

제 2 교시

수리 영역 (가형)

성명		수험번호						3			
----	--	------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으시오.
- 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_3 (\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[3]{3})^2$ 의 값은? [2 점]

- ① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

2. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{7}{12}$$

일 때, $P(B)$ 의 값은? [2 점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}$ 의 값은? [2 점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 분수부등식 $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x-2} \leq 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수는?

[3 점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

5. 실수 전체의 집합에서 양의 실수의 집합으로 대응되는 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 a, b 에 대하여 $f(ab) = \{f(b)\}^a$ 을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{6}\right)$ 의 값은? (단, $f(1) = 64$) [3 점]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

6. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = -x + n$ 이 만나서 생기는 두 교점 사이의 거리를 l_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n^2}{n}$ 의 값은?

[3 점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

7. 이차정사각행렬 A 는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $A^2 - A + E = O$ (나) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

연립방정식 $(A + E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ 의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$ 라고 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값은? (단, O 는 영행렬이고, E 는 단위행렬이다.) [4 점]

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

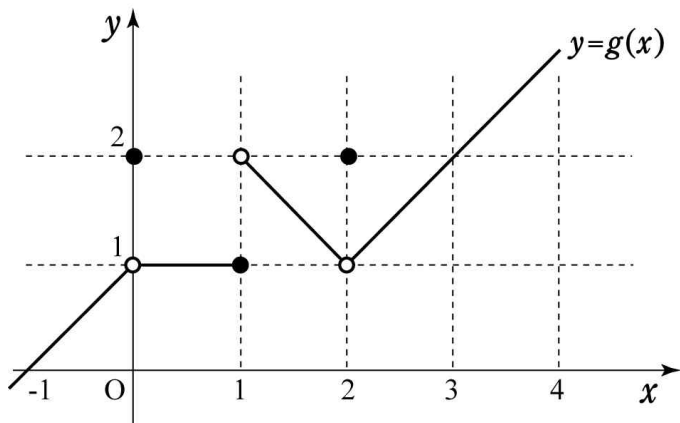
8. 함수 $f(x) = \sum_{n=1}^{10} \frac{x^n}{n}$ 에 대하여 $f'(\frac{1}{2}) = \frac{q}{p}$ 일 때, $q-p$ 의 값은? (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3 점]

- ① 508
- ② 509
- ③ 510
- ④ 511
- ⑤ 512

9. 실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(0)=0$ 인 함수 $y=f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = |x|$$

이다. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4 점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(f(x)) = 1$

ㄷ. 합성함수 $y = g(g(x))$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. $F'(x) = f(x)$ 인 이차함수 $y = f(x)$ 와 임의의 두 실수 a, c 에 대하여 서로 다른 두 점 $A(a, F(a)), B(a+c, F(a+c))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같은 값을 갖는 것은? [3 점]

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{c}{n}$ ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{ck}{n}\right) \frac{1}{n}$
 ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a+c + \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$ ④ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(c + \frac{ak}{n}\right) \frac{1}{2n}$
 ⑤ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}\right) \frac{2}{n}$

11. 어느 공장에서 생산되는 제품의 무게

<표준정규분포표>

X 는 평균이 60g, 표준편차가 5g인 정규분포를 따른다고 한다. 제품의 무게가 50g 이하인 제품은 불량품으로 판정한다. 이 공장에서 생산된 제품 중에서 2500개를 임의로 추출할 때, 2500개 무게의 평균을 \bar{X} ,

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

불량품의 개수를 Y 라고 하자. 위의 표준정규분포표를 이용하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4 점]

<보 기>

ㄱ. $P(\bar{X} \geq 60) = \frac{1}{2}$

ㄴ. $P(Y \geq 57) = P(\bar{X} \leq 59.9)$

ㄷ. 임의의 양수 k 에 대하여
 $P(60-k \leq X \leq 60+k) > P(60-k \leq \bar{X} \leq 60+k)$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 다음은 등식

$$nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{k=1}^n k a_k \quad (n \geq 2) \dots\dots (\star)$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n = 2$ 일 때,
 (좌변)=(우변)= (가) 이므로 (\star) 이 성립한다.

