2010학년도 7월 고3 전국연합학력평가

정답 및 해설

수리 영역

"가"형 정답

1	③	2	②	3	②	4	①	5	③
6	④	7	⑤	8	④	9	③	10	②
11	③	12	①	13	③	14	④	15	⑤
16	①	17	②	18	20	19	13	20	420
21	15	22	200	23	36	24	53	25	370

해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3\left(\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\right)^2=\log_3\left(3^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\right)^2$

$=\log_3 3^{\frac{11}{3}}=\frac{11}{3}$

2. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률 계산하기

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 에서

$\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{4}$ 이므로

$\therefore\ P(B)=\frac{1}{3}$

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$-x=t$ 로 치환하면

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$

4. [출제의도] 분수부등식 이해하기

주어진 식의 양변에 $(x-1)^2(x-2)^2$ 을 곱하면

$(x-1)(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\le 0$

$-\sqrt{2}\le x<1$ 또는 $\sqrt{2}\le x<2$

이를 만족하는 정수 x 는 $-1, 0$ 이다.

∴ 2 개

5. [출제의도] 식을 변형하여 함숫값 이해하기

$f(1)=f\left(2\times\frac{1}{2}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=64$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=8$

$f(1)=f\left(3\times\frac{1}{3}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^3=64$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=4$

$f(1)=f\left(6\times\frac{1}{6}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^6=64$, $f\left(\frac{1}{6}\right)=2$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)=14$

6. [출제의도] 극한값의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$y=x^2$ 과 $y=-x+n$ 의 교점의 x 좌표를 α_n , β_n (단, $\alpha_n<\beta_n$) 라 하면 교점의 좌표는 $(\alpha_n,\ -\alpha_n+n)$, $(\beta_n,\ -\beta_n+n)$ 이다. ⋯ ①

또한 α_n , β_n 는 $x^2+x-n=0$ 의 두 근이므로 $\alpha_n+\beta_n=-1$, $\alpha_n\beta_n=-n$ 이다. ⋯ ②

①, ② 에 의하여

$l_n^{\,2}=2(\alpha_n-\beta_n)^2$

$=2\left\{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\right\}=8n+2$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n^{\,2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+2}{n}=8$

7. [출제의도] 역행렬을 이용하여 연립방정식의 해 이해하기

$A^2-A+E=O$

$(A+E)(A-2E)+3E=O$

$(A+E)(A-2E)=-3E$

$(A+E)\left\{-\frac{1}{3}(A-2E)\right\}=E$ 이므로

$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$ 이다.

$(A+E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A+E)^{-1}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}(A-2E)\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

$=(-A+2E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

$\alpha=-1,\ \beta=5$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

8. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 미분계수 계산하기

$f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{10}}{10}$ 이므로

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$ 이다.

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^9}=\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{2^{10}-1}{2^9}=\frac{1023}{512}$

$\therefore\ q-p=1023-512=511$

9. [출제의도] 두 함수의 그래프를 이용하여 합성함수의 극한값 추론하기

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & (x\ge 0)\\ -\frac{1}{2}x^2 & (x<0)\end{cases}$ 이므로

ㄱ. $\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2}x=0$

$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to-0}\left(-\frac{1}{2}x\right)=0$

∴ 참

ㄴ. $\lim_{x\to\sqrt{2}+0}g(f(x))=\lim_{t\to1+0}g(t)=2$ 이고

$\lim_{x\to\sqrt{2}-0}g(f(x))=\lim_{t\to1-0}g(t)=1$ 이므로

∴ 거짓

ㄷ. $\lim_{x\to1+0}g(g(x))=\lim_{t\to2-0}g(t)=1$

$\lim_{x\to1-0}g(g(x))=1$

$\lim_{x\to1}g(g(x))=1$ 이고 $g(g(1))=1$ 이므로

$x=1$ 에서 연속이다. ∴ 참

10. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$F'(x)=f(x)$ 이므로

$\int f(x)dx=F(x)+C$ 이다.

