제 2 교시

수리 영역 (나형)

성명		수험번호						3				

○ 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으시오.
○ 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_3\left(\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\right)^2$의 값은? [2점]

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

2. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{7}{12}$$

일 때, $\mathrm{P}(\mathrm{B})$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. 남자 3명과 여자 4명이 한 줄로 서서 등산을 할 때, 남자가 양끝에 서는 경우의 수는? [3점]

① 360 ② 480 ③ 600 ④ 720 ⑤ 1440

5. 실수 전체의 집합에서 양의 실수의 집합으로 대응되는 함수 $f(x)$가 임의의 실수 a, b에 대하여 $f(ab)=\{f(b)\}^a$을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)$의 값은? (단, $f(1)=64$) [3점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

6. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=ka_n$을 만족하는 k가 두 자리 자연수가 되게 하는 n의 최댓값은? (단, $a_1 \neq 0$) [3점]

① 191 ② 193 ③ 195 ④ 197 ⑤ 199

7. 이차정사각행렬 A는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $A^2-A+E=O$
(나) $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

연립방정식 $(A+E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

8. 부등식 $y \geqq x^2$의 영역에 속하는 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여 $\log_2(y+1)-\log_2|x|$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

9. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4 점]

<보 기>

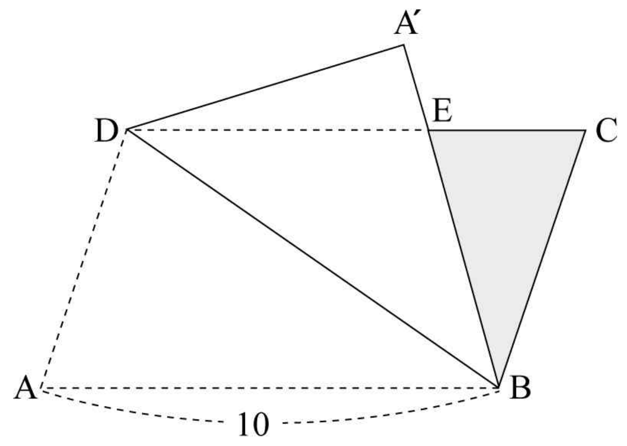
ㄱ. $AB=O$ 이면 $A^2B^2=O$
ㄴ. $A+B=E$ 이면 $AB=BA$
ㄷ. $A^2=O$ 이면 행렬 $A+E$의 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 어떤 고등학교 학생회장 선거에 갑과 을, 두 명의 후보가 출마했다. 갑과 을의 선거운동 시작 전 지지율은 각각 70%, 30%이었으나 선거 운동 후 갑을 지지하던 학생 중 60%가 을에게 투표하여 을이 57%의 득표율로 당선되었다. 투표 후 을에게 투표한 학생 중 한 명을 선택했을 때 이 학생이 선거운동 시작 전에도 을 후보를 지지하던 학생일 확률은? (단, 기권과 무효표는 없다.) [3 점]

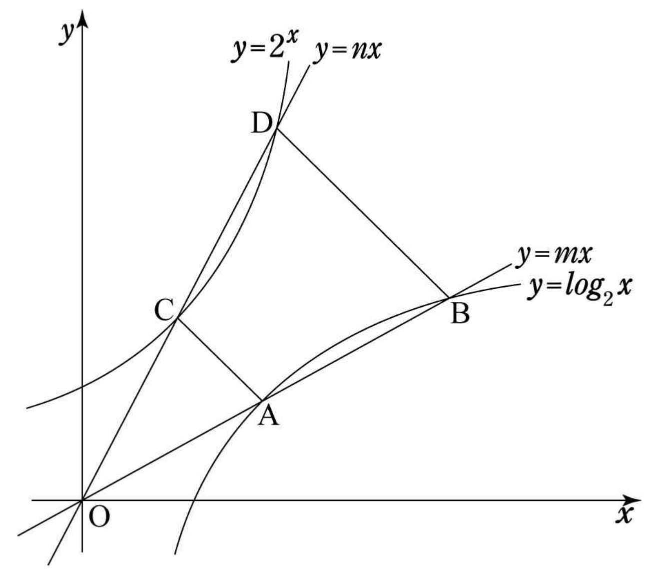
① $\frac{3}{19}$ ② $\frac{4}{19}$ ③ $\frac{5}{19}$ ④ $\frac{6}{19}$ ⑤ $\frac{7}{19}$

11. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=10$ 인 평행사변형 ABCD가 있다. 이 도형을 대각선 BD를 따라 접어서 생기는 삼각형 EBC의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{5}$ 이고, $\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{EB}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 선분 AD의 길이는? [4 점]



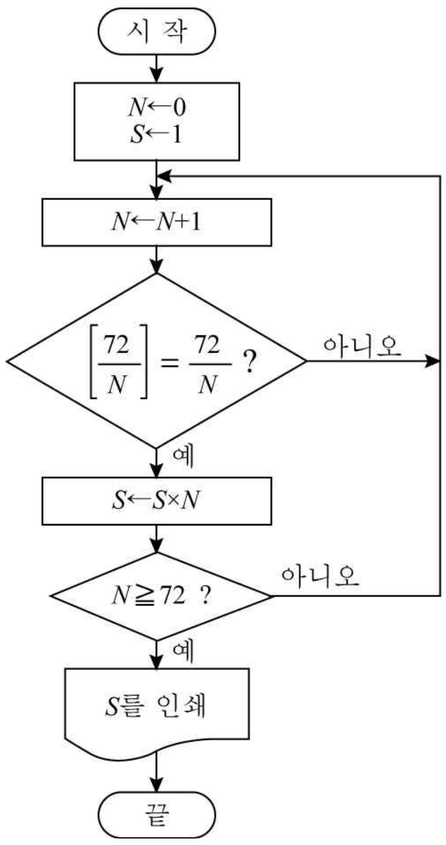
① $2\sqrt{11}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{46}$ ④ $\sqrt{47}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

12. 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=mx$ 의 두 교점을 A, B라 하고, 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 직선 $y=nx$ 의 두 교점을 C, D라 하자. 사각형 ABDC는 등변사다리꼴이고 삼각형 OBD의 넓이는 삼각형 OAC의 넓이의 4배일 때, $m+n$ 의 값은? (단, O는 원점) [3 점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

13. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수) [4점]



① $2^{18}\times 3^{12}$ ② $2^{12}\times 3^{18}$ ③ $2^{14}\times 3^{11}$
④ $2^{17}\times 3^{12}$ ⑤ $2^{12}\times 3^{17}$

14. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음은 등식

$$nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{k=1}^{n} k\,a_k \ (n \geqq 2) \ \cdots\cdots \ (\bigstar)$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=2$일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{(가)}$ 이므로 (★)이 성립한다.

(2) $n=i\,(i \geqq 2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면,

$$(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} S_k = (i+1)S_{i+1} - \left(\sum_{k=1}^{i-1} S_k + S_i\right)$$
$$= (i+1)S_{i+1} - (\ \boxed{(나)}\ )$$
$$= \sum_{k=1}^{i} k\,a_k + \boxed{(다)}$$
$$= \sum_{k=1}^{i+1} k\,a_k$$

따라서, $n=i+1$일 때, $(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} S_k = \sum_{k=1}^{i+1} k\,a_k$