(2) $n = i$ ($i \geq 2$)일 때, (\star) 이 성립한다고 가정하면,

$$(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^i S_k = (i+1)S_{i+1} - \left(\sum_{k=1}^{i-1} S_k + S_i \right)$$

$$= (i+1)S_{i+1} - (\text{ (나) })$$

$$= \sum_{k=1}^i k a_k + \text{ (다) }$$

$$= \sum_{k=1}^{i+1} k a_k$$

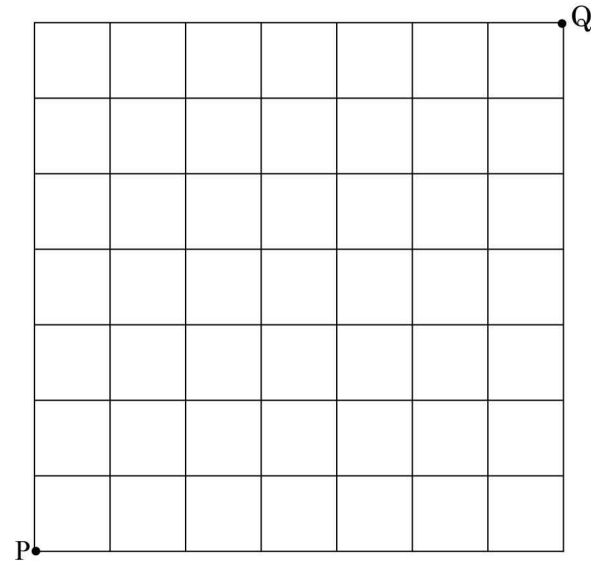
따라서, $n = i+1$ 일 때, $(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^i S_k = \sum_{k=1}^{i+1} k a_k$ 가 성립한다.

(1)과 (2)에 의하여 등식 (\star) 은 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4 점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|--------------|---------------------------------|------------------------|
| ① | $a_1 + a_2$ | $(i-1)S_i - \sum_{k=1}^i k a_k$ | $i(S_i - S_{i-1})$ |
| ② | $a_1 + a_2$ | $(i+1)S_i - \sum_{k=1}^i k a_k$ | $i(S_{i+1} - S_i)$ |
| ③ | $a_1 + 2a_2$ | $(i+1)S_i - \sum_{k=1}^i k a_k$ | $i(S_{i+1} - S_i)$ |
| ④ | $a_1 + 2a_2$ | $(i+1)S_i - \sum_{k=1}^i k a_k$ | $(i+1)(S_{i+1} - S_i)$ |
| ⑤ | $a_1 + 2a_2$ | $(i-1)S_i - \sum_{k=1}^i k a_k$ | $(i+1)(S_{i+1} - S_i)$ |

15. 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망이 있다.



P 지점에서 출발하여 Q 지점까지 도로를 따라 최단 거리로 갈 때, 도중에 방향을 바꾸는 횟수가 x 번인 경로의 수를 $f(x)$ 라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4 점]

<보 기>

ㄱ. $f(1) = 2$
 ㄴ. $f(2) = f(12)$
 ㄷ. $f(x)$ 의 최댓값은 $f(7)$ 이다.

- | | | |
|--------|-----------|--------|
| ① ㄱ | ② ㄷ | ③ ㄱ, ㄴ |
| ④ ㄴ, ㄷ | ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ | |

16. 두 함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 와 $y = g(x)$ 가 임의의 실수 h 에 대하여 $g(x+h) - g(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$ 일 때, 방정식 $g(x) = 0$ 의 모든 근의 합은? [3 점]

- ① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

17. 좌표평면 위에서 부등식 $x^2 + y^2 < 1$ 을 만족하는 영역에 존재하는 임의의 서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 에 대하여 행렬 $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ 라 하자. 행렬 $M + kE$ 의 역행렬이 항상 존재하기 위한 양수 k 의 최솟값은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4 점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

