{6}\times\cos\theta=3\sqrt{2}$에서

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \tan^2\theta&=\sec^2\theta-1\\&=\frac{1}{\cos^2\theta}-1\\&=3-1\\&=2\end{aligned}$$

$\therefore\ 15\tan^2\theta=30$

답 30

미분과 적분

26.

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$이고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$$=\frac{2}{3}$$

$\therefore\ \sin\Theta\cos 2\Theta = \sin\Theta(2\cos^2\Theta - 1)$

$$= \frac{2}{3}\left(2\times\frac{5}{9} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{27}$$

답 ①

27.

$f(x) = \left(-\ln\frac{1}{ax}\right)^2 = (\ln ax)^2$에서

$f'(x) = 2\ln ax \times \frac{a}{ax} = \frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x) = \dfrac{\frac{2}{x}\times x - 2\ln ax}{x^2}$

$= \dfrac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$f''(x) = 0$ 에서 $x = \frac{e}{a}$

$x < \frac{e}{a}$ 일 때, $f''(x) > 0$이고 $x > \frac{e}{a}$ 일 때, $f''(x) < 0$이다.

따라서 $x = \frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$

변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$\frac{2e}{a} = 1$

$\therefore\ a = 2e$

답 ⑤

28.

$\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$에서

$tx = y$로 놓으면

$t = \frac{dy}{dx}$ 에서 $dx = \frac{dy}{t}$

$x=0$일 때, $y=0$

$x=2$일 때, $y=2t$

이므로

$\int_0^2 xf(tx)dx = \int_0^{2t}\frac{y}{t}f(y)\frac{dy}{t}$

$= \frac{1}{t^2}\int_0^{2t} yf(y)dy = 4t^2$

$\therefore\ \int_0^{2t} yf(y)dy = 4t^4$

양변을 t에 관하여 미분하면

$2tf(2t)\times(2t)' = 16t^3$

$\therefore\ f(2t) = 4t^2$

$\therefore\ f(2) = 4$

답 ④

29.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x$	+		+	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

위의 표에서 $x<1$, $1<x<3$일 때, $f''(x)>0$ 이므로 $f'(x)$는 증가하고 이 구간에서 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하다. 또한, $x=1$ 일 때, $f'(x)=0$ 이므로 $x=1$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 $-$ 에서 $+$ 로 바뀌게 된다. 따라

서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고 그래프는 아래로 볼록하다.

ㄱ. $g(x)=\sin(f(x))$에서

$g'(x)=\cos(f(x))\times f'(x)$

$\therefore\ g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)$

$=\cos\pi\times f'(3)$

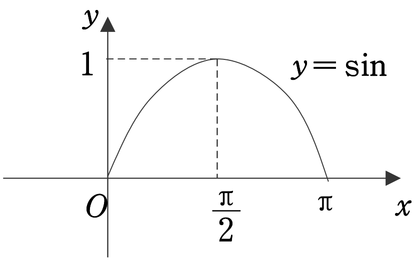
$=(-1)\times 1=-1$ (참)

ㄴ. $1<x<3$에서 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하며 증가하므로

$\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$

따라서 $\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$에서

$g(x)=\sin(f(x))$의 그래프는 감소하면서 위로 볼록하다.



$x=1$일 때,

$g'(1)=\cos(f(1))\times f'(1)$

$=\cos\frac{\pi}{2}\times 0=0$

$x=3$일 때,

$g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)$

$=\cos\pi\times 1=-1$

따라서 $1<a<b<3$에서

$-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$ (참)

ㄷ .