따라서 $A(a,\ F(a))$, $B(a+c,\ F(a+c))$ 를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{F(a+c)-F(a)}{(a+c)-a}=\frac{1}{c}\{F(a+c)-F(a)\}$

$=\frac{1}{c}\int_a^{a+c}f(x)dx$

$=\frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{c}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$

11. [출제의도] 확률변수에 따른 확률분포 추론하기

확률변수 X 가 정규분포 $N(60,\ 5^2)$ 을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N(60,\ 0.1^2)$을 따른다.

또한, 불량품으로 판정될 확률은

$P(X\le 50)=P(Z\le-2)=0.02$

이므로 확률변수 Y 는 이항분포 $B(2500,\ 0.02)$를 따르고, 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 7^2)$을 따른다.

ㄱ. $P(\overline{X}\ge 60)=\frac{1}{2}$ ∴ 참

ㄴ. $P(Y\ge 57)=P(Z\ge 1)=0.16$

$P(\overline{X}\le 59.9)=P(Z\le-1)=0.16$ ∴ 참

ㄷ.

$P(60-k\le X\le 60+k)=P\left(-\frac{k}{5}\le Z\le\frac{k}{5}\right)$

$P(60-k\le\overline{X}\le 60+k)=P\left(-\frac{k}{0.1}\le Z\le\frac{k}{0.1}\right)$

$P(60-k\le X\le 60+k)<P(60-k\le\overline{X}\le 60+k)$

∴ 거짓

12. [출제의도] 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소 이해하기

조건 (나)에 의하여 $f(x)=ax^2+b$ 라 하면

$f(0)=-2$ 이므로 $b=-2$

$f(x)=ax^2-2$, $f'(x)=2ax$

$f(f'(x))=f'(f(x))$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$ 이다.

$F(x)$ 가 감소하는 구간은 부등식 $F'(x)<0$

즉, $f(x)<0$ 을 만족하는 구간이므로

$\frac{1}{2}x^2-2<0$, $-2<x<2$

∴ 감소하는 구간의 길이는 4

13. [출제의도] 미분을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

ㄱ. 광원과 물체의 속도는 각각

$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}$, $\frac{dy}{dt}=2t-\frac{11}{2}$ 이므로

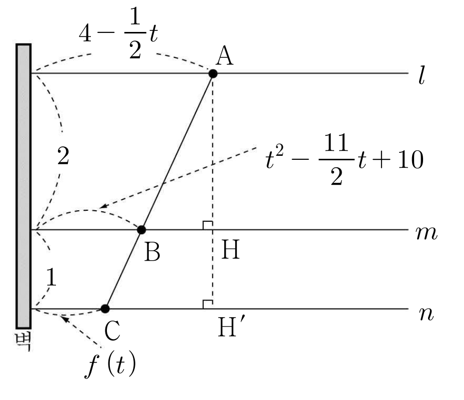
$t=\frac{5}{2}$ 에서 속도는 $-\frac{1}{2}$ 로 같다. ∴ 참

ㄴ. $\overline{AB}+\overline{BC}=3$ 인 순간은

$t^2-\frac{11}{2}t+10=4-\frac{1}{2}t$ 이므로

$t=2$ 또는 $t=3$ ∴ 참

ㄷ. 그림자 C 의 시각 t 에서 벽으로부터의 거리를 $f(t)$, 점 A 에서 직선 m, n 에 내린 수선의 발을 각각 H, H′ 라 하자.



$\overline{BH}=\left(4-\frac{1}{2}t\right)-\left(t^2-\frac{11}{2}t+10\right)=-t^2+5t-6$

$\overline{CH'}=4-\frac{1}{2}t-f(t)$

$\overline{BH}:\overline{CH'}=2:3$ 이므로

$f(t)=\frac{3}{2}t^2-8t+13$ 이다.