단답형(18 ~ 25)

18. 무리방정식 $\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} = x$ 의 해를 α 라고 할 때, 16α 의 값을 구하시오. [3점]

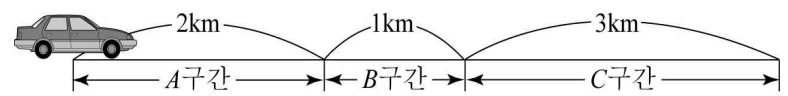
19. 연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = 1 - ax \quad (1 \leq x \leq 3)$$

확률 $P(1 \leq X \leq 2) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

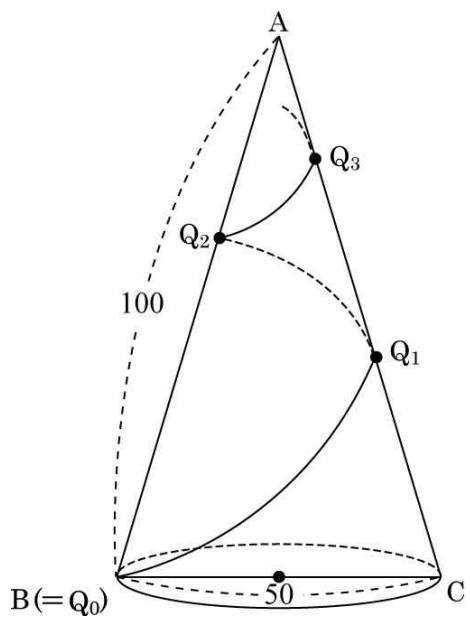
20. 자동차의 성능 실험을 위해 그림과 같이 거리가 2km, 1km, 3km인 구간 A , B , C 를 주행하였다. A 구간에서의 평균 속력이 C 구간에서의 평균 속력보다 20 km/시 빠르고, B 구간에서의 주행시간은 36초이다. 전체 6km인 구간에서의 평균 속력이 100 km/시 이상이 되기 위한 A 구간에서의 평균 속력의 최솟값은 $a + 20\sqrt{b}$ (km/시)이다. 이 때, ab 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) [4 점]



21. 임의의 자연수 p, q, r 에 대하여,
 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 10, a_p + a_q + a_r = a_{p+q+r}$ 를 만족하고,
 수열 $\{b_n\}$ 은 $b_1 = \frac{3}{5}, b_p b_q = b_{p+q}$ 를 만족한다.
 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n}$ 의 값을 구하시오. [3 점]

23. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 3) \\ -\frac{1}{2}(x-a)^2 + b & (x > 3) \end{cases}$ 이 모든 실수에서
 미분가능할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3 점]

22. 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하고 선분 BC를 밑면의
 지름으로 하며 $\overline{AB} = 100, \overline{BC} = 50$ 인 직원뿔이 있다. 모선
 AC 위의 점 Q_1 은 점 B에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AC에
 최단 거리로 이르는 점이고, 모선 AB 위의 점 Q_2 는 점 Q_1 에서
 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AB에 최단 거리로 이르는 점이다.
 이와 같은 방법으로 점 Q_n 은 모선 AB 또는 AC 위의 점
 Q_{n-1} 에서 원뿔의 옆면을 돌아 다른 모선에 최단 거리로 이르는
 점이라고 하자. 점 Q_{n-1} 에서 점 Q_n 에 이르는 최단 거리를 l_n
 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구
 하시오. (단, $B = Q_0, a$ 와 b 는 유리수이다.) [4 점]



24. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ 2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

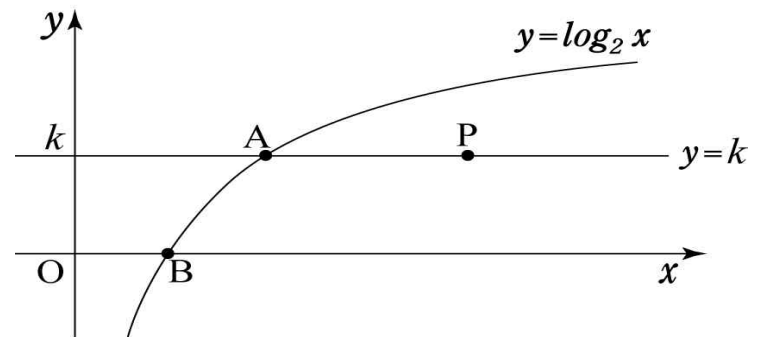
$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x \geq 0)$$

