2010학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수리 영역

"나"형 정답

1	③	2	②	3	①	4	④	5	③
6	④	7	⑤	8	②	9	③	10	③
11	③	12	②	13	①	14	④	15	⑤
16	②	17	⑤	18	12	19	22	20	32
21	15	22	200	23	103	24	36	25	370
26	①	27	①	28	④	29	②	30	25

해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3\left(\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\right)^2=\log_3\left(3^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\right)^2$

$=\log_3 3^{\frac{11}{3}}=\frac{11}{3}$

2. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률 계산하기

$\mathrm{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$ 에서

$\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\mathrm{P(B)}-\frac{1}{4}$ 이므로

$\therefore\ \mathrm{P(B)}=\frac{1}{3}$

3. [출제의도] 극한값 계산하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{2n}=1$

4. [출제의도] 경우의 수 계산하기

${}_3\mathrm{P}_2\times 5!=720$

5. [출제의도] 식을 변형하여 함숫값 이해하기

$f(1)=f\left(2\times\frac{1}{2}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=64$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=8$

$f(1)=f\left(3\times\frac{1}{3}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^3=64$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=4$

$f(1)=f\left(6\times\frac{1}{6}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^6=64$, $f\left(\frac{1}{6}\right)=2$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)=14$

6. [출제의도] 등차수열의 합과 일반항의 관계 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 a_1 $(a_1\neq 0)$ 라 하면 $S_n=ka_n$ 에서

$\frac{n\{2a_1+(n-1)a_1\}}{2}=k\{a_1+(n-1)a_1\}$

$\frac{na_1(n+1)}{2}=kna_1$

양변을 na_1 으로 나누면 $k=\frac{n+1}{2}$

두 자리 자연수 k 가 최댓값 99 일 때, n 은 최댓값 197 을 갖는다.

$\therefore$ 197

7. [출제의도] 역행렬을 이용하여 연립방정식의 해 이해하기

$A^2-A+E=O$

$(A+E)(A-2E)+3E=O$

$(A+E)(A-2E)=-3E$

$(A+E)\left\{-\frac{1}{3}(A-2E)\right\}=E$ 이므로

$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$ 이다.

$(A+E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A+E)^{-1}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}(A-2E)\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

$=(-A+2E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

$\alpha=-1,\ \beta=5$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

8. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$\log_2(y+1)-\log_2|x|=\log_2\frac{y+1}{|x|}$ 에서

$\frac{y+1}{|x|}=k$ $(k>0)$ 즉, $y=k|x|-1$ 로 놓으면

k 가 최솟값을 가질 때, $\log_2\frac{y+1}{|x|}$ 즉, $\log_2 k$ 도 최솟값을 갖는다.

$y=x^2$ 과 $y=k|x|-1$ 이 접할 때,

즉, 방정식 $x^2-k|x|+1=0$ 이 중근을 가질 때, k 가 최솟값을 가지므로 $k=2$ 이다.

$\therefore\ \log_2\frac{y+1}{|x|}=\log_2 k=\log_2 2=1$

9. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $AB=O$ 이면

$A^2B^2=A(AB)B=AOB=O$ $\therefore$ 참

ㄴ. $A+B=E$ 에서 $A(A+B)=AE$ 이므로

$A^2+AB=A$ ⋯ ①

또 $A+B=E$ 에서 $(A+B)A=EA$ 이므로

$A^2+BA=A$ ⋯ ②

①, ② 에 의하여 $AB=BA=A-A^2$ $\therefore$ 참

ㄷ. $A^2=O$ 이면 $A^2-E=-E$ 이므로

$(A-E)(A+E)=-E$

따라서 $A+E$ 의 역행렬이 존재한다. $\therefore$ 거짓

10. [출제의도] 조건부 확률 이해하기

투표 전 \ 투표 결과	갑에게 투표	을에게 투표
갑 지지	0.28	0.42
을 지지	0.15	0.15
계	0.43	0.57

을에게 투표한 학생이 선택된 사건을 C, 투표 전과 후에 지지했던 후보를 바꾸지 않은 학생이 선택된 사건을 D 라 하면, 구하고자 하는 확률은

$\mathrm{P}(D|C)=\frac{\mathrm{P}(C\cap D)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{0.15}{0.42+0.15}=\frac{5}{19}$