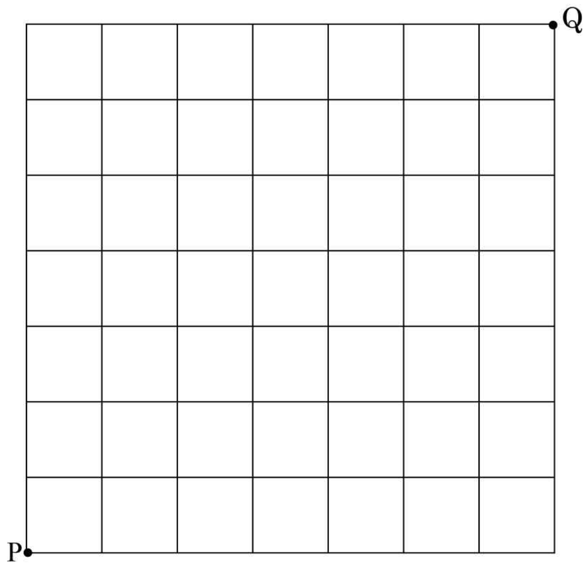
가 성립한다.

(1)과 (2)에 의하여 등식 (★)은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	a_1+a_2	$(i-1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$i(S_i - S_{i-1})$
②	a_1+a_2	$(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$i(S_{i+1} - S_i)$
③	a_1+2a_2	$(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$i(S_{i+1} - S_i)$
④	a_1+2a_2	$(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$(i+1)(S_{i+1} - S_i)$
⑤	a_1+2a_2	$(i-1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$(i+1)(S_{i+1} - S_i)$

15. 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망이 있다.



P 지점에서 출발하여 Q 지점까지 도로를 따라 최단 거리로 갈 때, 도중에 방향을 바꾸는 횟수가 x 번인 경로의 수를 $f(x)$ 라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4 점]

<보 기>

ㄱ. $f(1)=2$
ㄴ. $f(2)=f(12)$
ㄷ. $f(x)$ 의 최댓값은 $f(7)$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 동심원 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 의 반지름의 길이를 각각 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 이라 하고, 그 넓이를 각각 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 이라 할 때, $S_{n+1}=2S_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ 이 성립한다. $r_1=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}$ 의 값은? [3 점]

① $1+\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $1+2\sqrt{2}$
④ $2+2\sqrt{2}$ ⑤ $1+3\sqrt{2}$

17. 달걀의 신선도를 결정하는 중요한 요소 중 하나가 HU(호우 유니트)값이다. 농후단백의 높이(뭉쳐있는 흰자의 높이)가 h(mm) 이고 무게가 w(g) 일 때, HU는 다음과 같이 계산한다.

$$\text{HU}=100\log\left(h+7.57-1.7\,w^{0.37}\right)$$

HU $=90$이고 무게가 50g일 때 농후단백의 높이 h 의 값은? (단, $1.7\times 50^{0.37}=7.24$, $\log 2=0.30$ 으로 계산한다.) [3 점]

① 6.24 ② 6.50 ③ 6.87
④ 7.13 ⑤ 7.67

단답형(18 ~ 25)

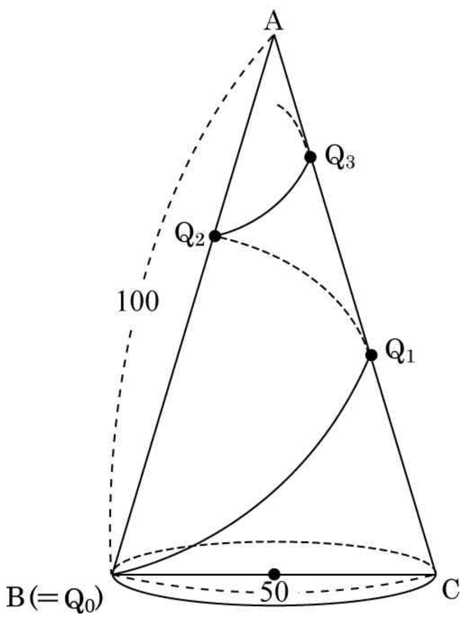
18. 방정식 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x}=9^{3-x}$ 의 해를 구하시오. [3 점]

19. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{-1}(2A+B)$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3 점]

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k$의 전개식에서 상수항을 구하시오. [3 점]