속도 v 는 $v=\frac{df(t)}{dt}=3t-8$ 이므로

가속도 a 는 $a=\frac{dv}{dt}=3$ 이다. ∴ 거짓

14. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 식 증명하기

(ⅰ) $n=2$ 일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{a_1+2a_2}$

(ⅱ) $n=i$ $(i\ge 2)$일 때, 주어진 등식이 성립함을

가정하면,

즉, $iS_i - \sum_{k=1}^{i-1} S_k = \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$ 임을 가정할 때,

$$(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} S_k$$
$$= (i+1)S_{i+1} - \left(\sum_{k=1}^{i-1} S_k + S_i\right)$$
$$= (i+1)S_{i+1} - \left(\boxed{(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k a_k}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{i} k\,a_k + \boxed{(i+1)(S_{i+1} - S_i)}$$
$$= \sum_{k=1}^{i+1} k a_k$$

15. [출제의도] 조합을 이용하여 경우의 수 추론하기

$$f(x) = \begin{cases} 2 \times {}_6\mathrm{C}_\mathrm{k} \times {}_6\mathrm{C}_{\mathrm{k}-1} & (\mathrm{x}=2\mathrm{k}) \\ 2 \times {}_6\mathrm{C}_{\mathrm{k}-1} \times {}_6\mathrm{C}_{\mathrm{k}-1} & (\mathrm{x}=2\mathrm{k}-1) \end{cases}$$

ㄱ. $f(1)=2$ $\therefore$ 참
ㄴ. $f(2)=12$, $f(12)=12$ $\therefore$ 참
ㄷ. $f(x)$ 의 최댓값은 $f(7)$ $\therefore$ 참

16. [출제의도] 미분과 적분의 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

위 식의 양변에 극한을 취하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

$g'(x)=f(x)$ 이므로

$$g(x) = \int f(x)dx = \int (x^2-4x)dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + C$$

$g(x)=0$ 이므로 $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + C = 0$ 이다.

$\therefore$ 모든 근의 합 6

17. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

영역 $x^2+y^2<1$ 위의 임의의 두 점 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 에 대하여

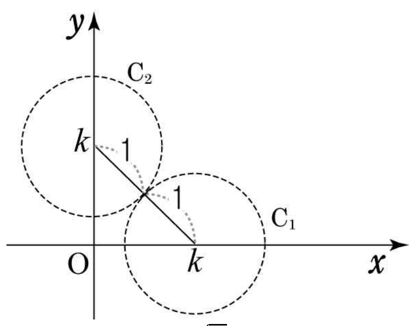
$M+kE = \begin{pmatrix} x_1+k & y_1 \\ x_2 & y_2+k \end{pmatrix}$ 이고,

$M+kE$ 의 역행렬이 항상 존재해야 하므로

$\frac{y_1}{x_1+k} \neq \frac{y_2+k}{x_2}$ 이다.

따라서, 점 $\mathrm{C}(\mathrm{x}_1+\mathrm{k}, \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{D}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2+\mathrm{k})$ 라 하면

점 C는 $(x-k)^2+y^2<1$ 의 임의의 점이고 …①
점 D는 $x^2+(y-k)^2<1$ 의 임의의 점이다. …②
원점을 지나는 직선이 두 영역을 동시에 지나지 않아야 한다.



따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

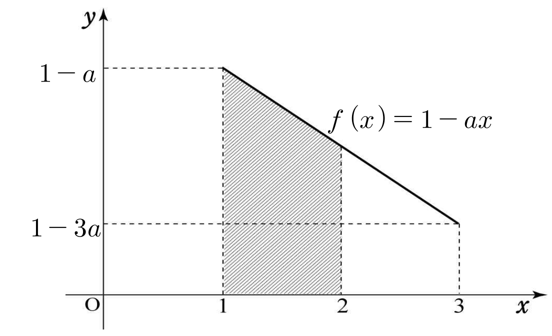
18. [출제의도] 무리방정식 이해하기

$\sqrt{x^2-1} = x - \frac{1}{2}$, $x^2-1 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

$x = \frac{5}{4}$ 는 무연근이 아니므로 $\alpha = \frac{5}{4}$

$\therefore$ $16\alpha = 20$

19. [출제의도] 확률밀도함수 이해하기



$f(x) = 1-ax$ 가 확률밀도함수이므로

$\frac{1}{2}\times(2-4a)\times 2 = 1$, $a = \frac{1}{4}$ 이다.