11. [출제의도] 등비수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{CE}}=a$, $\overline{\mathrm{EB}}=\mathrm{a}r$, $\overline{\mathrm{BD}}=ar^2$ 이라 하자.

(삼각형EBC의 넓이)$=\frac{1}{5}$(사각형ABCD의 넓이)

$\therefore\ a=4$ ⋯ ①

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{A'BD}$, $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{BDC}$

$\triangle\mathrm{DEB}$ 는 이등변 삼각형이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EB}}$

$\therefore\ r=\frac{3}{2}$ ⋯ ②

①, ② 에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{EB}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 길이는 각각 4, 6, 9.

$\angle\mathrm{EDB}=\theta$ 이라 할 때, $\triangle\mathrm{DEB}$ 에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{36+81-36}{2\times6\times9}=\frac{3}{4}$.

$\triangle\mathrm{ABD}$ 에서 제이코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=10^2+9^2-2\times9\times10\times\cos\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{46}$

12. [출제의도] 함수의 그래프를 해석하여 수학 내적 문제 해결하기

$\mathrm{A}(\alpha,\ \mathrm{m}\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \mathrm{m}\beta)$ 라 하자. (단, $\alpha\neq 0$)

$\triangle\mathrm{OBD}:\triangle\mathrm{OAC}=4:1$ 이므로

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{OA}}=2:1$. 즉, $\beta=2\alpha$

$m\alpha=\log_2\alpha$ 이고 $2m\alpha=\log_2 2\alpha$ 이므로

$2\log_2\alpha=\log_2 2\alpha$, $\alpha^2=2\alpha$

$\alpha\neq 0$ 이므로 $\therefore\ \alpha=2,\ \beta=4$

사각형 ABDC 는 등변사다리꼴이므로,

$y=mx$ 은 $y=nx$ 의 역함수이다.

따라서 C(2m, 2), D(4m, 4) 이므로

$2^{2m}=2$ 에서 $m=\frac{1}{2}$, $n=2$

$\therefore\ m+n=\frac{5}{2}$

13. [출제의도] 순서도를 이용하여 약수의 곱 추론하기

인쇄되는 S 는 72 의 양의 약수의 곱이다.

$72=2^3\times3^2$

72 의 양의 약수는 다음과 같다.

$\times$	1	2	2^2	2^3
1	1	2	2^2	2^3
3	3	2×3	$2^2\times3$	$2^3\times3$
3^2	3^2	2×3^2	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$

$\therefore\ S=2^{18}\times3^{12}$

14. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 식 증명하기

(i) $n=2$ 일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{a_1+2a_2}$

(ii) $n=i$ $(i\geqq 2)$일 때, 주어진 등식이 성립함을 가정하면,

즉, $iS_i-\sum_{k=1}^{i-1}S_k=\sum_{k=1}^{i}ka_k$ 임을 가정할 때,

$(i+1)S_{i+1}-\sum_{k=1}^{i}S_k$

$=(i+1)S_{i+1}-\left(\sum_{k=1}^{i-1}S_k+S_i\right)$

$=(i+1)S_{i+1}-\left(\boxed{(i+1)S_i-\sum_{k=1}^{i}ka_k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{i}ka_k+\boxed{(i+1)(S_{i+1}-S_i)}$