이라 하자. 곡선 $y = g(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분을 x 축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $q-p$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

25. 그림과 같이 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ (k 는 자연수), x 축과의 교점을 각각 A, B 라 하고, 직선 $y = k$ 위의 한 점 P 에 대하여 직선 OP 가 $\angle AOB$ 를 이등분할 때, 선분 AP 의 길이를 $f(k)$ 라 하자. $\sum_{k=1}^4 \{f(k)\}^2$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점)

[4점]



26번부터 30번까지는 선택과목 문항입니다. 선택한 과목의 문제를 풀기 바랍니다.

미분과 적분

26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} + e^{x \sin 2x} - 2}{x \ln(1+x)}$ 의 값은? [3 점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

27. 점 (6, 2) 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 두 접선을 그었을 때, 두 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각은 각각 α, β 이다. $\tan(\alpha + \beta)$ 의 값은? [3 점]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{3}{4}$
- ③ 1
- ④ $\frac{5}{4}$
- ⑤ $\frac{3}{2}$

28. 함수 $f(x) = \ln \frac{x}{k}$ (k 는 자연수)의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점과 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 사이의 최단 거리를 l_k 라 하자. $l_k \geq 3\sqrt{2}$ 를 만족시키는 k 의 최솟값은? (단, $e = 2.7$ 로 계산한다.) [3 점]

- ① 11
- ② 10
- ③ 9
- ④ 8
- ⑤ 7

29. 함수 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을

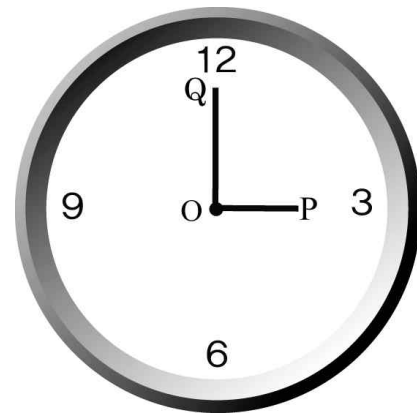
<보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4 점]

- <보 기>
- ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, \frac{1}{2})$ 에서의 접선과 원점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이다.
- ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{8}$ 이다.
- ㄷ. 방정식 $f(x) - f(10) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

30. 그림과 같은 원모양의 시계가 있다. 시계의 중심을 O, 길이가 2인 시침의 끝점을 P, 길이가 3인 분침의 끝점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하자. 4시 정각이 되는 순간, 넓이 S의 시간(분)에 대한 순간변화율은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구 하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 세 점 O, P, Q가 일직선 위에 있는 경우는 $S=0$ 으로 한다.) [4 점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.

확률과 통계

26. 다음은 어느 학급 학생 20 명의 수학 점수에서 십의 자리 수는 줄기로, 일의 자리 수는 잎으로 나타낸 것이다.

(단위 : 점)	
줄기	잎
4	8
5	2 2 6 6
6	0 4 4 4 8
7	2 6 6
8	0 0 0 4 8
9	2 6

전체 자료의 중앙값을 a 라 하고, 상위 20% 이내에 속하는 모든 학생들의 수학 점수의 평균을 b 라 할 때, $b-a$ 의 값은?