$\mathrm{P}(1 \leqq X \leqq 2)$ 은 어두운 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(1 \leqq X \leqq 2) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times 1 = \frac{5}{8}$

$\therefore$ $p+q=13$

20. [출제의도] 분수부등식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

A 구간의 평균 속력을 x $(x>20)$ 라 하자.
전체 구간에서의 평균 속력이 100 이상이므로 전체 구간을 주행하는데 걸리는 시간은 $\frac{6}{100}$ 시간 이하여야 한다. 따라서

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{100} + \frac{3}{x-20} \leqq \frac{6}{100}$$

$x>20$ 이므로 $x^2-120x+800 \geqq 0$

$\therefore$ $x \geqq 60+20\sqrt{7}$

A 구간의 평균 속력의 최솟값은 $60+20\sqrt{7}$

$\therefore$ $ab=420$

21. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$p=q=1$, $r=n$ 이면 $2a_1+a_n=a_{n+2}$ 이므로

$a_{n+2} = a_n + 20$

$a_1 = 10$ 이므로 $a_3 = 30$, $a_5 = 50$

$a_5 = a_3 + 2a_1$ 이므로 $a_2 = 20$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 10 인 등차수열이다.

$a_n = 10n$ …①

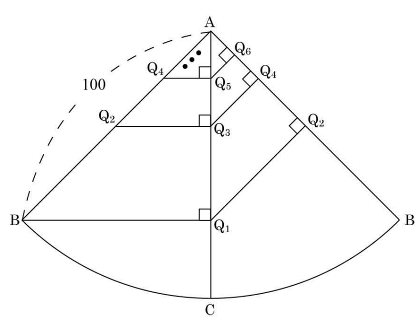
수열 $\{b_n\}$에서 $p=1$ 을 대입하여 정리하면

$b_n = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ …②

①, ②에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n\times(\frac{3}{5})^n}{n}$$
$$= 10\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 15$$

22. [출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ 이므로

$l_1 = 50\sqrt{2}$, $l_2 = 50$, $l_3 = 25\sqrt{2}$, …

따라서, $l_n = 50\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{50\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 100+100\sqrt{2}$$

$\therefore$ $a+b=200$

23. [출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성의 개념 이해하기

$f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로,

$-\frac{1}{2}(3-a)^2+b=9$ … ①

또한 $f'(x) = \begin{cases} 2x & (x \leqq 3) \\ -x+a & (x>3) \end{cases}$

$f(x)$ 는 $x=3$ 에서 미분가능하므로 $a=9$ … ②

①, ② 에 의하여

$a=9$, $b=27$

$\therefore$ $a+b=36$

24. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$0 \leqq x < 1$ 일 때, $g(x) = \int_0^x 2t\,dt = x^2$

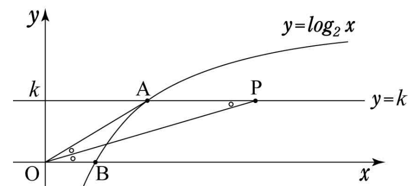
$x \geqq 1$ 일 때, $g(x) = \int_0^1 2t\,dt + \int_1^x 2\,dt = 2x-1$

$g(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leqq x < 1) \\ 2x-1 & (x \geqq 1) \end{cases}$

$V = \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx + \pi\int_1^2 (2x-1)^2 dx = \frac{68}{15}\pi$

$\therefore$ $q-p=53$

25. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



직선 OP 가 $\angle\mathrm{AOB}$ 의 이등분선이므로

$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{POB}$ 이고

$\angle\mathrm{POB} = \angle\mathrm{APO}$ (엇각)이므로

$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{APO}$, $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AP}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AP}} = f(k)$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}} = f(k)$.

A 의 좌표가 $(2^k, k)$ 이므로

$f(k) = \sqrt{4^k+k^2}$

$\therefore$ $\sum_{k=1}^{4}\{f(k)\}^2 = \sum_{k=1}^{4}(4^k+k^2) = 370$

미분과 적분 정답

26	③	27	②	28	④	29	⑤	30	251

26. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}+e^{x\sin 2x}-2}{x\ln(1+x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\ln(1+x)}$$
$$+ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 2x}-1}{x\sin 2x}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\times\frac{x}{\ln(1+x)}$$
$$= 1+2 = 3$$

27. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ, 점 $(6, 2)$ 와 원점을 지나는 직선이 x 축과 이루는 예각의 크기를 γ 라 하자.