$=\sum_{k=1}^{i+1}ka_k$

15. [출제의도] 조합을 이용하여 경우의 수 추론하기

$f(x)=\begin{cases}2\times{}_6\mathrm{C}_\mathrm{k}\times{}_6\mathrm{C}_{\mathrm{k}-1} & (\mathrm{x}=2\mathrm{k})\\ 2\times{}_6\mathrm{C}_{\mathrm{k}-1}\times{}_6\mathrm{C}_{\mathrm{k}-1} & (\mathrm{x}=2\mathrm{k}-1)\end{cases}$

ㄱ. $f(1)=2$ $\therefore$ 참

ㄴ. $f(2)=12$, $f(12)=12$ $\therefore$ 참

ㄷ. $f(x)$ 의 최댓값은 $f(7)=800$ $\therefore$ 참

16. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$S_n=\pi r_n^2$, $S_{n+1}=2S_n$ 이므로

$\pi r_{n+1}{}^2=2\pi r_n^2$, $r_{n+1}=\sqrt{2}\,r_n$

$r_1=1$ 이므로 $r_n=(\sqrt{2})^{n-1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$=2+\sqrt{2}$

17. [출제의도] 로그 방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$90=100\log(h+7.57-1.7\times50^{0.37})$

$0.9=\log(h+7.57-7.24)$

$3\log2=\log(h+0.33)$

$\log8=\log(h+0.33)$

$\therefore\ h=7.67$

18. [출제의도] 지수방정식의 해 계산하기

$3^{-\frac{3}{2}x}=3^{6-2x}$

$-\dfrac{3}{2}x = 6 - 2x$

$\therefore \ x = 12$

19. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A^{-1}(2A+B) = 2E + A^{-1}B$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 모든 성분의 합은 $7+6+3+6=22$

20. [출제의도] 이항정리를 이용하여 이항계수 이해하기

${}_4C_1\, x^3 \times \dfrac{1}{x^3} + {}_8C_2\, x^6 \times \left(\dfrac{1}{x^3}\right)^2 = {}_4C_1 + {}_8C_2$

$\therefore \ 32$

21. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$p=q=1$, $r=n$ 이면 $2a_1 + a_n = a_{n+2}$ 이므로

$a_{n+2} = a_n + 20$

$p=q=r=1$ 이면 $a_3 = 30$

$p=q=2$, $r=1$ 이면 $a_5 = 2a_2 + a_1$ 이고,

$a_5 = a_3 + 2a_1$, $a_5 = 50$ 이므로 $a_2 = 20$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 10 인 등차수열이다.

$a_n = 10n \ \cdots ①$

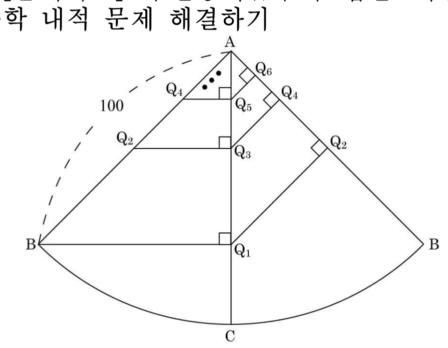
수열 $\{b_n\}$에서 $p=1$ 을 대입하여 정리하면

$b_n = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \cdots ②$

①, ②에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n \times (\frac{3}{5})^n}{n} = 10\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 15$$

22. [출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\angle BAC = 45^\circ$ 이므로

$l_1 = 50\sqrt{2}$, $l_2 = 50$, $l_3 = 25\sqrt{2}$, $\cdots$

따라서, $l_n = 50\sqrt{2} \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{50\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 100 + 100\sqrt{2}$$

$\therefore \ a+b = 200$

23. [출제의도] 확률을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리 자연수는

${}_5\Pi_4 - {}_5\Pi_3 = 625 - 125 = 500$ 가지

$a_1 < a_2 < a_3$ 이므로 a_3 는 3 또는 4 이다.