[3 점]

- ① 20
- ② 22
- ③ 24
- ④ 26
- ⑤ 28

27. 학생 A의 주머니에는 흰 구슬 2 개와 빨간 구슬 3 개가 들어 있고, 학생 B의 주머니에는 흰 구슬 3 개와 빨간 구슬 2 개가 들어 있다. 학생 A부터 시작하여 A와 B가 교대로 자신의 주머니에서 구슬 1 개씩 꺼내어 먼저 흰 구슬을 꺼내는 사람이 이기는 것으로 한다. 학생 A가 이길 확률은? (단, 모든 구슬의 크기와 모양은 같고, 한 번 꺼낸 구슬은 다시 주머니에 넣지 않는다.) [3 점]

- ① $\frac{21}{50}$
- ② $\frac{12}{25}$
- ③ $\frac{27}{50}$
- ④ $\frac{3}{5}$
- ⑤ $\frac{33}{50}$

28. 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, 실수 a, b 에 대하여 $P(X < a-3) = P(X > b+2)$ 가 성립한다.

$Y = \frac{1}{3}X + 1$ 일 때, 확률변수 Y 의 평균은 51, 분산은 $\frac{4}{9}$ 이다.

이 때, $a+b+\sigma$ 의 값은? [3 점]

- ① 299
- ② 300
- ③ 301
- ④ 302
- ⑤ 303

29. 이산확률변수 X 의 확률분포가 아래 표와 같다.

X	x_1	x_2	...	x_n	계
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

실수 a 에 대하여, 함수 $S(a)$ 를

$$S(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 p_i$$

라 정의하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4 점]

<보 기>

ㄱ. $S(a) = 0$ 일 때, $V(X) = 0$ 이다.

ㄴ. $a_1 < a_2$ 일 때, $S(a_1) < S(a_2)$ 이다.

ㄷ. 함수 $S(a)$ 는 $a = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

30. 확률변수 X 가 이항분포 $B(25, p)$ 를 따르고

$P(X=2) = 48P(X=1)$ 이다. 확률변수 X 에 대하여 X^2 의 평균을 구하시오. (단, $p \neq 0$) [4 점]

* 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

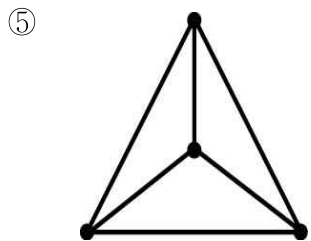
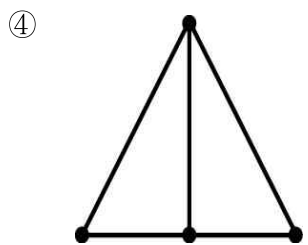
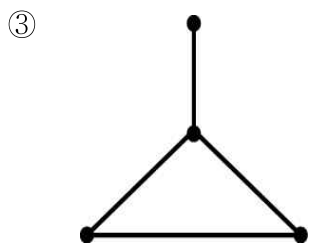
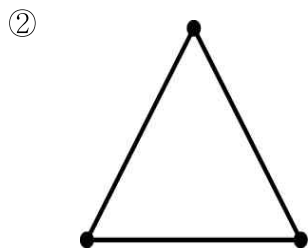
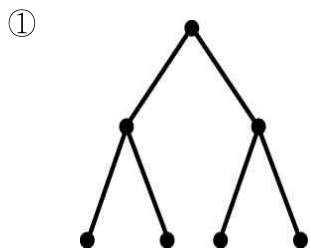
이산수학

26. 크기와 모양이 같은 검은 구슬 5개와 흰 구슬 2개를 서로 다른 세 상자에 모두 넣는 방법의 가짓수는? (단, 비어 있는 상자가 있을 수 있다.) [3 점]

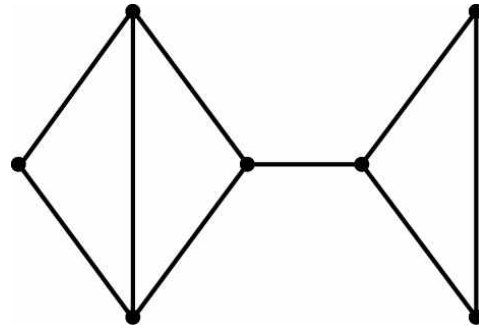
- ① 125
- ② 126
- ③ 127
- ④ 128
- ⑤ 129

27. 다음 명제의 반례가 되는 그래프는? [3 점]

꼭짓점을 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소색의 수가 3이면 그 그래프는 해밀턴 회로를 갖는다.