$\alpha < \beta$ 일 때, $\frac{\theta}{2} + \alpha = \gamma$, $\frac{\theta}{2} + \gamma = \beta$ 이므로

$\alpha + \beta = 2\gamma$ 이고 $\tan\gamma = \frac{1}{3}$ 이다.

$\tan(\alpha+\beta) = \tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{3}{4}$

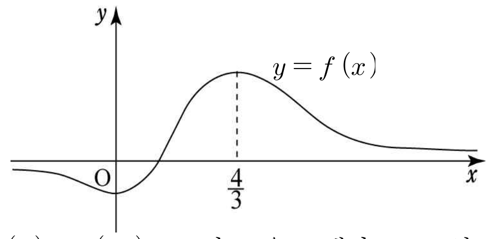
28. [출제의도] 미분을 이용하여 역함수의 성질

이해하기
역함수는 $y=x$ 대하여 대칭이므로
함수 $f(x)=\ln\frac{x}{k}$ 의 접선 중 기울기가 1 인 접선에서 $y=x$ 까지 거리의 두 배가 l_k 이다.
$f'(x)=1$ 인 접점의 좌표는 $(1,\ \ln\frac{1}{k})$ 이다.

$$d=\frac{\left|1-\ln\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1+\ln k}{\sqrt{2}}=\frac{(1+\ln k)\sqrt{2}}{2}$$

$l_k=2d=(1+\ln k)\sqrt{2}\geq 3\sqrt{2}$ 에서 $k\geq e^2$
$\therefore$ k 의 최솟값은 8

29. [출제의도] 미분을 이용하여 함수의 그래프 추론하기
ㄱ. $f'(x)=\dfrac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$, $f'(1)=1$
접선의 방정식은 $y=x-\dfrac{1}{2}$ 이므로
$\therefore$ 접선과 원점 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $\therefore$ 참
ㄴ. $x=0$ 에서 최솟값 $-\dfrac{1}{8}$ 을 갖는다. $\therefore$ 참
ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)-f(10)=0$ 의 근은 2 개다. $\therefore$ 참

30. [출제의도] 미분을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
분침의 속력 : $\dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}$
시침의 속력 : $\dfrac{\frac{\pi}{6}}{60}=\dfrac{\pi}{360}$
3 시 정각에서 t (분) 후 분침과 시침이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, 4 시 정각 근처에서
$\theta=\dfrac{\pi}{30}t-\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{360}t\right)=\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{360}t$
$\angle \mathrm{POQ}=2\pi-\theta$ 이므로
$S=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\sin(2\pi-\theta)=3\cos\dfrac{11\pi}{360}\mathrm{t}$
$\dfrac{dS}{dt}=-3\times\dfrac{11\pi}{360}\times\sin\dfrac{11\pi}{360}t$
$t=60$ 일 때, $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{11}{240}\pi$
$\therefore$ $p+q=251$

확률과 통계 정답

26	①	27	③	28	⑤	29	③	30	404

26. [출제의도] 줄기와 잎 그림에서 평균과 중앙값 계산하기
$a=\dfrac{68+72}{2}=70$,
$b=\dfrac{84+88+92+96}{4}=90$
$\therefore$ $b-a=20$

27. [출제의도] 확률의 곱의 법칙 이해하기
$\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}$
$=\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{25}+\dfrac{1}{50}=\dfrac{27}{50}$

28. [출제의도] 기댓값과 표준편차의 성질 이해하기
확률변수 X 는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ 을 따르고
$\mathrm{P}(X<a-3)=\mathrm{P}(X>b+2)$ 이므로
$\dfrac{(a-3)+(b+2)}{2}=m$
$m=\dfrac{a+b-1}{2}$ $\cdots$ ①
$Y=\dfrac{1}{3}X+1$, $\mathrm{E(Y)}=51$ 이므로
$\mathrm{E(Y)}=\mathrm{E}(\frac{1}{3}\mathrm{X}+1)=\frac{1}{3}\mathrm{m}+1$
$m=150$ $\cdots$ ②
①, ② 에 의하여 $a+b=301$
$\mathrm{V(Y)}=\mathrm{V}(\frac{1}{3}\mathrm{X}+1)=\frac{1}{9}\mathrm{V(X)}$
$\frac{1}{9}\mathrm{V(X)}=\frac{4}{9}$ 이므로 $\mathrm{V(X)}=4$, $\sigma=2$
$\therefore$ $a+b+\sigma=303$