21. 임의의 자연수 p, q, r에 대하여,
수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$, $a_p+a_q+a_r=a_{p+q+r}$를 만족하고,
수열 $\{b_n\}$은 $b_1=\dfrac{3}{5}$, $b_p b_q=b_{p+q}$를 만족한다.
이 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_n}{n}$의 값을 구하시오. [4 점]

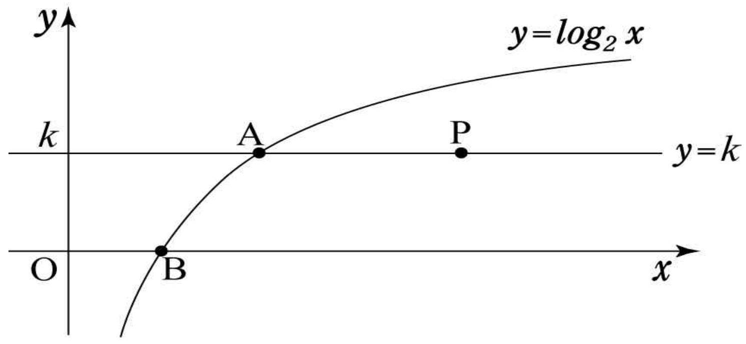
22. 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하고 선분 BC를 밑면의 지름으로 하며 $\overline{\mathrm{AB}}=100$, $\overline{\mathrm{BC}}=50$인 직원뿔이 있다. 모선 AC 위의 점 Q_1은 점 B에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AC에 최단 거리로 이르는 점이고, 모선 AB 위의 점 Q_2는 점 Q_1에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AB에 최단 거리로 이르는 점이다. 이와 같은 방법으로 점 Q_n은 모선 AB 또는 AC 위의 점 Q_{n-1}에서 원뿔의 옆면을 돌아 다른 모선에 최단 거리로 이르는 점이라고 하자. 점 Q_{n-1}에서 점 Q_n에 이르는 최단 거리를 l_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값은 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, $\mathrm{B}=\mathrm{Q}_0$, a와 b는 유리수이다.) [4 점]



23. 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수를 $a_1 a_2 a_3 a_4$라 한다. 예를 들면, 1230인 경우 $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=0$이다. 이와 같이 네 자리 자연수 $a_1 a_2 a_3 a_4$가 $a_1 < a_2 < a_3,\ a_3 > a_4$를 만족할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4 점]

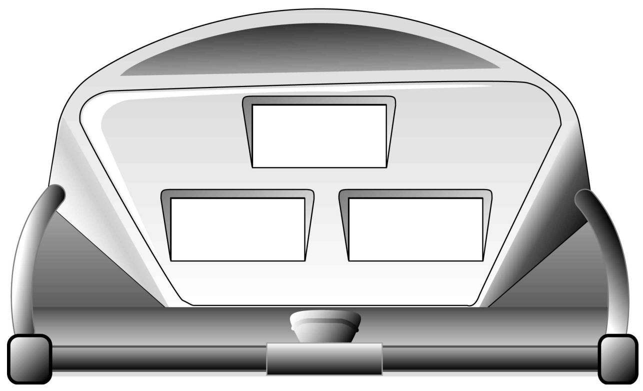
24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n^2+4}$의 값을 구하시오. [3 점]

25. 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=k$ (k는 자연수), x축과의 교점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$ 위의 한 점 P에 대하여 직선 OP가 $\angle$AOB를 이등분할 때, 선분 AP의 길이를 $f(k)$라 하자. $\sum_{k=1}^{4}\{f(k)\}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점) [4 점]



5지선다형(26 ~ 29)

26. 체력단련장에서 사용하는 운동기구에는 그림과 같이 운동 관련 정보 안내 화면이 3개 있다. 한 화면이 최소 1가지, 최대 2가지의 정보를 동시에 보여줄 수 있다. 다섯 가지 정보인 속도, 거리, 시간, 심장 박동수, 칼로리 소모량을 동시에 모두 보여줄 수 있는 방법의 수는? (단, 한 화면에서 두 정보의 위치는 고려하지 않는다.) [3 점]