28. 다음 그래프에서 만들 수 있는 생성수형도의 개수는? [3 점]



- ① 21
- ② 22
- ③ 23
- ④ 24
- ⑤ 25

29. X 는 집합 $T = \{1, 2, \dots, 100\}$ 의 부분집합이고, $n(X) = 10$ 이다. 다음은 X 의 부분집합 중에서 원소의 합이 같고, 서로소인 두 부분집합이 존재함을 비둘기집의 원리를 이용하여 증명한 것이다.

$n(X) = 10$ 인 집합 X 의 모든 부분집합의 개수는 (가)이다. 이 부분집합들을 $X_i (i = 1, 2, 3, \dots, \text{(가)})$ 라 하고 집합 X_i 의 원소의 합을 s_i 라 하면 $0 \leq s_i \leq \text{(나)}$ 이다. 따라서, 집합 X 의 모든 부분집합의 개수가 집합 X_i 의 원소의 합 s_i 가 가질 수 있는 모든 경우의 가짓수보다 크므로 비둘기집의 원리에 의하여 합이 같은 X 의 두 부분집합 $X_i, X_j (i \neq j)$ 가 존재한다. 그리고,

$A = X_i - (X_i \cap X_j), B = \text{(다)}$

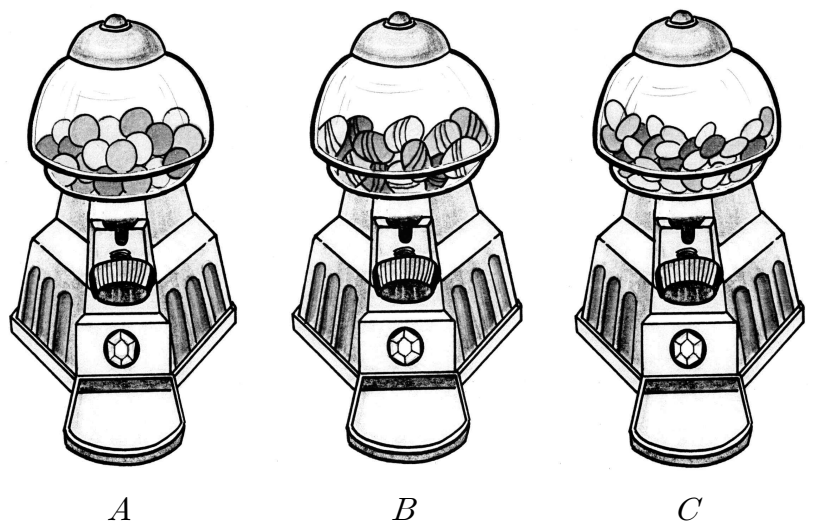
로 두면, 집합 A, B 는 원소의 합이 같고 서로소인 X 의 두 부분집합이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4 점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|------|-----|------------------------|
| ① | 100 | 855 | $X_j - (X_i \cap X_j)$ |
| ② | 100 | 955 | $(X_i \cup X_j) - X_j$ |
| ③ | 1024 | 855 | $X_j - (X_i \cap X_j)$ |
| ④ | 1024 | 955 | $(X_i \cup X_j) - X_j$ |
| ⑤ | 1024 | 955 | $X_j - (X_i \cap X_j)$ |

단답형

30. 버튼을 한 번 누를 때마다 A 는 1개, B 는 2개, C 는 2개의 사탕이 나오는 자판기 A, B, C 가 있다. 사탕을 뽑기 위해 자판기의 버튼을 순서대로 누르는 방법의 수를 구하려고 한다. 예를 들어, 3개의 사탕을 뽑기 위해 버튼을 순서대로 누르는 방법은 5가지이다. 7개의 사탕을 뽑기 위해 버튼을 순서대로 누르는 방법의 수를 구하시오. [4 점]



* 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.