29. [출제의도] 분산의 성질 추론하기
ㄱ. $S(a)=0$ 이면 $\mathrm{V(X)}=0$ 이다. $\therefore$ 참
ㄴ. (반례) $\sum_{i=1}^{n}x_i\,p_i=m$ 라 할 때,
$S(m-1)=S(m+1)$ $\therefore$ 거짓
ㄷ. $S(a)$ 는 a 가 X 의 평균일 때, 최솟값을 갖는다.
확률변수 X 의 평균 $\sum_{i=1}^{n}x_i\,p_i=m$ 이라 하면

$$\begin{aligned}S(a)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-m)+(m-a)\}^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-m)^2+2(x_i-m)(m-a)\\&\qquad+(m-a)^2\}p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-m)^2+(m-a)^2\}\,p_i\end{aligned}$$

$(\because (m-a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)p_i=0$ 이므로$)$
$S(a)$ 는 $a=m$ 일 때,
최솟값 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$ 를 갖는다. $\therefore$ 참

30. [출제의도] 확률질량함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
이항분포를 따르는 확률변수X 의 확률질량함수는
$\mathrm{P}(X=x)={}_{n}\mathrm{C}_{x}\ p^x\ (1-p)^{n-x}$
$\mathrm{P}(X=2)=48\times\mathrm{P}(X=1)$
${}_{25}\mathrm{C}_2\ \mathrm{p}^2\,(1-\mathrm{p})^{23}=48\times{}_{25}\mathrm{C}_1\ \mathrm{p}\ (1-\mathrm{p})^{24}$
$p=\dfrac{4}{5}$
$\mathrm{E}(X)=np=20$, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)=4$ 이므로
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$\therefore$ $\mathrm{E}(X^2)=404$

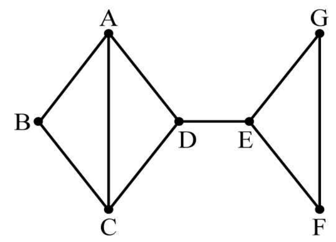
이산수학 정답

26	②	27	③	28	④	29	⑤	30	85

26. [출제의도] 경우의 수 계산하기
${}_3\mathrm{H}_5\times{}_3\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_5\times{}_4\mathrm{C}_2=126$

27. [출제의도] 그래프와 해밀턴 회로의 관계 이해하기
꼭짓점을 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소 색의 수가 3 인 그래프는 ②, ③, ④번이다. 그런데 ③ 번의 그래프는 해밀턴 회로가 존재하지 않는다.

28. [출제의도] 생성수형도의 개념 이해하기



회로 ABCD 에서 수형도를 만들기 위해 변 2 개를 제거하는 방법의 가짓수 : 8 가지
회로 EFG 에서 수형도를 만들기 위해 변 1 개를 제거하는 방법의 가짓수 : 3 가지
$\therefore$ 생성수형도의 개수는 $8\times 3=24$ (가지)

29. [출제의도] 비둘기집의 원리를 이용하여 주어진 명제 증명하기
$n(X)=10$ 이므로 X 의 부분집합의 개수는
$\boxed{2^{10}=1024}$ 이다.
X 의 부분집합 중 원소의 합이 최소인 경우는 ϕ , 최대인 경우는 $\{91,\ 92,\ 93,\ \cdots,\ 100\}$ 이므로
$0\leq s_i\leq\boxed{955}$ 이다.
$A=\ X_i-(X_i\cap X_j)$ $\quad B=\boxed{X_j-(X_i\cap X_j)}$
이면 주어진 식은 성립한다.

30. [출제의도] 수의 규칙성을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
$a_1=1$, $a_2=3$ 이고 사탕 n 개를 뽑는 경우의 수는 사탕 $n-1$ 개를 뽑고 A 자판기 버튼을 누르는 방법과 사탕 $n-2$ 개를 뽑고 B 또는 C 자판기를 누르는 방법이 있다.
$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ $(n\geq 3)$
$\therefore$ $a_7=85$