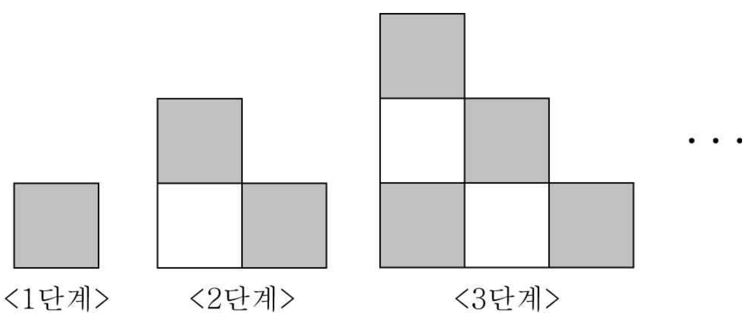
① 90 ② 91 ③ 92 ④ 93 ⑤ 94

27. 철수는 3개의 예선문제와 결과에 따라 1개의 찬스문제가 주어지는 퀴즈대회에 참가하는데, 찬스문제는 예선문제를 2개 맞히고 1개 틀린 경우만 주어진다. 3개의 예선문제를 모두 맞히거나 찬스문제를 맞혀야 예선을 통과한다. 각각의 예선문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{3}$이고, 찬스문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{4}$일 때, 예선을 통과할 확률은? [3점]

① $\frac{5}{54}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{7}{54}$ ④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

28. 한 면은 흰 색, 다른 면은 검은색인 같은 크기의 정사각형 모양의 카드를 다음 규칙에 의해 그림과 같이 놓는다.

[1단계] 검은색 면이 보이도록 카드를 한 개 놓는다.
[2단계] 1단계에서 놓여진 카드를 흰 색 면이 보이도록 뒤집고 그 카드 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 두 개의 카드를 놓는다.
[3단계] 2단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록 뒤집고 2단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 세 개의 카드를 놓는다.
⋯
[n단계] $n-1$단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록 뒤집고 $n-1$단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 n개의 카드를 놓는다.



n단계에서 보이는 면의 색이 검은색인 카드의 개수를 a_n이라 할 때, $a_{n+1}-a_n=15$가 되는 모든 n의 값의 합은? [4점]

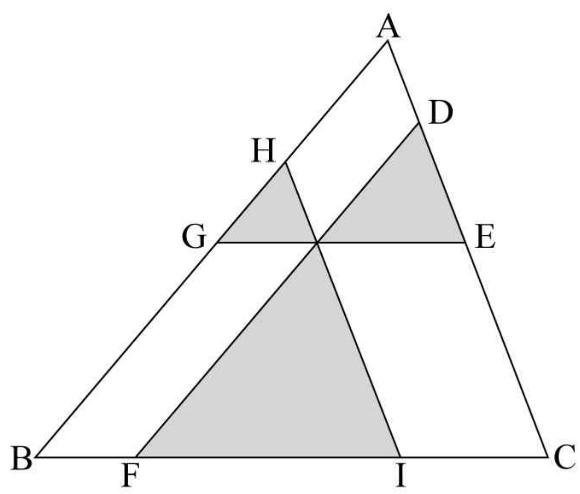
① 29 ② 31 ③ 49 ④ 57 ⑤ 65

29. 실수 k와 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여, 행렬 $A-kE$의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 k의 값을 k_1, k_2라 할 때, $k_1^2+k_2^2$의 값은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

① 37 ② 38 ③ 39 ④ 40 ⑤ 41

단답형

30. 그림과 같이 넓이가 M인 삼각형 ABC가 있다.
자연수 n과 선분 AC 위의 두 점 D, E에 대하여 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{EC}}=n:(2n+1):(3n+2)$이고 $\overline{\mathrm{DF}}//\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{GE}}//\overline{\mathrm{BC}}$이다. 선분 DF와 선분 GE의 교점을 지나는 선분 HI는 선분 AC와 평행하다. 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{q}{p}M$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.