$g''(x)=-\sin(f(x))\times f'(x)\times f'(x)$

$+\cos(f(x))\times f''(x)$

$x=1$일 때,

$g''(1)=-\sin(f(1))\times f'(1)\times f'(1)$

$+\cos(f(1))\times f''(1)$

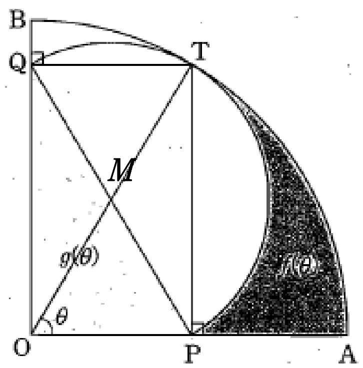
$=-\sin\frac{\pi}{2}\times 0\times 0+\cos\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=0$

이지만 $x<1$과 $x>1$에서 $g''(x)$의 부호가 같으므로 $x=1$에서 변곡점을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

30.



점 T의 좌표를 $T(2\cos\Theta, 2\sin\Theta)$라 하고,

직사각형 $OPTQ$에서 두 대각선 OT, PQ의 교점을 M이라 하자.

$f(\Theta)=$(부채꼴 OAT의 넓이)

$-$(삼각형 OPM의 넓이)

$-$(부채꼴 MPT의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \Theta - \frac{1}{2} \times 2\cos\Theta \times 1 \times \sin\Theta$$

$$- \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\Theta$$

$$= \Theta - \cos\Theta \sin\Theta$$

$$g(\Theta) = \frac{1}{2} \times 2\cos\Theta \times 2\sin\Theta$$

$$= 2\cos\Theta\sin\Theta$$

$$\therefore\ a = \lim_{\Theta \to +0} \frac{\Theta + f(\Theta)}{g(\Theta)}$$

$$= \lim_{\Theta \to +0} \frac{2\Theta - \cos\Theta\sin\Theta}{2\cos\Theta\sin\Theta}$$

$$= \lim_{\Theta \to +0} \left(\frac{\Theta}{\cos\Theta\sin\Theta} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

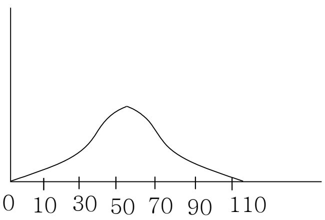
$$\therefore\ 100a = 50$$

답 50

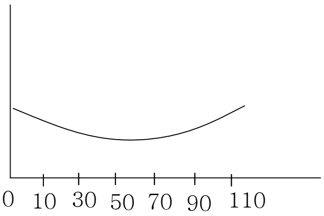
확률과 통계

26. 평균이 모두 55인 세 자료 A, B, C의 대략적인 분포를 그려보면 다음과 같다.

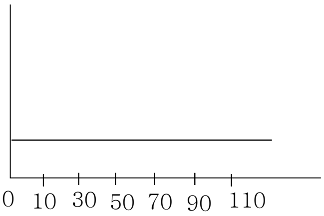
(A)



(B)



(C)



따라서 세 자료 A, B, C의 표준편차가 각각 a, b, c 이므로

$a < c < b$

답 ②

27. 4회 참여에 16점을 얻기 위해서는 3회는 5점, 1회는 1점이 올라가야 한다.

따라서 구하고자 하는 확률은

$$_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$$

답 ①

28. 모비율은 $p = 0.2$이고

$np = 1600 \times 0.2 = 320$

$nq = 1600 \times 0.8 = 1280$

은 모두 5보다 크므로

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{1600}}} = 100(\hat{p} - 0.2)$$

에서

$$P\left(\hat{p} \geq \frac{a}{100}\right)$$

$= P(Z \geq 100(\frac{a}{100} - 0.2))$

$= P(Z \geq a - 20) = 0.9772$

따라서 $P(0 \leq Z \leq 20 - a) = 0.4772$이므로

$20 - a = 2$

$\therefore\ a = 18$

답 ④

29. $b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$ 이므로

$10n < 10^{\frac{2}{b-a}}$ 에서 $10n < 10^{\frac{\sqrt{n}}{9.8}}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 10n < \log 10^{\frac{\sqrt{n}}{9.8}}$

$1 + \log n < \frac{\sqrt{n}}{9.8}$,

따라서 $n = 1700$일 때

$\frac{\sqrt{n}}{1 + \log n} = 9.75$

$n = 1800$일 때 $\frac{\sqrt{n}}{1 + \log n} = 9.97$

이므로 n의 최솟값은 1800이다.