(i) $a_3 = 3$ 일 때

$a_1 < a_2 < a_3$ 이므로, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 이고

a_4 는 $0, 1, 2$ 중 한 가지이므로 3 가지

(ii) $a_3 = 4$ 일 때

a_1, a_2 는 $1, 2, 3$ 중 2 개의 수를 선택하여 큰 수가 a_2, 작은 수가 a_1 $(a_1 \neq 0)$이다. 따라서, a_1, a_2 가 될 수 있는 경우는 ${}_3C_2 = 3$ 가지, a_4 는 $0, 1, 2, 3$ 중 한 가지이므로 4 가지이다.

조건에 맞는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times 4 = 12$ 가지

구하고자 하는 확률은 $\dfrac{3+12}{500} = \dfrac{3}{100}$

$\therefore \ p+q = 103$

24. [출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3} = 2,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1} = 3$ 이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3} \times \frac{b_n}{3n+1}$

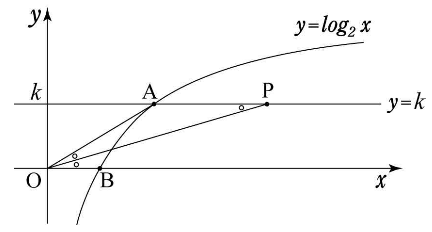
$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3} \times \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1} = 2\times 3 = 6$

$\displaystyle\therefore \ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n^2+4}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{(2n+3)(3n+1)} \times \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(3n+1)}{n^2+4}$

$= 6 \times 6 = 36$

25. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



직선 OP 가 $\angle AOB$ 의 이등분선이므로

$\angle AOP = \angle POB$ 이고

$\angle POB = \angle APO$ (엇각)이므로

$\angle AOP = \angle APO$, $\overline{OA} = \overline{AP}$ 이다.

$\overline{AP} = f(k)$ 이므로 $\overline{OA} = f(k)$.

A 의 좌표가 $(2^k,\ k)$ 이므로

$f(k) = \sqrt{4^k + k^2}$

$\displaystyle\therefore \ \sum_{k=1}^{4}\{f(k)\}^2 = \sum_{k=1}^{4}(4^k + k^2) = 370$

26. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

3 개의 화면 중 2 개의 화면은 2 개의 정보를, 1개의 화면은 1 개의 정보를 보여주어야 하므로, 5 가지 정보를 2 개, 2 개, 1 개로 나누는 방법의 수는 ${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \dfrac{1}{2!} = 15$(가지)이고,

이것을 화면에 보여주는 경우의 수는 6 (가지)이다.

$\therefore \ 15 \times 6 = 90$ (가지)

27. [출제의도] 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

(i) 3 개의 예선문제 모두 맞힌 경우

${}_3C_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$

(ii) 예선문제 2 개 맞추고, 찬스문제 맞힌 경우

${}_3C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{18}$

$\therefore \ \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{5}{54}$

28. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항 추론하기

$\{a_n\}$: 1, 2, 4, 6, 9, $\cdots$ 이므로

$a_{2k-1} = k^2,\ \ a_{2k} = k(k+1)$ 이다.

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면

$\{b_n\}$: 1, 2, 2, 3, 3, 4, $\cdots$ 이므로

$b_n = 15$ 인 n 은 28, 29 이다.

$\therefore \ 28 + 29 = 57$

29. [출제의도] 역행렬의 존재성 이해하기

$A - kE = \begin{pmatrix} 2-k & 3 \\ 3 & 4-k \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않으려면 $(2-k)(4-k) - 9 = 0$

$k^2 - 6k - 1 = 0$ 의 두 근을 $k_1,\ k_2$ 라 하면

$k_1 + k_2 = 6$, $k_1 k_2 = -1$

$\therefore \ {k_1}^2 + {k_2}^2 = 38$

30. [출제의도] 도형의 성질과 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2 M}{(6n+3)^2} + \frac{(2n+1)^2 M}{(6n+3)^2} + \frac{(3n+2)^2 M}{(6n+3)^2}\right\}$

$= \dfrac{7}{18}M$

$\therefore \ p+q = 25$