답 ③

30. A공장에서 임의로 추출한 3개 중에서 2개가 불량품일 확률은

$\frac{1}{3} \times {}_3C_2 \times (\frac{2}{100})^2 \times \frac{98}{100} = \frac{392}{10^6}$

B, C공장에서 임의로 추출한 3개 중에서 2개가 불량품일 확률은

$2 \times \frac{1}{3} \times {}_3C_2 \times (\frac{1}{100})^2 \times \frac{99}{100} = \frac{198}{10^6}$

$\therefore\ p = \frac{392}{10^6} + \frac{198}{10^6} = \frac{590}{10^6}$

$\therefore\ 10^6 p = 590$

답 590

이산수학

26. $a_1 = 2,\ a_2 = 3$

$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = n + 1$

$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

에서

$\sum_{k=1}^{14} a_k$

$= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4 + a_5) + \cdots + (a_{12} + a_{13} + a_{14})$

$= 2 + 3 + 4 + 7 + 10 + 13 = 39$

답 ③

27. ㄱ. k_4는 꼭짓점의 개수가 4인 완전그래프이고 변이 꼭짓점에서만 만나 게 그릴 수 있으므로 평면그래프이다. (참)

ㄴ. k_5는 꼭짓점의 개수가 5인 완전그래프이고 꼭짓점이 모두 서로 연 결되어 있으므로 꼭짓점을 적절하게 색 칠하는데 필요한 최소의 색의 수는 5가 지이다. (참)

ㄷ. k_n의 각 꼭짓점에서 연결된 변의 수는 $n-1$개 이므로 모든 꼭짓점의 차수

의 합 은 $n(n-1)$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

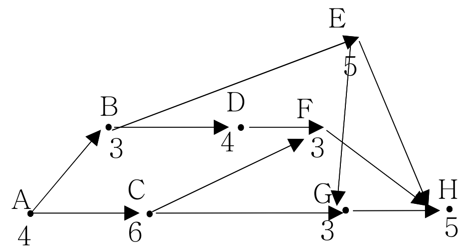
28. 처음에 선생님에게 연락받은 학생 4명을 모둠 B에 속한 학생이라 하면 4명이 또 다른 4명에게 연락해야하므로
모두 16명의 학생이 연락을 받는다.
이 때 연락을 받은 16명 중 1명이 4명에게
연락을 하면 24명이 모두 연락을 받게 된 다. 따라서 모둠 A에 속한 학생은 연락 을 받기만 한 학생이므로 15명과 마지막 4 명이다. 따라서 모두 19명이 된다.

답 ④

29. 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 1 이므로 정의역에 속하는 임의의 원소 x에 대하여 $f(f(x))=a$라고 할 때 a가 될 수 있는 경우의 수는
${}_4C_1=4$(가지)
이 때 $f(f(x))=a$ 인 경우 a를 포함하는
함수 f의 치역은 $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$로 3가지이다.
이제 정의역의 원소를 $\{a, b, c, d\}$라 하고
f의 치역을 $\{a, b\}$라고 하면
$f(f(a))=a$이기 위해서 $f(a)=a$ 이어야 한다.
또 $f(f(b))=a$ 이기 위해서 반드시 $f(b)=a$가 되어야 한다.
이 때 정의역의 나머지 두 원소 c, d가 a 또는 b에 대응하는 방법의 수는 $2^2-1=3$ 이다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$4\times3\times3=36$ 이다.

답 ①

30. 작업의 순서를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 작업을 모두 끝마치는 데 필요한 최소 작업시간은

A → B → E → G → H
4 3 5 3 5

에서

$$4+3+5+3+5=20(\text{일})$$

이다.

답 20